

# BIULETYN INFORMACYJNY

## INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ

### POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

WARSZAWA

TEL. 21007 w. 1232 i 1248

NOWOWIEJSKA 25

Nr 24/K.T.M.C.19

wrzesień 1969 r.

Mgr inż. Andrzej Kłopocki  
Katedra Teorii Maszyn Ciepłych  
Politechniki Warszawskiej

#### ANALIZA TEORETYCZNA KONWEKCJI SWOBODNEJ W PRZESTRZENI MIĘDZY RÓWNOLEGŁYMI, IZOTERMICZNYMI PŁYTAMI

##### 1. Wstęp

Modelem matematycznym i eksperymentalnym powierzchni wymiany ciepła rozwiniętej przy użyciu płaskich żeber jest układ płyt równoległych. Ze względu na szerokie zastosowanie płaskich żeber w przemyśle elektrotechnicznym (chłodzenie rdzeni transformatorów, prostowników stykowych itp.) i elektronicznym (chłodzenie lamp mocy) oraz w wielu innych np. chłodnictwie termoelektrycznym - wymiana ciepła w układzie płyt równoległych była przedmiotem prac wielu autorów. W większości przypadków były to prace eksperymentalne. Z prac teoretycznych najbardziej znane są: rozważania teoretyczne W. Elenbaasa [1] oraz rozwiązanie numeryczne równań tzw. "konwekcji nieściślej" J.R. Bodoia i J.F. Osterlego [2].

W rozważaniach Elenbaasa zostały przyjęte z góry zarówno funkcje rozkładu prędkości, jak również temperatury. Zawarte w nich trzy stałe dowolne były wyliczone drogą spełnienia równań ruchu i energii na brzegach przyjętego modelu, w pozostałym zaś obszarze przyjęte funkcje nie spełniały równań ruchu i energii.

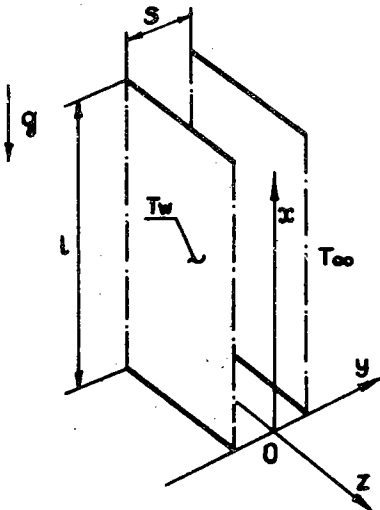
Rozwiązania Bodoia i Osterlego nie posiadają znamion ogólności w odniesieniu do rozkładów prędkości, temperatur oraz lokalnego współczynnika przejmowania ciepła, tzn. dla każdego rozpatrywanego przypadku obliczenia należy prowadzić indywidualnie.

Intencją niniejszej pracy jest scałkowanie uproszczonego równania energii, rozpisanego dla konwekcji swobodnej w przestrzeni pomiędzy równoległymi, ogrzаныmi płytami. Stworzy to oczywiście, możliwości dla określenia pełnego pola temperatur, wyznaczenia lokalnych współczynników przejmowania ciepła oraz podania ogólniejszej zależności opisującej wymianę ciepła w rozważanej geometrii.

## 2. Rozważania teoretyczne

Przytaczana zazwyczaj w literaturze postać równania energii jest następująca

$$u \frac{\partial T}{\partial x} + v \frac{\partial T}{\partial y} + w \frac{\partial T}{\partial z} = a \left( \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} \right). \quad (1)$$



Rys. 1. Model rozważanej geometrii

Efektywne scałkowanie równania (1) jest możliwe jedynie przy jego uproszczeniu. Dla rozpatrywanego modelu zostaną przyjęte poniższe założenia upraszczające:

1. Zagadnienie jest traktowane jako płaskie, tzn. proces przebiega w płaszczyźnie  $x, y$  (rys.1), żadne zmiany w kierunku osi  $z$  nie są brane pod uwagę. Uczynienie takiego założenia jest dopuszczalne pod warunkiem dostatecznie dużego wymiaru płyt w kierunku  $z$ .

2. Biorąc pod uwagę fakt stabilizacji profilu prędkości w kierunku osi  $x$  na niewielkim po-

czątkowym odcinku kanału [2], jak również symetrię kanału względem osi  $x$ , traktuje się prędkość w kierunku  $y$  jako równą zero.

3. Przyjmuje się powszechnie stosowaną nierówność:

$$\frac{\partial^2 T}{\partial y^2} \gg \frac{\partial^2 T}{\partial x^2}.$$

4. Wymiana ciepła jest ustalona w czasie.

5. Płyty są izotermiczne.

Uwzględniając powyższe założenia otrzymuje się:

$$\frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} = 0,$$

$$v = 0,$$

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} = 0.$$

W ten sposób równanie (1) upraszcza się do

$$u \frac{\partial T}{\partial x} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y^2}. \quad (2)$$

Wygodnie jest wprowadzić następujące podstawienia:

$$u^+ = \frac{4 s^2 u}{1 Gr^+},$$

$$x^+ = \frac{16 x}{1 Gr^+},$$

$$y^+ = \frac{2 y}{s},$$

$$T^+ = \frac{T - T_\infty}{T_w - T_\infty},$$

$$Gr^+ = g \frac{T_w - T_\infty}{T_\infty \nu^2} \frac{s^4}{1} = Gr \text{ s/l.}$$

W rozpisanych zależnościach oznaczają:

- s - szerokość kanału,
- l - wysokość kanału,
- $\nu$  - lepkość kinematyczna,
- T - temperatura czynnika w przestrzeni między płytami,
- $T_w$  - temperatura płyt,
- $T_\infty$  - temperatura czynnika przed wejściem do kanału,
- Gr - liczba Grashofa.

Wszystkie wielkości oznaczone krzyżykiem są bezwymiarowe.

Wprowadzając powyższe oznaczenia do równania (2) uzyskuje się je w postaci bezwymiarowej

$$\text{Pr } u^+ \frac{\partial T^+}{\partial x^+} = \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^{+2}}, \quad (3)$$

gdzie  $\frac{\nu}{a} = \text{Pr}$  - liczba Prandtla.

Scałkowanie równania (3) względem  $T^+(x^+, y^+)$  wymaga znajomości  $u^+$ . Rozpatrywanie równania energii w oderwaniu od równania ruchu stwarza konieczność założenia z góry zależności  $u^+$  od współrzędnej  $y^+$ . Z praktycznego punktu widzenia najwygodniej jest przyjąć płaski profil prędkości  $u^+ = k = \text{const}$ , nie precyzując na razie wartości liczbowej stałej k. Jak się okazuje takie postępowanie nie prowadzi do zbyt dużych błędów w całym, ważnym dla zastosowań technicznych, zakresie zmienności grupy  $\text{GrPr } s/l$ .

W dalszym ciągu rozwiązywane będzie równanie

$$\text{Pr } k \frac{\partial T^+}{\partial x^+} = \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^{+2}} \quad (4)$$

wraz z warunkami brzegowymi:

- a)  $T^+ = 0$ ,    gdy     $x^+ = 0$ ,
- b)  $T^+ = 1$ ,    gdy     $y^+ = \pm 1$ ,
- c)  $\frac{\partial T^+}{\partial y^+} = 0$ ,    gdy     $y^+ = 0$ .

Przewidywane jest rozwiązanie o postaci

$$T^+(x^+, y^+) = 1 - X(x^+) Y(y^+), \quad (5)$$

skąd

$$\frac{\partial T^+}{\partial x^+} = -X' Y \quad \text{oraz} \quad \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^{+2}} = -X Y''.$$

Po wstawieniu do równania (4) uzyskanych równości i prostych przekształcenia otrzymuje się

$$\text{Pr k } \frac{X'}{X} = \frac{Y''}{Y}. \quad (6)$$

Lewa strona równania (6) zależy wyłącznie od  $x^+$ , zaś strona prawa jest funkcją tylko zmiennej  $y^+$ , zatem równanie (6) jest równoważne dwóm równaniom różniczkowym zwyczajnym:

$$\text{Pr k } \frac{X'}{X} = -\mu^2, \quad (7a)$$

$$\frac{Y''}{Y} = -\mu^2. \quad (7b)$$

Równanie (7a) posiada rozwiązanie

$$X = \exp\left(-\frac{\mu^2}{\text{Pr k}} x^+\right). \quad (8)$$

Rozwiązanie ogólne równania (7b) jest następujące:

$$Y = C_1 \sin \mu y^+ + C_2 \cos \mu y^+. \quad (9a)$$

Ze względu na warunek brzegowy (c) musi być  $C_1 = 0$ , więc

$$Y = C_2 \cos \mu y^+. \quad (9b)$$

Spełnienie warunku brzegowego (b) prowadzi do wartości własnych

$$\underline{\mu = (2n + 1) \frac{\pi}{2}}. \quad (10)$$

Uwzględnivszy równości (5), (8), (9b) i (10) otrzymuje się rozwiązanie szczególne równania (4) w formie

$$T^+ = 1 - C_2 \exp \left( - \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4kPr} x^+ \right) \cos(2n+1) \frac{\pi}{2} y^+. \quad (11)$$

Rozwiązania ogólnego należy poszukiwać w postaci sumy następującego szeregu:

$$T^+ = 1 - \sum_{n=0}^{\infty} A_{(2n+1)} \exp \left[ - \frac{(2n+1)^2 \pi^2}{4kPr} x^+ \right] \cos(2n+1) \frac{\pi}{2} y^+. \quad (12)$$

Zbieżność szeregu (12) może być udowodniona pod warunkiem odpowiedniego doboru współczynników  $A_{(2n+1)}$ . Należy tak dobrać współczynniki, aby warunek początkowy (a) był spełniony. To prowadzi do związku następującego:

$$T^+ = 0, \quad \text{gdy} \quad x^+ = 0,$$

tzn. musi być

$$\sum_{n=0}^{\infty} A_{(2n+1)} \cos(2n+1) \frac{\pi}{2} y^+ = 1. \quad (13)$$

Zależność (13) będzie spełniona, jeśli współczynniki  $A_{(2n+1)}$  będą współczynnikami szeregu Fouriera

$$A_1 \cos \frac{\pi}{2} y^+ + A_3 \cos \frac{3\pi}{2} y^+ + A_5 \cos \frac{5\pi}{2} y^+ + \dots +$$

Są więc one określone następująco:

$$A_{(2n+1)} = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} f(y^+) \cos(2n+1) \frac{\pi}{2} y^+ dy^+.$$

Biorąc pod uwagę prawą stronę równania (13) mamy  $f(y^+) = 1$ , czyli

$$\begin{aligned} A_{(2n+1)} &= \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} \cos(2n+1) \frac{\pi}{2} y^+ dy^+ = \\ &= \frac{1}{\pi(2n+1)} \sin(2n+1) \frac{\pi}{2} y^+ \Big|_{-1}^{+1} = \frac{1}{\pi(2n+1)} (-1)^n, \end{aligned}$$

więc:

$$A_1 = \frac{1}{\pi}, \quad A_3 = -\frac{1}{3\pi}, \quad A_5 = \frac{1}{5\pi}, \quad A_7 = -\frac{1}{7\pi} \dots$$

Obecnie można już podać rozkład temperatury bezwymiarowej w rozważanym modelu

$$\begin{aligned} T^+ = 1 - \frac{1}{\pi} \left[ \exp\left(-\frac{\pi^2}{4 k Pr} x^+\right) \cos \frac{\pi}{2} y^+ - \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{9\pi^2}{4 k Pr} x^+\right) \cos \frac{3\pi}{2} y^+ + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \exp\left(-\frac{25\pi^2}{4 k Pr} x^+\right) \cos \frac{5\pi}{2} y^+ - \dots + \right]. \end{aligned} \quad (14a)$$

Dla temperatury wyrażonej w stopniach zależność (14a) przekształca się w:

$$\begin{aligned} T = T_W - \frac{T_W - T_\infty}{\pi} \left[ \exp\left(-\frac{\pi^2}{4 l k Gr^+ Pr} x\right) \frac{\pi}{s} y - \right. \\ \left. - \frac{1}{3} \exp\left(-\frac{9\pi^2}{4 l k Gr^+ Pr} x\right) \cos \frac{3\pi}{s} y + \right. \\ \left. + \frac{1}{5} \exp\left(-\frac{25\pi^2}{4 l k Gr^+ Pr} x\right) \cos \frac{5\pi}{s} y - \dots + \right]. \end{aligned} \quad (14b)$$

Szereg przemienny (14b), ze względu na rosnące wykładniki potęg przy funkcji eksponencjalnej, jest szeregiem szybko-  
zbieżnym.

Mając wyznaczone pole temperatur, można obecnie przystąpić do bardziej ogólnego opisu wymiany ciepła w rozważanej geometrii.

Ilość ciepła odprowadzona przez czynnik z płyty izotermicznej o jednostkowej długości wynosi

$$Q = \lambda \int_0^1 \left( \frac{\partial T}{\partial y} \right)_{y=\frac{s}{2}} \cdot 1 \, dx, \quad (15)$$

gdzie:  $\lambda$  - przewodność cieplna czynnika.

Po zróżniczkowaniu szeregu (14b) i przeprowadzeniu operacji całkowania, zgodnie z (15), otrzymuje się

$$Q = \lambda \frac{T_w - T_\infty}{s} \frac{4 l k Gr^+ Pr}{\pi^2} \left\{ 1 - \exp \left( - \frac{\pi^2}{4 k Gr^+ Pr} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{9} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{9 \pi^2}{4 k Gr^+ Pr} \right) \right] + \frac{1}{25} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{25 \pi^2}{4 k Gr^+ Pr} \right) \right] + \dots + \right\}. \quad (16)$$

Z drugiej strony ilość pobranego ciepła można zdefiniować, wprowadzając pojęcie współczynnika przejmowania ciepła

$$Q \underline{df} \propto (T_w - T_\infty) \cdot l \cdot l. \quad (17)$$

Liczba Nusselta posiada jako wymiar charakterystyczny szerokość kanału

$$Nu = \frac{\alpha s}{\lambda}. \quad (18)$$

Z porównania zależności (16) i (17) przy uwzględnieniu (18) otrzymuje się

$$Nu = \frac{4 k}{\pi^2} Gr^+ Pr \left\{ 1 - \exp \left( - \frac{\pi^2}{4 k Gr^+ Pr} \right) + \frac{1}{9} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{9 \pi^2}{4 k Gr^+ Pr} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} \left[ 1 - \exp \left( - \frac{25 \pi^2}{4 k Gr^+ Pr} \right) \right] + \dots + \right\}. \quad (19)$$

Wielkość wprowadzonej stałej  $k$  można wyznaczyć z warunku stosowalności równania (19) w przypadku gdy  $Gr^+ \rightarrow 0$ , wówczas

$$Nu = \frac{1}{24} Gr^+ Pr, \quad *)$$

więc

$$\frac{4 k}{\pi^2} = \frac{1}{24} \frac{8}{\pi^2}, \quad **)$$

\*) Wyprowadzenie tej zależności podano w uzupełnieniu na str. 11.

\*\*) Według rozwinięcia w szereg Fouriera:

$$1 = \frac{8}{\pi^2} \left[ 1 + 1/9 + 1/25 + 1/49 + \dots + 1/(2v+1)^2 + \dots \right], \quad v = 0, 1, 2, 3, \dots$$



stąd

$$4 k = \frac{1}{3}. \quad (20)$$

Podstawiając wynik (20) do równania (19) otrzymuje się ostatecznie poszukiwany wzór opisujący wymianę ciepła drogą swobodnej konwekcji w przestrzeni między równoległymi, izotermicznymi płytami

$$\begin{aligned} Nu = \frac{1}{3 \pi^2} Gr^+ Pr \left\{ 1 - \exp \left( - \frac{3 \pi^2}{Gr^+ Pr} \right) + \frac{1}{9} \left[ 1 - \exp \left( - 9 \frac{3 \pi^2}{Gr^+ Pr} \right) \right] + \right. \\ \left. + \frac{1}{25} \left[ 1 - \exp \left( - 25 \frac{3 \pi^2}{Gr^+ Pr} \right) \right] + \dots + \right\}. \quad (21) \end{aligned}$$

### 3. Zakończenie

Cel niniejszej pracy, postawiony na wstępie, został w poprzednim rozdziale osiągnięty. Uzyskano opis pełnego pola temperatur (14b). Daje on możliwość określenia lokalnych współczynników przejmowania ciepła w dowolnym miejscu ścianki ograniczającej kanał. Jednocześnie wykorzystanie wzoru (14b) pozwoliło na uzyskanie ogólnej zależności (21) opisującej wymianę ciepła w rozważanych warunkach.

Dokonane na rys.2 porównanie prowadzi do wniosku, że rozbieżności między uzyskanymi wynikami, a wynikami prac Elenbaasa oraz Bodoia i Osterlego nie przekraczają 10%, gdy wartość parametru  $GrPr \cdot s/l \leq 200$ . Warto jednakże nadmienić, że ze względu na warunek optimum wymiany ciepła przy projektowaniu długich żeber [1,3], jest zawsze godny polecenia przedział zmienności grupy  $GrPr \cdot s/l$  w granicach od 40 do 70.

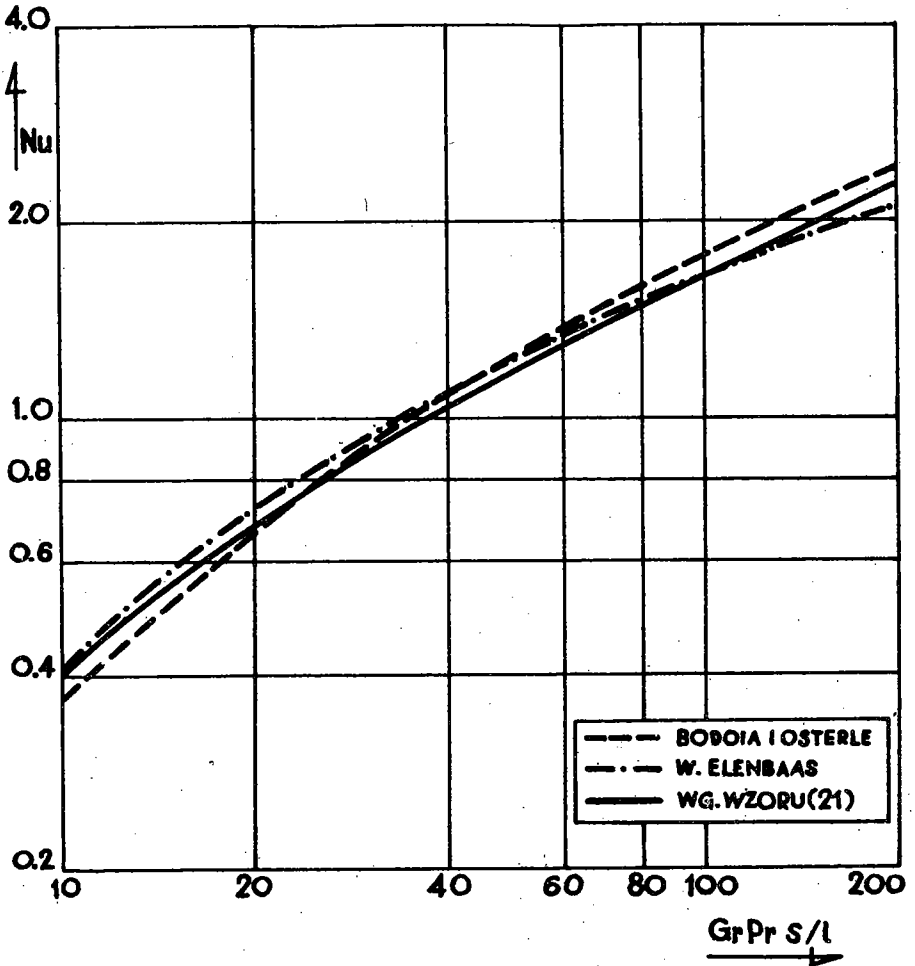
Z przedstawionej pracy można wyciągnąć jeszcze jeden interesujący wniosek. Okazuje się, że wymianę ciepła przy swobodnej konwekcji w rozpatrywanym modelu można zastąpić, przy zachowaniu znacznej dokładności, poprzez jednowymiarowe nieustalone przewodzenie ciepła o odpowiednio przyjętej skali czasowej.

Jeśli przyjmie się

$$\tau^+ = \frac{x^+}{Pr k} + C, \quad (22)$$

wtedy

$$\frac{\partial \Pi^+}{\partial x^+} = \frac{\partial \Pi^+}{\partial \tau^+} \frac{\partial \tau^+}{\partial x^+} = \frac{1}{Pr k} \frac{\partial \Pi^+}{\partial \tau^+}. \quad (23)$$



Rys.2. Porównanie graficzne zależności z wynikami innych autorów

Wprowadzając powyższe do uproszczonego równania energii (4) otrzymuje się

$$\frac{\partial T^+}{\partial \tau^+} = \frac{\partial^2 T^+}{\partial y^{+2}} \quad (24)$$

Równość (24) wraz z warunkami początkowym i brzegowymi:

$$\text{gdy } \tau^+ = 0 \quad \text{to } T^+ = 0,$$

$$\text{gdy } y^+ = \pm 1 \quad \text{to } T^+ = 1,$$

$$\text{gdy } y^+ = 0 \quad \text{to } \frac{\partial T^+}{\partial y^+} = 0,$$

stanowi opis matematyczny procesu nagrzewania się cienkiego pręta izolowanego bocznie, gdy temperatura pręta w chwili początkowej  $\tau^+ = 0$  jest zerowa, natomiast dla czasu  $\tau^+ > 0$  końce pręta są utrzymywane w temperaturze  $T^+ = 1$ .

#### 4. Bibliografia

1. Elenbaas W.: Heat Dissipation of Parallel Plates by Free Convection. Physica, Holland vol. 9 No 1. 1942.
2. Bodoia J.R., Osterle J.F.: The Development of Free Convection Between Heated Vertical Plates. Trans. ASME Journal of Heat Transfer. July 1961 pp. 1 ÷ 4.
3. Kłopotcki A.: Analiza wymiany ciepła drogą swobodnej konwekcji w układzie równoległych płyt izotermicznych. Biuletyn Informacyjny Instytutu Techniki Ciepłej nr 4 kwiecień 1966 str.12.

#### 5. Uzupełnienie

Określenie zależności, według której przebiega wymiana ciepła w układzie płyt równoległych, w przypadku gdy konwekcja jest w pełni rozwinięta

Gdy wysokość kanału  $L \rightarrow \infty$ , co oznacza, że  $Gr^+ \rightarrow 0$ , wtedy konwekcja jest w pełni rozwinięta i nie obserwuje się

żadnych zmian w kierunku osi  $x$ . Wszystkie różniczki względem  $x$  występujące w równaniach konwekcji swobodnej znikają, a  $T^+ = 1$ . Równanie ruchu jest w takich warunkach spełnione przez paraboliczny profil prędkości

$$u^+ = \frac{1}{2} (1 - y^{+2}). \quad (1)$$

Bilansując ciepło czynnika na szczycie kanału można napisać

$$Q = \rho C_p \int_0^{s/2} u (T - T_\infty) dy. \quad (2)$$

Po wprowadzeniu pod znak całki wielkości bezwymiarowych mamy:

$$Q^+ = \frac{8 Q s}{\rho C_p (T_w - T_\infty) \nu l Gr^+} = \int_0^1 u^+ T^+ dy^+, \quad (3)$$

$$\alpha = \frac{Q}{l(T_w - T_\infty)}, \quad (4)$$

$$Nu = \frac{\alpha s}{\lambda}. \quad (5)$$

Wstawiając (3) i (4) do zależności (5), po prostych przekształceniach otrzymuje się

$$Nu = \frac{1}{8} Q^+ Gr^+ Pr.$$

Dla przypadku konwekcji w pełni rozwiniętej,  $Q^+$  można określić wprost z całki (3), ponieważ  $T^+ = 1$ , a  $u^+ = \frac{1}{2} (1 - y^{+2})$

$$Q^+ = \frac{1}{2} \int_0^1 (1 - y^{+2}) dy^+ = \frac{1}{2} (y^+ - \frac{1}{3} y^{+3}) \Big|_0^1 = \frac{1}{3}.$$

Zatem

$$Nu = \frac{1}{3} \frac{1}{8} Gr^+ Pr = \underline{\underline{\frac{1}{24} Gr^+ Pr}}.$$

Теоретический анализ свободной конвекции в пространстве  
между параллельными, изотермическими плитками

К р а т к о е   с о д е р ж а н и е

Проинтегрировано уравнение энергии, расписанное для параллельных, изотермических плиток. Получилась общая зависимость изображающая теплообмен.

Разногласие между результатами полученными автором и результатами Эленбааса, а также Бодоя и Остерле не превышает 10%, при параметрах  $GrPr \cdot s/l \leq 200$ .

При этом получилось, что конвекционный теплообмен в рассматриваемой модели может быть подменен процессом нестационарной теплопроводности тонкого изолированного сбоку стержня.

Theoretical analysis of free convection  
between parallel, isothermal plates

Summary

The energy equation for free convection flow between parallel, isothermal plates was integrated and general relationship describing heat transfer was found.

The discrepancies between the author's results and the earlier results of Elenbaas and Bodoia and Osterle do not exceed 10% for  $GrPr \cdot s/l \leq 200$ .

It was found that free convection heat transfer in the investigated conditions can be replaced with a non-steady heat conduction-process in a thin rod with isolated side surfaces.