

BIULETYN INFORMACYJNY
INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

WARSZAWA

TEL. 21007 w. 1232 i 1248

NOWOWIEJSKA 25

WARSZAWA

TEL. 21007 w. 1232 i 1248

NOWOWIEJSKA 25

Nr 26/K.T.M.C.21

listopad 1969 r.

Mgr inż. Roman Domański
Katedra Teorii Maszyn Ciepłych
Politechniki Warszawskiej

METODY ANALOGOWANIA PRZEWODZENIA CIEPŁA

1. Wstęp

Określenie pola temperatur jest niezbędne dla większości urządzeń cieplnych, pozwala ono na ocenę strat cieplnych, wybór właściwych materiałów oraz parametrów pracy. W wielu praktycznych przypadkach wyznaczenie rozkładu temperatur w sposób bezpośredni jest niemożliwe. Dla bardziej złożonej geometrii oraz skomplikowanych warunków brzegowych nie udaje się także próba wyliczenia pola temperatur przy pomocy metod numerycznych. Dla tych przypadków wydaje się korzystne zastosowanie metod analogowych, które przez pomiar prostych wielkości fizycznych (np. napięcia, wysokości słupa cieczy, ugięcia membrany) pozwalają określić temperatury.

Pierwsze analogie wykazał Kelvin (1824 - 1907), zaś pierwsze analogi (hydrodynamiczne) budował H.S. Hele-Shaw w latach 1901-1905. Model analogowy z wykorzystaniem wanny elektrolity-

cznej zbudował po raz pierwszy Langmuir w roku 1913, a analog elektryczny typu RC (zbudowany z oporów i kondensatorów) - Beuken w r.1934.

2. Możliwości analogowania przewodzenia ciepła

Niektóre odmienne pod względem fizycznym zjawiska opisywane są za pomocą identycznych równań matematycznych. Mówi się wtedy o podobieństwie matematycznym lub analogii, a układy do badań nazywa się modelami matematycznymi lub układami analogowymi.

Aby określić możliwości analogowania przewodzenia ciepła należy zestawić podstawowe równania opisujące przewodzenie ciepła i wybrać zjawiska, które dadzą się opisać identycznymi równaniami.

W tablicy 1 zebrano równania opisujące przewodzenie ciepła i analogiczne do nich równania opisujące inne zjawiska.

Jak wynika z tablicy 1 np. równanie Poissona określające ustalone pole temperatury z wewnętrznymi źródłami q_v wyraża także rozkład potencjału w elektrycznym polu przepływowym z doprowadzeniem prądu oraz rozkład potencjału w polu elektrostatycznym o przenikalności elektrycznej ϵ . Równanie to określa wirowy ruch płynu, ugięcie błony pod działaniem ciśnienia oraz rozkład potencjału w polu magnetycznym.

Zależność opisująca nieustalony rozkład temperatury w ciele z wewnętrznymi źródłami jest identyczna z równaniem opisującym rozkład potencjału w polu elektrodynamicznym typu RC oraz z uproszczonym równaniem Naviera-Stokesa ruchu płynu lepkiego nieściśliwego. Nawet najbardziej ogólny przypadek przewodzenia ciepła - pole nieustalone niejednorodne z wewnętrznymi źródłami ma swój odpowiednik w układzie hydraulicznym, składającym się ze zmiennych oporów hydraulicznych i źródeł. Jak wynika z przeprowadzonych wyżej rozważań oraz zestawienia zależności w tabl.1 zjawiska przewodzenia ciepła dadzą się łączyć przy pomocy analogii elektrycznych, hydraulicznych, błonowych oraz magnetycznych. Szukany rozkład temperatury może być określony przez pomiar prostych wielkości fizycznych. Zestawienie, odpowiadających sobie wielkości sporządzone na podstawie tablicy 1, przedstawia tabl.2.

Tablica 1

Pole temperatur	Pole elektryczne		Równania ruchu płynu	Równania ugięcia membrany	Pole magnetyczne
	dynamiczne	statyczne			
$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_i} \right) + q_v =$ $= c_p \rho \frac{\partial T}{\partial t}$			$\sum_{i=1}^3 \frac{\partial}{\partial x_i} \left(f_1 \frac{\partial h}{\partial x_i} \right) + f_2 =$ $= f_3 \frac{\partial h}{\partial t}$		
$a \nabla^2 T + \frac{q_v}{c_p \rho} = \frac{\partial T}{\partial t}$	$\nabla^2 V + R i_i = RC \frac{\partial V}{\partial t}$		$\nu \nabla^2 u - \frac{1}{\rho} \text{grad } p + F = \frac{Du}{Dt}$		
$a \nabla^2 T = \frac{\partial T}{\partial t}$	$\frac{1}{RC} \nabla^2 v = \frac{\partial v}{\partial t}$				
$\nabla^2 T = - \frac{q_v}{\lambda}$	$\nabla^2 V = -R i_i$	$\nabla^2 \phi = - \frac{Q}{\epsilon}$	$\nabla^2 \psi = - 2\omega$	$\nabla^2 z = - \frac{p}{\tau}$	$\nabla^2 A = -J$
$\nabla^2 T = 0$	$\nabla^2 V = 0$		$\nabla^2 \varphi = 0; \nabla^2 \psi = 0$	$\nabla^2 z = 0$	$\nabla^2 \varphi = 0$
$q = -\lambda \text{ grad } T$	$i = - \frac{1}{R} \text{ grad } V$	$D = - \epsilon \text{ grad } \phi$			$B = \mu H$
				Zał.	
				$\frac{\partial z}{\partial x} \ll 1$	
				$\frac{\partial z}{\partial y} \ll 1$	

Tablica 2

Wielkości termiczne	Wielkości elektrodynamiczne		Wielkości z analogii membranowych
	elektrostatyczne	elektrodynamiczne	
T [K] $E = - \text{grad } T$ $R_T = \frac{1}{\lambda} \frac{L}{A} = \frac{1}{\alpha A} \left[\frac{K}{W} \right]$	V, ϕ [V] $E = - \text{grad } T$	V [V] $E = - \text{grad } V$ $R = \frac{L}{\sigma A}$ [Ω]	z [m]
Q [J] $q = \frac{\Delta T}{R_T}$ [W]	$Q = \frac{\nabla V}{C}$ [C]	Q [C] $i = \frac{\Delta V}{R} = \frac{dQ}{dt}$ [A]	$h; v;$ $v = \frac{\Delta h}{\xi}$
λ	ϵ	σ	γ
$q = \lambda E$	$D = \epsilon E$	$J = \sigma E$	
$c_Q V = \frac{q}{\frac{dT}{dt}} \left[\frac{J}{K} \right]$		$C = \frac{i}{\frac{dV}{dt}} = \frac{Q}{\Delta V}$ [F]	

Aby otrzymać liczbową interpretację wyników należy zdefiniować wymiarowe i liczbowe zależności między zmiennymi i parametrami w prototypie pola i modelu - analogu, tzn. stałe skalowania.

W konstrukcji analogu jego wymiary są pierwszymi wielkościami, które narzucają stałe skalowania, inne stałe skalowania zależą od dostępnego do celów badawczych wyposażenia analogu (dokładności przyrządów mierniczych, możliwych do użycia elementów itp.). W czasie budowania modelu - analogu należy pamiętać, że każdy punkt analogu musi odpowiadać jednemu i tylko jednemu punktowi analogowanego układu rzeczywistego, kąty między krawędziami i liniami współrzędnych muszą być także takie same (o ile nie zastosowane zostało jakieś odwzorowanie). Przy modelowaniu rów. Laplace'a problem skalowania parametrów pola istnieje tylko wtedy, gdy pole jest niejednorodne lub anizotropowe.

Tablica 1 przedstawia zestawy równań różniczkowych; należy podkreślić, że na ogół przy budowaniu analogów przechodzimy do równań o przyrostach skończonych (rów. różnicowych). Istotny jest także fakt, że istnieje możliwość wyboru metody analogowej, ponieważ większość przypadków przewodzenia ciepła daje się analogować przy pomocy kilku metod. Pozwala to na wybór najkorzystniejszej w danych warunkach metody (ze względu na możliwości aparaturowe, finansowe itp.).

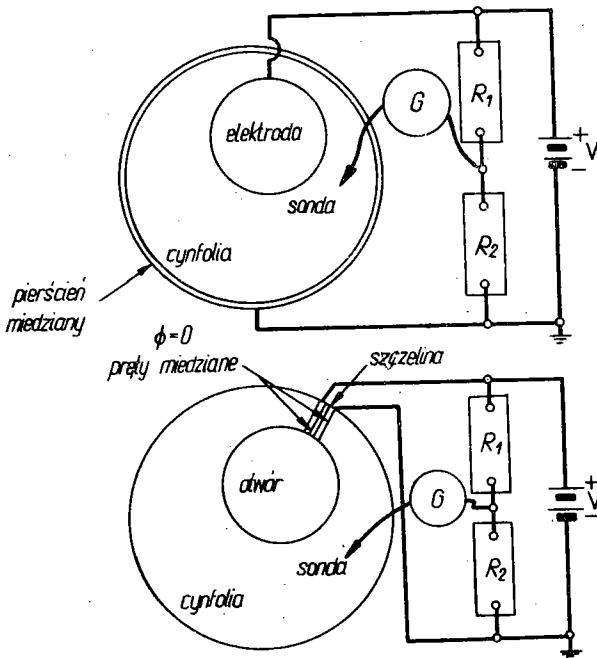
3. Przykłady układów analogowych

Jak wykazano poprzednio przewodzenie ciepła może być analogowane przy pomocy metod elektrycznych, hydraulicznych oraz cienkich błon. Poniżej zostanie przykładowo omówione kilka analogów wybranych w ten sposób, aby obejmowały one większość możliwych metod. Kolejność przedstawiania analogów nie wynika z ich rzeczywistego znaczenia, ma tylko na celu przedstawienie w każdej dziedzinie analogii przykładów od metod najbardziej prostych do najbardziej złożonych.

3.1. Analogie elektryczne

Jednym z najprostszych układów analogowych jest układ z wanną elektrolityczną. W analogu tego typu przewodność elek-

tryczna cieczy odpowiada przewodności cieplnej. Aby nie następowwała elektroliza układ zasilany jest prądem zmiennym. Określanie pola temperatur odbywa się poprzez pomiar różnicy napięć między źródłem a różnymi punktami elektrolitu. Oprócz zwykłych elektrolitów stosowane są roztwory organiczne, co pozwala na zmianę oporności w szerokich granicach. Elektrolity używane do doświadczeń muszą być czyste, gdyż niejednorodności zakłócają rozkład potencjału.



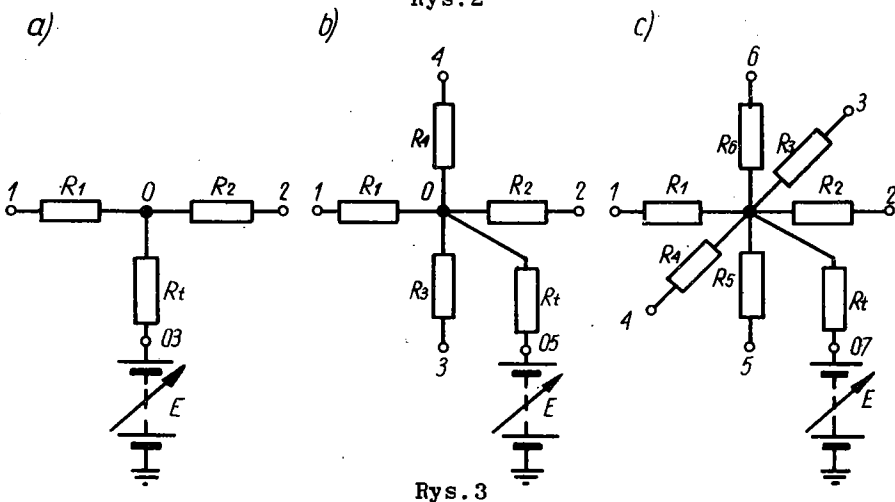
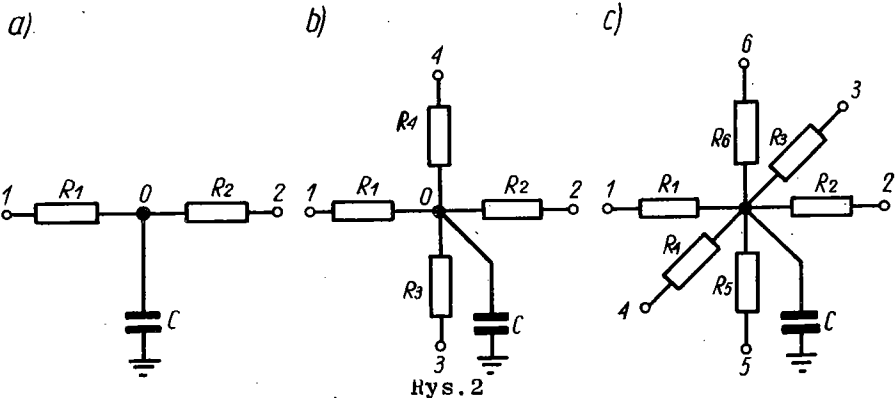
Rys. 1

Przez podzielenie elektrod można imitować ścianki utrzymywane w różnych stałych temperaturach. Układ z wanną elektrolityczną pozwala na rozwiązywanie zagadnień trójwymiarowych.

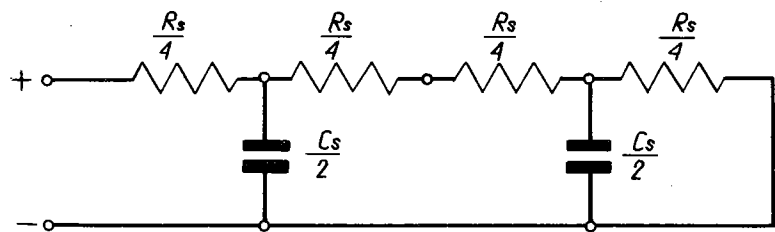
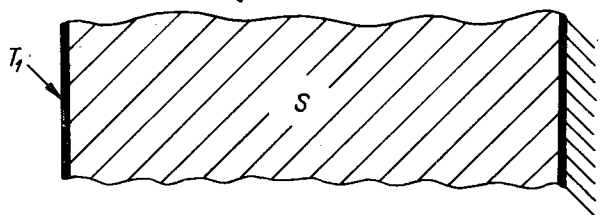
Model pokazany na rys.1 jest typowym modelem z płaszczyzną przewodzącą - opór płaszczyzny analoguje opór cieplny, temperaturom na krawędziach odpowiadają potencjały elektrod.

Układ taki może służyć do określenia izoterm, a z pewnymi zmianami i linii stałego strumienia ciepła (adiabat) (rys. 1b). Układy tego typu zazwyczaj pracują w układzie mostkowym.

Nie ustalone bezźródłowe pole temperatury może być analogowane przez dyskretny układ typu RC, elementy siatki tego układu są pokazane na rys.2, kolejno dla układu jedno-, dwu- i trójwymiarowego. Elementarny wycinek układu cieplnego zastąpiony został sześcioma oporami i kondensatorem umieszczonym w węźle tego układu i imitującym pojemność cieplną. Przez doprowadzenie prądu do węzła siatki oporowo-pojemnościowej można analogować przypadek niestabilnego źródłowego pola temperatur.



Rys. 3



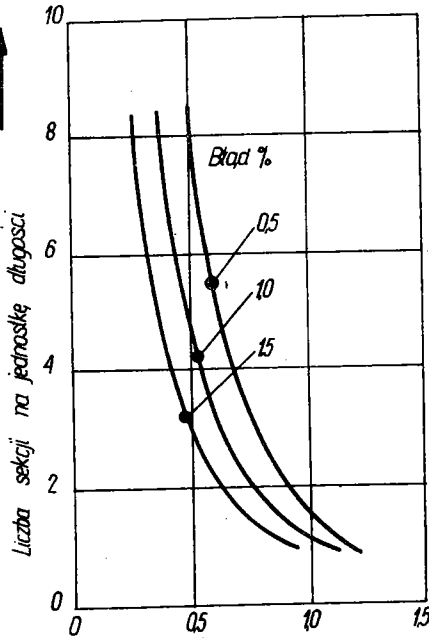
Rys. 4

Nie ustalone pole temperatur może być także analogowane przez układ zbudowany z oporników i regulowanych źródeł napięcia. Układ taki jest analogiem dyskretnym względem czasu i współrzędnych (rys.3). Napięcie zasilające regulowane jest skokowo przez zmianę oporu R_t . Znając $T(x,0)$ doprowadza się układ przez zmianę oporu do tego stanu, określa V_0 , wstępnie regulując zasilanie doprowadza się punkty przed oporami $R_t(V_{oi})$ do potencjału V_0 i przez pomiar napięcia w węzłach otrzymuje się wynik dla następnej chwili czasowej. Powtarzając czynność wielokrotnie uzyskuje się zmienny w czasie rozkład napięć. Metoda ta znana pod nazwą metody Liebmana jest bardzo pracochłonna, ale nie wymaga kondensatorów.

Warunki brzegowe dla prostszych przykładów analogowania rozpatrywane są w pracy [19]. Rys.4 przedstawia grubą ściankę z izolowaną cieplnie powierzchnią tylną i odpowiadający jej model elektryczny. Ściana na początku ma temperaturę T_1 a potem skokowo jej zewnętrzna powierzchnia uzyskuje temperaturę T_2 , która jest stała w dalszych rozważaniach. W analogu realizuje się tę zmianę przez przyłożenie różnicy potencjałów

do zacisków zewnętrznych, które poprzednio były rozwarłe. Jeśli różnica potencjałów odpowiada w pewnej skali różnicy temperatur $(T_2 - T_1)$, to wzrost napięcia w czasie będzie odpowiadał w tej samej skali zmianom temperatury w ścianie w poszczególnych punktach.

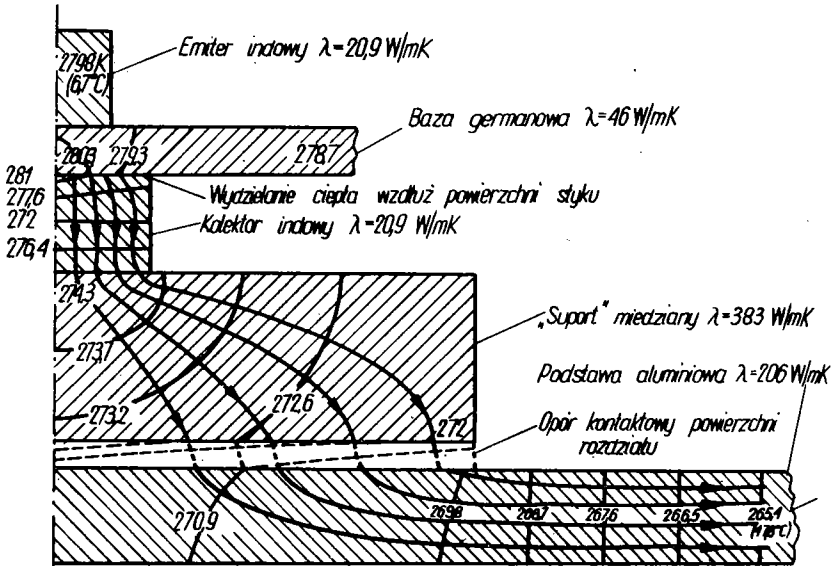
Oprócz zagadnienia warunków brzegowych istotną kwestią jest dokładność. Lawson [9] rozpatrywał niedokładności związane z zastępowaniem długiego jednorodnego oporu termicznego rozbitym na części obwodem elektrycznym. Jak się okazuje dokładność wyniku za-



Rys. 5

leży od liczby sekcji, na jakie została podzielona jednostka długości modelu, a błąd w sekcji zależy od odległości danej sekcji od początku obwodu (wejścia). Lawson podaje, że błąd w danej chwili czasowej maleje z ilością sekcji (rys.5). Aby otrzymać taką samą dokładność w dalszych częściach obwodu jak w pierwszej, należy czas pomiaru zwiększać proporcjonalnie do odległości, tzn. dla sekcji drugiej powinien on być dwa razy dłuższy niż dla pierwszej.

Mc Nall i Janssen [12] określili temperatury pracy wewnątrz złożonej struktury tranzystora przy pomocy układu analogowego z wanną elektrolityczną, geometrycznie do niego podobną. Symetryczną część tranzystora oraz rozwiązanie otrzymane



Rys. 6

przy pomocy analogii przedstawia rys.6. Przewodzenie ciepła poprzez składający się z pięciu elementów tranzystor (cztery różne materiały) rozpatrywano w układzie dwuwymiarowym. Tranzystor wykonano w ten sposób, że wszystkie powierzchnie zewnętrzne (nie stykające się z innym materiałem) można było przyjąć za adiabatyczne. Ciepło wydzielające się na granicy baza-kolektor było odprowadzane do powierzchni A-A^{II}, którą przyjęto jako izotermiczną.

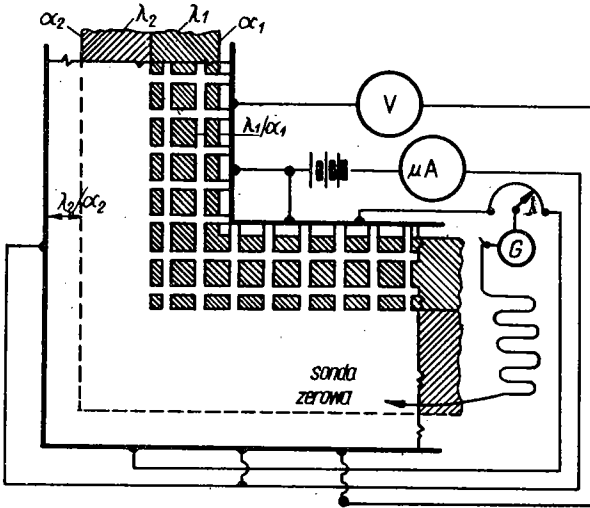
W analogu uwzględniono opór kontaktowy między podstawą a częścią podtrzymującą, gdyż tylko te elementy nie były zlutowane; dla powierzchni zlutowanych opór kontaktowy pominięto. Model wykonano w skali 100:1. Wanny były ze szkła, zaś elektrolitem był wodny roztwór chlorku potasu. Dla uzyskania w każdym zbiorniku takiej wartości oporu, która przy minimalnym rozproszeniu energii zabezpieczałaby taką różnicę potencjałów, którą można zmierzyć, zastosowano różne stężenia w poszczególnych wannach. Powierzchnie styku (połączenia wanien) stanowiły cienkie listwy miedziane.

Opór kontaktowy na granicy podstawy i części podtrzymującej zastąpiono oporem węglowym. Wydzielanie ciepła na granicy baza - kolektor zastąpiono specjalnym obwodem doprowadzającym prąd do tej granicy. Stałe skalowania zostały określone na podstawie metody Langmuira [8], a więc poprzez przepuszczenie prądu płynącego w analogu przez tzw. zbiornik standardowy. Opór elektrolitu będzie się zmieniał ze wzrostem temperatury, spowodowanym przepływem prądu. Należy więc do analogowania stosować jak najmniejsze prądy i bardzo czyste elektrolity (nie ma nierównomierności oporu, a więc i miejscowego wydzielania ciepła). Przy pomocy tego analogu uzyskano wyniki z błędem wypadkowym 6-8%.

Przy pomocy analogu z wanną elektrolityczną, Pakleza [15] określił przestrzenny rozkład temperatur w chłodzonej łopacie turbiny gazowej. Przy użyciu tego typu analogów można więc także rozwiązywać zagadnienia trójwymiarowe.

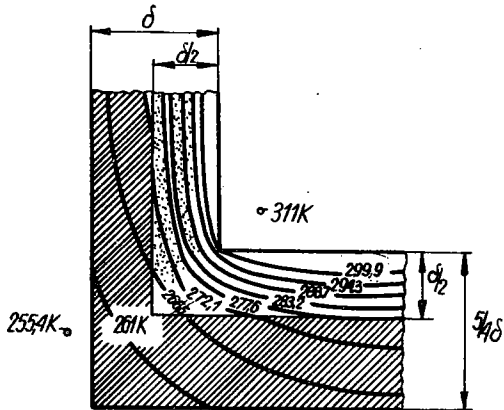
Kayan [7] podaje typowy układ analogowy z wykorzystaniem płaszczyzny przewodzącej, której geometria odpowiada geometrii układu badanego. W pracy tej autor rozpatruje przewodzenie ciepła w stanie ustalonym przez gruby narożnik omywany cieczami i składający się z dwóch części o różnych wymiarach i własnościach cieplnych. Ciecze te mają różne współczynniki przejmowania ciepła α_1, α_2 oraz różne i stałe temperatury. Zakładając, że opór cieplny na styku dwóch materiałów nie istnieje można otrzymać rozkład temperatury wewnątrz narożnika przy pomocy modelu pokazanego na rys.7.

Rozkład izoterm otrzymany przez Kayana [7] przedstawia rys.8.



Rys. 7

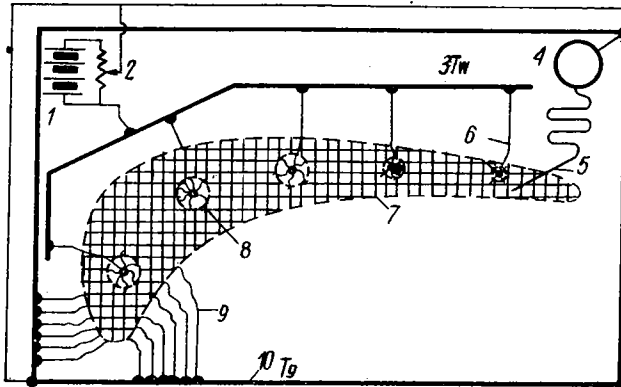
Ponieważ wewnętrzna część narożnika zbudowana była z materiału o mniejszej przewodności cieplnej, tzn. $\lambda_2/\lambda_1 = 4$, w płaszczyźnie przewodzącej wycięto otwory, aby powiększyć jej opór elektryczny w tym samym stosunku. Stosunek $R_1/R_2 = 4$ został wyznaczony metodą prób i błędów i prostymi pomiarami



Rys. 8

oporności. Opory termiczne na granicach narożnika $1/\alpha_1$ i $1/\alpha_2$ zostały wprowadzone w analogu przez dodanie do każdej powierzchni warstwy o odpowiedniej szerokości, tzn. odpowiednim oporze elektrycznym. Szerokość tych warstw określają stosunki $\lambda_1/\alpha_1 = 5,08$ mm dla ściany wewnętrznej oraz $\lambda_2/\alpha_2 = 50,8$ mm dla ściany zewnętrznej. Prąd stały doprowadzany był do płaszczyzny przewodzącej z baterii, i aby określić linie ekwipotencjalne (izotermy) wystarczyło zmierzyć napięcie za pomocą układu mostkowego z galwanometrem. Dokładność uzyska-

nych wyników zależy nie tylko od dokładności pomiarów, ale także od jednorodności oporu płaszczyzny przewodzącej. Kayan [7] przedstawia także analog zbudowany z odpowiednio dobranych oporników, przy pomocy którego zostały określone izotermy w



Rys. 9

identycznym narożniku. Bardzo udany analog wykonał Ellerbrock [2] w celu wyznaczenia rozkładu temperatur w chłodzonej łopatkę turbiny. Model ten pokazany na rys.9 był wykonany z kalibrowanych drutów zamiast oporników.

Pozwolił on na okreś-

lenie pola temperatur w łopatkę turbiny chłodzonej wodą przy pomocy pięciu okrągłych kanałów chłodzących.

Porównując otrzymane wyniki z uzyskanymi metodą obliczeniową wykazano, że największym błędem obciążone są temperatury uzyskane dla wiodącej części łopatki. Aby otrzymać lepsze wyniki dla tej części zrobiono cztery razy gęstszą siatkę, dzięki czemu błędy były bliskie zera.

Typowy układ oporowy do określania zmiennego w czasie rozkładu temperatur w jednowymiarowym systemie termicznym omawia w swej pracy Liebmann [10]. W Instytucie Badań Jądrowych zbudowano układ oporowy ELUKA [20] będący ulepszeniem analogu typu Liebmann. Pozwoliło to rozwiązać szereg problemów cieplnych w stanach ustalonych i niestabilnych, występujących w reaktorach jądrowych, generatorze MHD oraz plazmotronie.

Do rozwiązywania zagadnień niestabilnego przewodzenia z wewnętrznymi źródłami i bez źródeł stosowane są bardzo często układy oporowo-pojemnościowe RC. Jak podał Paschis [16] w Uniwersytecie Columbia wiele lat pracował układ analogowy RC, składający się najpierw ze 120 a potem 576 punktów węzłowych. Układ ten w połączeniu z pewną liczbą elementów czynnych, z których najważniejszym był układ zasilający o regulowanym na-

pięciu, pozwalał na rozwiązanie zagadnienia przepływu cieczy będącej nośnikiem ciepła.

Do najbardziej skomplikowanych przypadków przewodzenia ciepła stosuje się analogowe maszyny liczące. Dla jednokierunkowego przewodzenia ciepła obwód analogowego przelicznika RC dla typowego punktu jest integratorem posiadającym trzy wejścia.

Analogi elektroniczne pozwoliły na rozpatrzenie nieliniowych problemów przewodzenia ciepła. Friedmann [3] zbudował układ analogowy z nieliniowym oporem (znanym pod nazwą fabryczną "Thyrite") w celu określenia przewodzenia ciepła w układach, których parametry cieplne zależały od temperatury.

Za pomocą tego typu modeli - analogów zbadano przewodność cieplną stali i aluminium, których przewodność zmienia się znacznie z temperaturą.

3.2. Analogie hydromechaniczne

W dziedzinie hydromechaniki istnieje szereg możliwości analogowania przewodzenia ciepła. Jedną z najbardziej znanych to analogia strumienia cieczy. Analogia ta pozwala, na podstawie niewirowych przepływów cieczy, określić rozkład adiabat w systemie termicznym dwuwymiarowym. Dla nieściśliwej cieczy idealnej funkcja strumienia ψ (linii prądu) oraz harmonicznie sprzężona z nią funkcja potencjału prędkości φ spełniają równanie Laplace'a (tabl.1).

Oczywiście linie, na których potencjał prędkości jest stały są ortogonalne do linii prądu. Linie strumienia prądu odpowiadają więc liniom strumienia ciepła, a izotermom odpowiadają linie stałego potencjału prędkości. Dla przepływów wirowych słuszne jest równanie Poissona. Wobec tego na podstawie tabl.1 otrzymuje się analogię między wirem a wewnętrznymi źródłami ciepła, funkcje $\psi(x,y)$ i $T(x,y)$ są analogiczne i związane ze sobą równaniem

$$T(x,y) = \frac{q_v}{2\lambda\omega} \psi(x,y). \quad (1)$$

O ile równanie Laplace'a można łatwo zrealizować (analog z tej dziedziny zostanie krótko omówiony), to analogię z rów-

nania Poissona uzyskać jest bardzo trudno - ze względu na zachowanie stałego wiru. Problemy te omawia w swej pracy Den Hartog [1].

Łukianow podaje inny przykład analogowania hydromechanicznego polegający na analogii matematycznej między rozkładem temperatury w ciele stałym a rozkładem ciśnień w wodzie poruszającej się laminarnie przez przewody z oporami hydromechanicznymi [18].

Przy pomocy tego typu analogu można rozwiązać najbardziej złożone przypadki przewodzenia ciepła (tabl.1).

Analogia tego typu oparta jest na porównaniu prostych zależności:

$$dQ = c dT, \quad (2)$$

$$q = \frac{\Delta T}{R_T},$$

dla układu cieplnego (R_T - opór cieplny) z zależnościami dla układu hydromechanicznego:

$$dV = wdh, \quad (3)$$

$$v = \frac{\Delta h}{\xi},$$

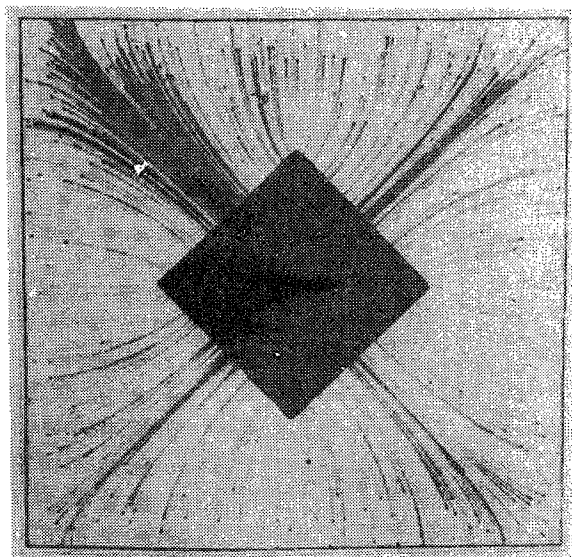
gdzie dV jest zmianą objętości cieczy w rurze, w - przekrojem rurki, Δh - zmianą wysokości słupa cieczy, v - prędkością, ξ - oporem hydromechanicznym.

Jak widać z zależności (2) i (3) proces przewodzenia ciepła i laminarny przepływ cieczy opisane są takimi samymi równaniami, a więc ruch cieczy imituje ruch ciepła.

Jeden z pierwszych analogów hydromechanicznych zbudował Moor [14]. W analogu tym ciecz zbliżona do idealnej (stosowano wodę i glicerynę) wypływa przez wąski otwór między płaszczyznami. Dolną płaszczyznę wykonano z materiału ceramicznego, górna odległa o 1,6 mm była szklana. Wizualizację przepływu (linii strumienia) osiągnięto przez dodanie kryształów nadmanganianu potasowego.

Rys.10 przedstawia otrzymany przy pomocy aparatu Moora rozkład linii strumienia w ściance pieca o temperaturze zewnętrznej

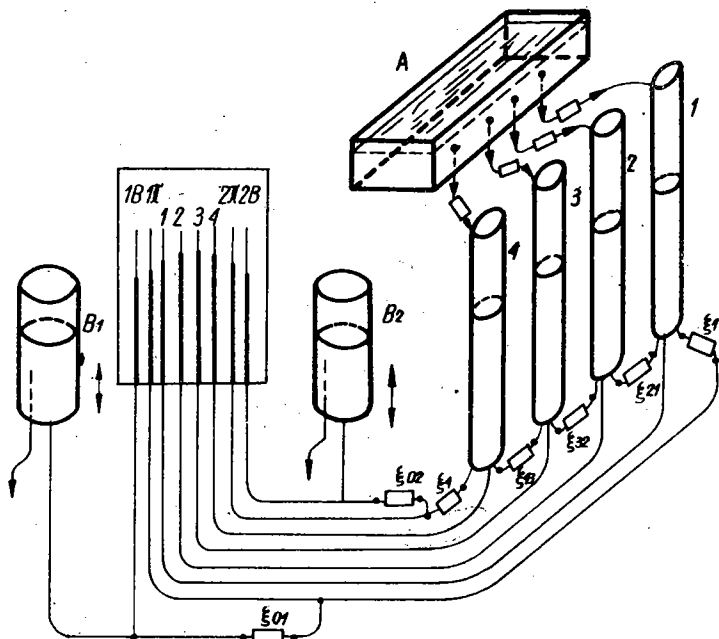
trznej T_1 i wewnętrznej $T_2 > T_1$. Na rysunku widać linie prądu, z których dopiero po analizie graficznej można określić linie ekwipotencjalne (izotermy). Sposoby rozszyfrowania diagramu podaje Moor [13].



Rys. 10

Dla najbardziej złożonych przypadków przewodzenia ciepła można zbudować analog typu Łukianowa, którego podstawy teoretyczne zostały już przedstawione. W analogu tego typu przepływowi ciepła odpowiada ruch cieczy, pojemności cieplnej przekrój rurek, a opór cieplny zastępuje opór przepływu przez kapilary. Zmiany poziomu cieczy w rękach określają zmiany temperatury. Opis prostego integratora Łukianowa podaje Łykov [11]. Ogólny wygląd tego analogu przedstawiono na rys.11. Dana jest ścianka wielowarstwowa o określonych wymiarach i parametrach cieplnych, dany jest także początkowy rozkład temperatur w ścianie oraz strumień cieplny na jej powierzchni. Należy określić rozkład temperatur w czasie. Aby zbudować model należy myślowo podzielić ściankę na szereg warstw i założyć, że dla każdej warstwy jej pojemność cieplna C_{T_n} ześrodkowana jest na osi. Po obu stronach takiej warstwy znajdują się opory termi-

czne odpowiadające połowie jej grubości. W ten sposób otrzymano układ pojemności cieplnych oddzielonych od siebie oporami $R_{T_{n,n+1}}$. Pojemności warstw skrajnych muszą zostać oddzielone



Rys. 11

od środka oporami odpowiadającymi oporom przejmowania ciepła. Takiemu układowi cieplnemu odpowiada układ hydrauliczny, składający się z rurek o określonych przekrojach w_n (odpowiadających w pewnej skali C_{T_n}) oddzielonych od siebie kapilarami (oporami hydraulicznymi $\xi_{n,n+1}$) odpowiadającymi w pewnej skali oporom cieplnym $R_{T_{n,n+1}}$. Warunki brzegowe narzucają się poprzez zmianę położenia zbiorników B_1, B_2 . Przy pomocy tego typu analogu rozpatrzono ściankę o grubości $2g = 1 \text{ m}$:

$$\lambda = 1,93 \frac{\text{W}}{\text{mK}}, \quad C_T = 0,836 \frac{\text{kJ}}{\text{kgK}}, \quad \rho = 2000 \text{ kg/m}^3.$$

Temperatura na granicach była stała i wynosiła 0°C . Początkowy rozkład temperatur zadano jako

$$T(x) = 20 \sin \frac{\pi x}{g}. \quad (4)$$

Szukano rozkładu temperatur po 10 i 20 godz.

Stałą czasową określoną jako stosunek czasów w układzie cieplnym i analogującym układzie hydraulicznym

$$\frac{t_T}{t_h} = \frac{R_{T_{n,n+1}} C_{T_n}}{\xi_{n,n+1} w_n} \quad (5)$$

przyjęto równą 1 h/1 min. Wyniki otrzymane przy pomocy analogu nie różniły się od obliczeniowych więcej niż o 0,15°C (czyli 1,5 mm).

Warto zaznaczyć, że w tej metodzie analogowania, nie ma ograniczeń co do jednorodności pola. Nalewając ze zbiornika A (rys.10) wodę do odpowiednich rurek, można otrzymać imitację wewnętrznych źródeł ciepła. Podobnie warunki graniczne mogą być zmieniane w czasie, co uzyskuje się przez zmianę położenia naczyń B_1 i B_2 . W celu utrzymania stałej temperatury na granicach układu, w zbiornikach B_1 , B_2 umieszcza się rurki przelewowe. Aby określić temperatury powierzchni wstawia się cienkie rurki między zbiorniki B_1 , B_2 i rurki analogujące zewnętrzne warstwy. Przy pomocy tego typu analogu można rozwiązywać problemy dwu- i trójwymiarowe.

3.3. Analogie membranowe

Analogie te związane są ze zjawiskiem sprężystości. Jak podano w tabl.1 równania różniczkowe opisujące ugięcie idealnej membrany, rozciągniętej na dowolnym zamkniętym konturze, pod wpływem własnego ciężaru albo poddanej działaniu stałego ciśnienia p , są odpowiednie równaniom Laplace'a i Poissona. Równania te można otrzymać rozważając elementarny wycinek błony lub korzystając z ogólnego równania Zaworykina [6]. Karplus [6] podaje założenia, przy których ugięcie błony daje się opisać tymi równaniami (warunki jakim odpowiada błona idealna):

1) napięcie od sił pionowych jest jednakowe w każdym punkcie błony,

2) napięcie wewnątrz błony jest duże w porównaniu do sił ciężkości błony; błona musi być lekka i cienka,

3) nachylenie błony we wszystkich punktach musi być małe; przy nachyleniu mniejszym od 6% błąd otrzymany przez przybliżenie jest mniejszy od 1%.

A więc zależność między strzałką ugięcia błony pod własnym ciężarem a rozkładem temperatur w stanie ustalonym bez wewnętrznych źródeł ciepła będzie miała postać

$$T(x,y) = z(x,y). \quad (6)$$

Związek zaś między ugięciem błony pod stałym ciśnieniem a rozkładem temperatur w układzie termicznym z równomiernie rozłożonymi źródłami będzie następujący

$$T(x,y) = \left(\frac{q_v}{\lambda}\right) \cdot \left(\frac{\tau}{p}\right) z(x,y). \quad (7)$$

W obu przypadkach granica rozciągniętej błony powinna być geometrycznie podobna do granicy rozpatrywanego obszaru cieplnego, a znane graniczne temperatury powinny być wprowadzone przez ustawienie krawędzi membrany w odpowiedniej skali $z_1 = c T_1$.

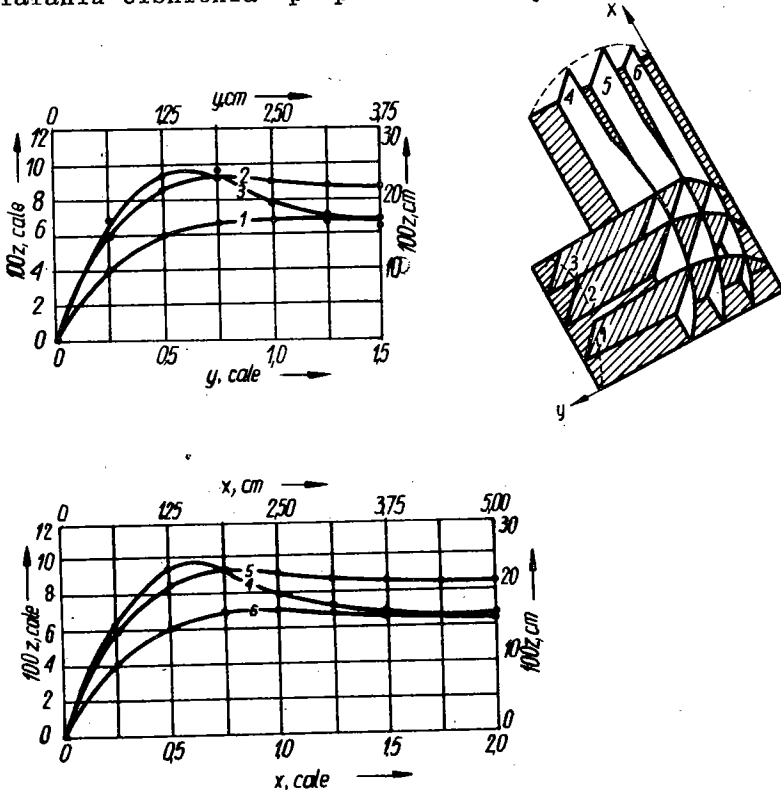
Ze wzoru (7) wynika, że aby uzyskać wyniki liczbowe trzeba znać p i τ lub ich stosunek. Dane te można uzyskać przez pomiar kąta na krawędzi błony pomocniczej (pierwszy raz wykonali to Griffith A.A., Taylor G.J. [4]) lub przez całkowanie równania różniczkowego strzałki ugięcia błony rozciągniętej na okrągłej granicy.

Dla tego typu analogów dokładność wyniku zależy od dokładności pomiaru współrzędnych x, y i strzałki ugięcia $z(x, y)$. Pomiarów tych dokonuje się za pomocą czujnika z ostrzem lub przez fotografowanie. Układ optyczny służący do fotografowania i określania profilu błony omawia w swej pracy Ikeda [5] oraz Moor [13].

Metody fotograficzne są bezsprzecznie lepsze, ponieważ nie wymagają dotykania błony, a niezbędny czas trwania skrócony jest do czasu koniecznego do wykonania fotografii. W czasie doświadczeń z błonami Wilson L. i Miles A. [21] wykazali, że kształt błony mydlanej pod zerowym ciśnieniem do pewnego stopnia zależy od wieku błony (czasu trwania). Ze wzrostem wieku błony kształt jej zbliża się do idealnego, wynikającego z rozwiązania równania Laplace'a. Nachylenie płaszczyzny granic o kilka stopni w stosunku do poziomu powoduje, że profil błony szybciej zbliża się do idealnego. Można to wytłumaczyć tym,

że nadmiar z otworu mydlanego szybciej ścieka i błona staje się bliższa idealnej.

Przy pomocy analogii membranowej [21] określono rozkład temperatur w cewce elektrycznej prostokątnej o wymiarach zewnętrznych 101,6 × 76,2 mm (4 × 3 cale) i wewnętrznych 50,8 × 25,4 mm (2 × 1 cal) wydzielającej równomiernie ciepło Joula - q_v . Kształt błony rozciągniętej na tej granicy i podanej działaniu ciśnienia p przedstawia rys.12. Stosunek p/r



Rys. 12

określono przy pomocy pomocniczego okrągłego konturu. Wyniósł on $p/r = 27,2 \text{ m}^{-1}$. Znając wartość q_v i λ oraz $z(x,y)$ można korzystając z zależności (7) określić rozkład temperatur. Aby sprawdzić wyniki doświadczalne z rozwiązaniem dokładnym rozpatrzono cewkę okrągłą.

Dla cewki o $q_v = 103 \frac{kW}{m^3}$ i $\lambda = 1,73 \frac{W}{mK}$ wyniki nie różniły się od teoretycznych więcej niż $\pm 3\%$.

Ciekawą metodę pozwalającą uniknąć wielu kłopotów związanych z błonami mydlanymi podali Piccard A. i Baes L. [17]. Wykorzystali oni powierzchnię rozdziału między dwiema nie mieszającymi się cieczkami o jednakowej gęstości jako membranę. Gdy dyfuzja między cieczkami jest bardzo mała, powierzchnia ta daje się opisać rów. Laplace'a lub Poissona.

Dla ułatwienia pomiarów stosuje się ciecze: przewodzącą i nieprzewodzącą. Analog tego typu jest dużo wygodniejszy od błonowego, gdyż powierzchnia rozdziału utrzymuje się długo, a pomiary $z(x,y)$ są łatwiejsze.

Oprócz błon mydlanych analogi wykonywano przy pomocy bardzo cienkich błon gumowych.

4. Zakończenie

Jak wynika z przytoczonych przykładów i rozważań, układy analogowe pozwalają rozwiązywać zagadnienia ustalonego i nieustalonego przewodzenia ciepła przy uwzględnieniu źródeł wewnętrznych, oraz bez źródeł, dla ośrodków jednorodnych i niejednorodnych.

Niektóre metody analogowe pozwalają określać pola temperatur, nawet wtedy, gdy własności ośrodka są funkcją temperatury.

Model analogowy może być użyty tylko wtedy, gdy znane są wielkości wchodzące do rozważań (tzn. własności cieplne i parametry analogu), a pozostają do wykonania tylko operacje matematyczne, które zamiast obliczeń wykonuje się za pomocą układu analogowego. Analog spełnia więc rolę maszyny matematycznej. Jest on aparatem doświadczalnym, w którym mierzy się pewne wielkości fizyczne, a następnie przy użyciu stałych skalowania wnioskuje się o innych wielkościach występujących w zupełnie innym zjawisku fizycznym opisanym identycznym równaniem. Jeśli nie odchodzi się od równań różniczkowych błąd wyniku związany jest tylko z błędem pomiaru danej wielkości i dokładnością określenia parametrów wyjściowych. Natomiast wszędzie tam, gdzie ośrodek ciągły zastępuje się w analogu

ośrodkiem o parametrach dyskretnie rozłożonych (tzn. przechodzi się od równań różniczkowych do różnic skończonych) należy przeprowadzić analizę błędu i tak dobrać ilość sekcji, aby wyniki otrzymane były bliskie wielkościom rzeczywistym, a jednocześnie koszty modelu nie były zbyt wysokie.

Dla wielu przypadków zbędne jest zwiększanie ilości sekcji, ponieważ parametry cieplne znane są z małą dokładnością, a wykonywane pomiary są obarczone znacznymi błędami, co w sumie i tak podważa otrzymany wynik. Bardzo ważne jest wybranie takiej metody pomiarowej, która nie zakłóca pracy analogu a daje dostateczną dokładność.

Analogi poprzez stałe skalowanie pozwalają na wydłużenie lub skrócenie czasu trwania zjawiska.

Układy analogowe są szczególnie wygodne i przydatne do rozwiązywania problemów ze złożonymi strukturami o skomplikowanej geometrii i złożonych warunkach brzegowych oraz dla przypadków, w których parametry są zmienne w czasie. Zaletą modelu analogowego jest fakt, że wyniki uzyskuje się w krótkim czasie, chociaż czas jego przygotowania do pracy może być dłuższy niż czas przygotowania do obliczeń. Czas obliczeń wydłuża się znacznie przy zwiększeniu ilości punktów obliczeniowych i zwiększeniu dokładności.

Istotną zaletą analogii jest możliwość rozwiązania takiego samego przypadku przewodzenia ciepła przy pomocy różnych analogów, co pozwala na wybór najbardziej efektywnego.

Szczególnie szerokie możliwości dają analogi elektryczne, ze względu na dużą dokładność wykonywania elementów o charakterystykach liniowych i nieliniowych. Zaletą analogów elektrycznych jest możliwość budowania ich z szeregu określonych zestawów (podzespołów), co znacznie skraca czas wykonania i daje szerokie możliwości przebudowy. Duże możliwości stwarza także model Łukianowa.

Wydaje się, że analog można stosować dla wszystkich skomplikowanych przypadków, w których interesuje nas wiele rozwiązań (np. dla zmiennych warunków brzegowych i początkowych, zmiany źródeł itp.), dla tej samej geometrii układu. Wtedy bowiem czas i koszt przygotowania modelu - analogu rozkłada się na wiele wyników, a czas potrzebny na analityczne lub numeryczne rozwiązanie wzrasta.

Wadą analogów są trudności z dobraniem odpowiednich elementów składowych. Niezbędne są np. duże ilości oporników, kondensatorów, kapilar, o identycznych parametrach i charakterystykach. Stwarza to trudności wykonawcze i podwyższa koszty.

Ogólnie wydaje się, że układy analogowe są bardzo przydatne do rozwiązywania zagadnień przewodzenia i przenikania ciepła. Optymalnym rozwiązaniem pod względem technicznym i ekonomicznym wydają się być układy hybrydowe, czyli układy cyfrowo-analogowe. Maszyna cyfrowa musi wykonać dziesiątki tysięcy operacji w celu uzyskania rozwiązania, które w analogu elektrycznym ustala się w ułamku sekundy. Przy złożonej geometrii rozpatrywanego układu, zmiennych parametrów cieplnych, złożonych warunkach brzegowych i wielu punktach obliczeniowych, ilość niezbędnych operacji gwałtownie wzrasta a czasy rozwiązań maszynowych i koszty rosną. Połączenie więc maszyny cyfrowej, przy pomocy której można rozwiązywać problemy nie dające się analogować, przeprowadzać optymalizację, opracowywać dane z analogiem, który w sposób prawie natychmiastowy daje rozwiązanie dla wielu punktów, ma wszystkie zalety nowoczesnego układu obliczeniowego.

Niektóre oznaczenia

A - przekrój przewodu; a - dyfuzyjność cieplna; B - indukcja magnetyczna; C - pojemność elektryczna; c_p - ciepło właściwe; D - indukcja elektryczna; E - natężenie pola; f_i - funkcja temperatury i współrzędnych x, y, z ; H - natężenie pola magnetycznego; h - wysokość słupa cieczy; i - natężenie prądu; j - gęstość prądu; R - opór elektryczny; R_T - opór termiczny; V, ϕ - potencjał pola; α - współczynnik przejmowania ciepła; λ - współczynnik przewodzenia ciepła; ν - lepkość kinetyczna; ξ - opór hydromechaniczny; ρ - gęstość; σ - przewodność elektryczna; τ - naprężenie styczne.

Bibliografia

1. Den Hartog J.P.: Advanced Strength of Material. New York 1952.
2. Ellerbrock H.H.: Use of Analogs for Calculation of Tempera-

- ture Distribution of Cooled Turbine Blades . NACA TN, No 3060. Dec.1953.
3. Friedmann N.E.: Quasilinear Heat Flow, Ph.D. thesis in engineering Los Angeles 1956.
 4. Griffith A.A., Taylor G.J.: The use of Soap Films in Solving Torsion Problems. Proc. Inst. Mech.Eng.Dec. 1917.
 5. Ikeda K.: Soap Film Techniques for Solving Torsion Problems Japan. Sci Rev, 2 Nr 2, 1951.
 6. Karplus W.J. Ph.D. Analog Simulation. New York 1958.
 7. Kayan C.F.: Heat Transfer Temperature Patterns of a Multi-component Structure by Comparative Methods. Trans., ASME vol. 71, 1949.
 8. Langmuir J., Adams E.Q., Meikle F.S.: Flow of Heat Through Furnace Walls, Trans. Amer, Electrochem. Soc. 1913.
 9. Lawson D.J., Mc Guire J.H.: The Solution of Transient Heat Flow by Analogous Electrical Networks. Proc. Inst. Mech. Eng.167. Nr 3 1953.
 10. Liebmann G.: New Electrical Analog Method for the Solution of Transient Heat Conductor Problems. Trans. ASME vol.78. 1956.
 11. Lykow J.: Teorija tiełprowodnosti. Moskwa 1952.
 12. Mc. Nall P.E., Janssen J.E.: An Electrolytic Analog Applied to the Solution of a Thermal Conduction Problem ASME June 1954.
 13. Moore A.D.: Mapping Techniques Applied to Fluid Mapper Patterns. Trans. AJEE, 7 1952.
 14. Moore A.D.: Fields from Fluid Flow Mappers. J.Appl.Phys. 20, Nr 8 1949.
 15. Pakleza J.: O pewnej metodzie badania przestrzennego rozkładu temperatur w łopatkach turbin gazowych. Praca doktorska - Politechnika Warszawska, Warszawa 1965.
 16. Paschis V.: The Heat and Mass Flow Analyzer at Columbia University 1969.
 17. Piccard A., Baes L.: Mode experimental nouveau relatif à l'application des surfaces a courbure constante à la solution du problème de la torsion des barres prismatiques 1926.

18. Pietuchow J.: Opytneje izuczenie procesow tiepłopieredaczi. Moskwa 1952.
19. Schneider F.J.: Conduction Heat Transfer. Cambridge 1955.
20. Strupczewski A.: Zastosowanie metody elektrycznej analogii oporowej do rozwiązywania problemów cieplnych w technice jądrowej. Praca doktorska - IBJ. Świerk 1968.
21. Wilson L.H., Miles J.: Application of Membrane Analogy to the Solution of Heat Conduction Problems. J.Appl.Phys.,21, 1950.

Методы опытного изучения процессов теплопроводности

К р а т к о е с о д е р ж а н и е

В работе собраны и представлены методы опытного изучения процессов теплопроводности при помощи электрических цепей, танков с электролитом, гидродинамических систем и мембран. Указано фундаментальные теоретические и экспериментальные законы составления аналогов.

Для избранных случаев показано примеры аналогов и результаты экспериментальных исследований полученных при их помощи.

Analog Methods for Heat Conduction Problems

S u m m a r y

The paper contains analog methods for the solution of heat conduction problems by electrical networks, electrolytic tanks, soap film techniques, hydraulic methods. It explains the basic theoretical and practical principles for building analog systems.

The present paper gives some examples of analogs and presents the experimental results.

BIULETYN INFORMACYJNY
INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

WARSZAWA

TEL. 21007 w. 1232 i 1248

NOWOWIEJSKA 25

WARSZAWA

TEL. 21007 w. 1232 i 1248

NOWOWIEJSKA 25

Nr 26/K.T.M.C.21

listopad 1969 r.

Mgr inż. Roman Domański
Katedra Teorii Maszyn Ciepłych
Politechniki Warszawskiej

METODY ANALOGOWANIA PRZEWODZENIA CIEPŁA

1. Wstęp

Określenie pola temperatur jest niezbędne dla większości urządzeń cieplnych, pozwala ono na ocenę strat cieplnych, wybór właściwych materiałów oraz parametrów pracy. W wielu praktycznych przypadkach wyznaczenie rozkładu temperatur w sposób bezpośredni jest niemożliwe. Dla bardziej złożonej geometrii oraz skomplikowanych warunków brzegowych nie udaje się także próba wyliczenia pola temperatur przy pomocy metod numerycznych. Dla tych przypadków wydaje się korzystne zastosowanie metod analogowych, które przez pomiar prostych wielkości fizycznych (np. napięcia, wysokości słupa cieczy, ugięcia membrany) pozwalają określić temperatury.

Pierwsze analogie wykazał Kelvin (1824 - 1907), zaś pierwsze analogi (hydrodynamiczne) budował H.S. Hele-Shaw w latach 1901-1905. Model analogowy z wykorzystaniem wanny elektrolity-

18. Pietuchow J.: Opytnoje izuczenie procesow tieplotieredaczi. Moskwa 1952.
19. Schneider F.J.: Conduction Heat Transfer. Cambridge 1955.
20. Strupczewski A.: Zastosowanie metody elektrycznej analogii oporowej do rozwiazywania problemow cieplnych w technice jadowej. Praca doktorska - IBJ. Świerk 1968.
21. Wilson L.H., Miles J.: Application of Membrane Analogy to the Solution of Heat Conduction Problems. J.Appl.Phys., 21, 1950.

Методы опытного изучения процессов теплопроводности

К р а т к о е с о д е р ж а н и е

В работе собраны и представлены методы опытного изучения процессов теплопроводности при помощи электрических цепей, танков с электролитом, гидродинамических систем и мембран. Указано фундаментальные теоретические и экспериментальные законы составления аналогов.

Для избранных случаев показано примеры аналогов и результаты экспериментальных исследований полученных при их помощи.

Analog Methods for Heat Conduction Problems

S u m m a r y

The paper contains analog methods for the solution of heat conduction problems by electrical networks, electrolytic tanks, soap film techniques, hydraulic methods. It explains the basic theoretical and practical principles for building analog systems.

The present paper gives some examples of analogs and presents the experimental results.