

Bogumił Staniszcwski

Instytut Techniki Ciepłej Politechniki Warszawskiej

Jerzy Suski

Instytut Lotnictwa

ZASTOSOWANIE METODY „EXODUS” DO ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIEŃ PRZEWODZENIA CIEPŁA

W pracy przedstawiono podstawy metody "Exodus" oraz przykłady jej zastosowania do rozwiązania zagadnień przewodzenia ciepła. Rozważono modelowanie ruchu cząstek zgodnie z różnymi postaciami różnicowymi równania przewodnictwa oraz przeanalizowano różne rodzaje warunków brzegowych. Podano przykłady rozwiązania nieustalonego przewodzenia w walcu kołowym z warunkiem brzegowym trzeciego rodzaju oraz dwuwymiarowego przewodzenia ciepła w kwadracie z warunkami brzegowymi trzech rodzajów.

WYKAZ OZNACZEŃ

- a - dyfuzyjność cieplna,
- i - punkty startowe cząstek,
- N - liczba cząstek,
- p - udziały cząstek,
- q - strumień cieplny,
- r - współrzędna przestrzenna w układzie walcowym,
- R - promień walca,
- t - współrzędna czasowa,
- T - temperatura,
- x, y, z - współrzędne przestrzenne w układzie prostokątnym,
- α - współczynnik przejmowania ciepła,

- Δn - krok przestrzenny w układzie prostokątnym,
 Δr - krok przestrzenny w układzie walcowym,
 Δt - krok czasowy,
 λ - przewodność cieplna.

Indeksy

- b - brzegowa,
f - płynu,
i - początkowa,
j - w j-tym błędzeniu,
śr - średnia

1. WSTĘP

Metoda "Exodus" stanowi modyfikację i rozwinięcie metody probabilistycznej opartej na koncepcji błędzenia przypadkowego, zwanej często metodą Monte Carlo. Ta ostatnia wymaga posługiwania się liczbami losowymi, co stwarza pewne niedogodności i może być źródłem dodatkowych błędów.

Istotą metody "Exodus" zaproponowanej przez Emery'ego i Carsons [1] jest zastąpienie ruchów błędzących cząstek, kolejno wychodzących z danego punktu (w przypadku poszukiwania rozkładu temperatur jest to punkt, którego temperaturę należy znaleźć), przez wysłanie z tego punktu jednocześnie dużej liczby cząstek. Udziały cząstek wysyłanych do sąsiednich punktów są zgodne z prawdopodobieństwem, wynikającym z warunków wymiany ciepła.

Ponieważ udziały cząstek rozchodzących się do punktów sąsiednich są równe prawdopodobieństwom, to wyniki metody "Exodus" są zgodne z wynikami, które można by uzyskać przy użyciu klasycznej metody Monte-Carlo i liczbie błędzących cząstek dążących do nieskończoności, a zatem osiagają dokładność metod różnic skończonych. Ponadto w porównaniu z metodami Monte Carlo uzyskuje się oszczędność czasu liczenia.

Metoda "Exodus", podobnie zresztą jak metoda Monte Carlo, jest metodą statystyczną, w związku z czym wszystkie dowody matematyczne dotyczące metody Monte Carlo pozostają słuszne dla metody "Exodus".

W pracy [2] wykazano możliwość zastosowania metody "Exodus" do rozwiązywania niestabilnych problemów przewodzenia ciepła, przy czym rozważono różne schematy różnicowe, a mianowicie: schematy jawne, uwikłane i kierunków naprzemiennych. Procedura "Exodus" pozwala także na rozwiązywanie równania typu hiperbolicznego, może ona być również stosowana przy użyciu innych siatek niż prostokątna (np. można wprowadzić siatki trójkątne), co ułatwia rozpatrywanie ciał o złożonych kształtach.

Wadą metody "Exodus", podobnie zresztą jak i metody Monte Carlo, jest przede wszystkim dłuższy czas liczenia rozkładu temperatury w porównaniu z metodą różnic skończonych, natomiast jej zaletą (zresztą charakterystyczną dla metod probabilistycznych) jest możliwość obliczenia wartości temperatury w pewnym wybranym punkcie ciała, bez konieczności znalezienia całego pola temperatury w rozważanym układzie. Dodatkowo warto nadmienić, że procedura "Exodus" jest bardziej ekonomiczna pod względem potrzebnego czasu obliczeń, niż procedury probabilistyczne oparte na stosowaniu liczb losowych. Wreszcie wszystkie modyfikacje metod Monte Carlo, pozwalające na przyspieszenie obliczeń i zwiększenie ich dokładności [9], [14], [15] mają zastosowanie w metodach "Exodus".

Celem niniejszej pracy jest omówienie zasad rozwiązywania zagadnień ustalonego i niestalonego przewodzenia ciepła za pomocą metody "Exodus" i zilustrowanie jej praktycznego zastosowania na kilku przykładach.

2. PODSTAWY METODY „EXODUS”

Ponieważ, jak to stwierdzono poprzednio, metoda "Exodus" jest metodą statystyczną, rozwiązanie zagadnienia poszukiwania

wartości temperatury w określonym punkcie można przedstawić w postaci wzoru

$$T(x, y, z, t) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N T_j \quad (1)$$

W tym wzorze $T(x, y, z, t)$ stanowi poszukiwaną temperaturę w chwili t w punkcie o współrzędnych (x, y, z) , zaś N jest liczbą błędzeń, która w metodzie Exodus jest mało istotna, gdyż metoda ta jest granicznym przypadkiem metody Monte Carlo przy $N \rightarrow \infty$. T_j stanowi ogólnie biorąc znaną temperaturę punktu, do którego dociera błądząca cząstka, przy czym w szczególności może to być:

- a) temperatura punktu na brzegu obszaru, gdy warunek brzegowy sformułowany jest w postaci znanej wartości temperatury brzegu obszaru (warunek brzegowy pierwszego rodzaju),
- b) temperatura płynu omywającego rozpatrywany obszar (warunek brzegowy trzeciego rodzaju),
- c) temperatura promieniowania gazów lub płomienia,
- d) temperatura dowolnego punktu wewnętrznego, znana z poprzedniej serii ruchów cząstek błądzących,
- e) temperatura zastępcza wynikająca ze znanej wartości strumienia ciepła na brzegu obszaru (warunek brzegowy drugiego rodzaju) lub ze znanej wielkości działającego wewnętrznego źródła ciepła.

Wyrażenie na T w zależności (1) ma postać wzoru ze średnią arytmetyczną. W rzeczywistości jest to średnia ważona, gdyż w zależności od prawdopodobieństwa wykonywania ruchów błądzących pewne punkty będą osiągnane przez błądzące cząstki częściej niż inne punkty. Dzięki temu temperatury punktów częściej osiągnanych będą miały większą wagę statystyczną niż temperatury punktów osiągnanych rzadziej.

Realizacja modelowania błądzenia cząstek wymaga wprowadzenia do rozważanego obszaru sieci odcinków figur lub brył. W przypadku przewodzenia jednowymiarowego są to odcinki współrzędnej x lub r . Dla przypadków dwuwymiarowych może to być sieć kwadratów, zaś w przypadku trójwymiarowym sieć sześciąt. Jeśli kształt analizowanego ciała jest nieregularny, względnie

jeśli strumień cieplny na granicy ciała wykazuje znaczne zróżnicowanie, warto stosować elementy o zróżnicowanych wymiarach. W pracy [1] rozważono możliwość wprowadzenia sieci trójkątów równobocznych. Wykorzystując tę sugestię wyznaczono temperatury wewnątrz tłoka przy znanych temperaturach na brzegu, posługując się siecią trójkątów nieregularnych. Wyniki obliczeń, których nie przytacza się w niniejszej pracy wykazały wystarczającą z punktu widzenia inżynierskiego dokładność. Odpowiednikami trójkątów w przestrzeni trójwymiarowej mogą być czworocściany.

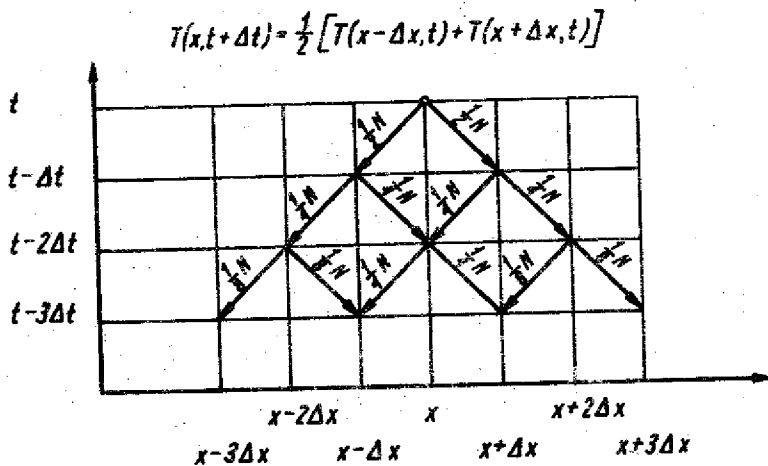
Podobnie można wykorzystać w procedurze "Exodus" metodę maksymalnego kroku przestrzennego, której pomysł podał Muller [8], zaś rozwinęli i zastosowali do rozwiązania zagadnień przewodzenia ciepła Haji-Sheikh i Sparrow [9]. Metoda ta, której źródło autorzy pracy [9] upatrują również w książce Felle-ra [10], została przez nich wykorzystana przy stosowaniu normalnej procedury Monte Carlo, opartej na liczbach losowych.

Wzór (1) wymaga jeszcze pewnego omówienia ze względu na realizację serii ruchów cząstek. Przede wszystkim należy więc zauważyć, że czas t występujący w wyrażeniu (1) nie musi być zgodny z pojęciem czasu związanym z intuicyjno-fizyczną interpretacją procesu rozchodzenia się błądzących cząstek w przestrzeni. Przy przewodzeniu ustalonym, temperatury w poszczególnych punktach przestrzeni są niezmiennie w czasie i wielkość T z lewej strony równania (1) jest jedynie funkcją współrzędnych przestrzennych; jakkolwiek sam proces przewodzenia może być modelowany za pomocą ruchów cząstek, zmieniających w czasie w sposób przypadkowy swoje położenie w przestrzeni.

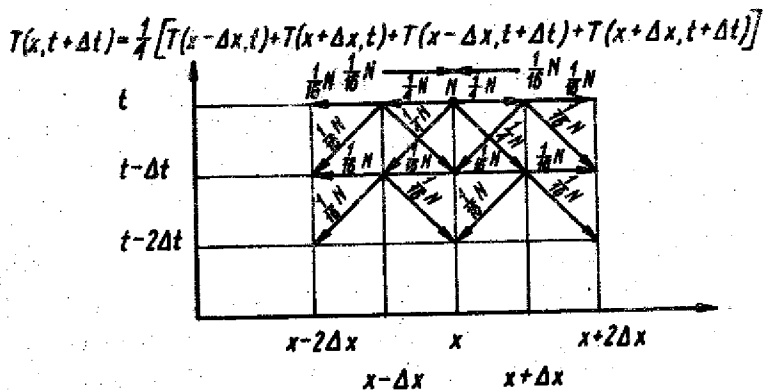
Jak wynika z zależności opisujących przewodzenie nieustalone [14], odpowiadają one procesowi błądzenia przypadkowego cząstek, przebiegającemu w przeciwnym kierunku przepływu czasu, to znaczy tak jakby cząstki cofały się w czasie, a więc odwrotnie do rzeczywistych zjawisk fizycznych ruchu cząstek materialnych.

3. MODELOWANIE RUCHU CZĄSTEK WEDŁUG RÓŻNYCH POSTACI RÓZNICOWYCH RÓWNAŃ PRZEWODZENIA CIEPŁA

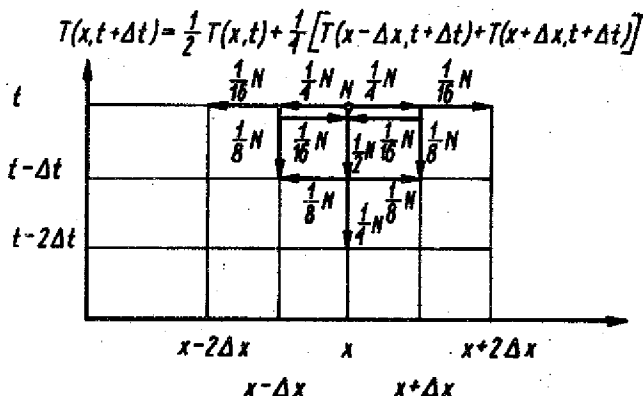
Pod pojęciem modelowania rozumie się przekształcenie równania przewodnictwa do postaci opisującej sposób ruchu cząstek według procedury "Exodus". Modelowanie to zostanie przedstawione dla różnych schematów różnicowych, zilustrowanych na rysunkach 1, 2 i 3.



Rys.1. Schemat rozchodzenia się cząstek zgodnie z równaniem różnicowym jawnym



Rys.2. Schemat rozchodzenia się cząstek zgodnie z równaniem różnicowym Cranka-Nicholsona



Rys. 3. Schemat rozchodzenia się cząstek zgodnie z równaniem różnicowym Douglasa-Rachforda

Najprostszym równaniem jest równanie Laplace'a dla przypadku jednowymiarowego, które dla ciała o stałej wartości przewodności cieplnej można napisać w postaci różnicowej

$$T(x) = \frac{1}{2} [T(x - \Delta n) + T(x + \Delta n)] . \quad (2)$$

Oznacza to, że wartość temperatury w punkcie x jest średnią arytmetyczną z jej wartości w punktach sąsiednich o współrzędnych $x - \Delta n$ oraz $x + \Delta n$. Według metody "Exodus" równanie (2) oznacza, że z N cząstek znajdujących się w punkcie x , $\frac{1}{2} N$ przejdzie do punktu $x - \Delta n$ i $\frac{1}{2} N$ przejdzie do punktu $x + \Delta n$. Następnie cząstki wykonują dalsze ruchy rozchodząc się na cały rozważany obszar, zgodnie z obliczonymi udziałami i proces błędzenia kończy się w momencie, gdy określona bardzo duża ich część (np. 99,999%) zostanie pochłonięta przez brzeg.

W stanie nieustalonym można stosować różne schematy różnicowe, przy czym najczęściej korzysta się z metody różnicowej w przód. Wówczas równanie jednowymiarowe przewodnictwa nieustalonego, dla stałych parametrów ciała, po wprowadzeniu warunku zbieżności rozwiązania $\Delta t = \left(\frac{\Delta n}{2a}\right)^2$, ma postać następującą

$$T(x, t) = \frac{1}{2} [T(x - \Delta n, t - \Delta t) + T(x + \Delta n, t - \Delta t)] . \quad (3)$$

Oznacza to, że temperatura w punkcie x i w momencie t jest średnią arytmetyczną z temperatur w punktach $x - \Delta n$ oraz $x + \Delta n$ w chwili poprzedniej $t - \Delta t$.

Według metody "Exodus" równanie to oznacza, że z punktu (x, t) połowa cząstek przechodzi do $(x - \Delta n, t - \Delta t)$, zaś druga połowa do $(x + \Delta n, t - \Delta t)$, co przedstawiono na rysunku 1.

W metodzie Cranka-Nicolsona zakłada się, że gradient temperatury w czasie jest proporcjonalny co różnicy gradientów temperatury w przestrzeni w chwili środkowej przedziału czasowego Δt , co dla przypadku jednowymiarowego zapisuje się w postaci

$$T(t_{\text{śr}}) = \frac{T(t) + t(t - \Delta t)}{2}$$

Przyjmując, że $\Delta t = \frac{(\Delta n)^2}{a}$ otrzymuje się

$$T(x, t) = \frac{1}{4} [T(x - \Delta n, t - \Delta t) + T(x + \Delta n, t - \Delta t) + T(x - \Delta n, t) + T(x + \Delta n, t)]. \quad (4)$$

Schemat ruchów cząstek według metody "Exodus" odpowiadający temu równaniu przedstawiony jest na rysunku 2.

Zalety równania (4) w porównaniu z równaniem (3) opisano w pracach [3] i [11]. Dla uzyskania rozwiązania równania (4) stosuje się metodę nadrelaksacji oraz specjalną procedurę do rozwiązywania układu z trójdziagonalną macierzą.

Rozwiązanie metodą "Exodus" polega na modelowaniu ruchu cząstek zgodnie z równaniem (4) i następnie wykorzystaniu wzoru (1).

Ta procedura różni się od opartej na równaniu (3) wykonywaniem kroków przestrzennych bez kroków czasowych oraz dwukrotnie dłuższym krokiem czasowym związanym z krokiem przestrzennym.

Przy założeniu, że gradient temperatury w czasie jest proporcjonalny do różnicy przestrzennych gradientów temperatury w chwili końcowej przedziału czasowego Δt oraz po wprowadzeniu warunku

$$\Delta t = \frac{(\Delta n)^2}{2a}$$

otrzymuje się uwikłane równanie Douglasa-Rachforda [12]

$$T(x, t) = \frac{1}{2} T(x, t - \Delta t) + \frac{1}{4} [T(x - \Delta n, t) + T(x + \Delta n, t)]. \quad (5)$$

Schemat modelowania równania (5) według metody "Exodus" przedstawiono na rysunku 3.

Charakterystyka rozwiązania numerycznego równania (5) przedstawiona jest w pracach [3] i [12]. W metodzie "Exodus" opartej na równaniu (5) występuje podział cząstek na poruszające się w czasie lub przestrzeni.

4. WARUNKI BRZEGOWE

Z literatury opisującej rozwiązanie równania przewodnictwa metodami probabilistycznymi wiadomo, że w przypadku warunku brzegowego pierwszego rodzaju, tzn. gdy znana jest temperatura na brzegu obszaru, cząstki są przez ten brzeg pochłaniane, zaś maszyna cyfrowa pamięta ich liczbę i czas dojścia do brzegu.

Przy warunku brzegowym drugiego rodzaju, tzn. gdy dana jest wartość strumienia cieplnego na brzegu, może on być zapisany następująco

$$q = -\lambda \frac{\partial T}{\partial n}$$

lub w postaci różnicowej

$$T_b = T(\Delta n) + q \frac{\Delta n}{\lambda}. \quad (6)$$

Zgodnie z interpretacją wynikającą z błędzenia przypadkowego równanie (6) oznacza, że wszystkie cząstki, które docierają do brzegu są odbijane na odległość Δn i maszyna cyfrowa wprowadza do pamięci iloczyn liczby cząstek przez wartość tem-

peratury zastępczej $q \Delta n / \lambda$ [14]. Ze względu na to, że przy dyskretyzacji przestrzennej linia brzegowa przestaje być nieskończenie cienką, Rozewicz [15] układał bilans cieplny traktując brzeg jako obszar o szerokości $\Delta n / 2$, co powoduje występowanie rozpliwów brzegowych.

Weryfikacja numeryczna wykazała, że uwzględnienie rozpliwów brzegowych daje większą dokładność wyników, jakkolwiek nieco komplikuje obliczenia.

Warunek brzegowy trzeciego rodzaju opisany jest zależnością

$$-\lambda \frac{\partial T}{\partial n} = \alpha (T_f - T_b),$$

albo w postaci różnicowej

$$T_b = \frac{1}{1 + \frac{\alpha \Delta n}{\lambda}} T(\Delta n) + \frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\alpha \Delta n}} T_f. \quad (7)$$

Zgodnie z interpretacją metody "Exodus" zależność (7) oznacza, że spośród wszystkich cząstek, które docierają do brzegu, część $\frac{1}{1 + \frac{\lambda}{\alpha \Delta n}}$ zostaje odbita, zaś część

$\frac{1}{1 + \frac{\alpha \Delta n}{\lambda}}$ zostaje pochłonięta, przy czym maszyna cyfrowa zachowuje w pamięci iloczyn liczby cząstek wyeliminowanych z ruchu przez wartość temperatury T_f . Podobnie jak poprzednio można uwzględnić rozpliw brzegowe [15], co również podnosi dokładność obliczeń. W pracy [1] zauważono, że warunek brzegowy pierwszego rodzaju jest szczególnym przypadkiem warunku rodzaju trzeciego. Istotnie po podstawieniu w równaniu (7) $\alpha \rightarrow \infty$, otrzymuje się

$$T_b \rightarrow T_f.$$

Uogólniony warunek brzegowy, obejmujący warunki brzegowe wszystkich trzech rodzajów, podano w pracy [2].

5. PRZYKŁADY ZASTOSOWAŃ

Celem wykazania użyteczności opisanej metody i jej weryfikacji przedstawiono 2 przykłady obliczeniowe, dla których znane są rozwiązania analityczne.

5.1. JEDNOWYMIAROWE, NIEUSTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA W WALCU NIESKOŃCZONYM Z WARUNKIEM BRZEGOWYM TRZECIEGO RODZAJU

Poszukuje się rozkładu temperatury w walcu o stałej wartości przewodności cieplnej λ , przy znanej wartości współczynnika przejmowania ciepła α oraz temperaturze płynu otaczającego ten walec T_F .

Do rozwiązania zagadnienia wykorzystano schemat różnicowy w postaci jawnej, który prowadzi do zależności

$$\frac{T(r, t - \Delta t) - T(r, t)}{\Delta t} = \frac{\alpha}{\Delta r} \left[\left(1 + \frac{\Delta r}{2r}\right) \frac{T(r, t - \Delta t) - T(r + \Delta r, t - \Delta t)}{\Delta r} - \left(1 - \frac{\Delta r}{2r}\right) \times \frac{T(r - \Delta r, t - \Delta t) - T(r, t - \Delta t)}{\Delta r} \right].$$

Przyjmując z warunku zbieżności

$$\Delta t = \frac{(\Delta r)^2}{2\alpha}$$

i przekształcając do postaci umożliwiającej bezpośrednio modelowanie ruchu cząstek otrzymuje się

$$T(r, t) = \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{\Delta r}{2r}\right) T(r - \Delta r, t - \Delta t) + \left(1 + \frac{\Delta r}{2r}\right) T(r + \Delta r, t - \Delta t) \right].$$

Ze wszystkich cząstek, które docierają do punktu brzegowego ib, część ich określona zależnością

$$pe(ib) = \frac{1}{1 + \frac{\alpha}{\left(\frac{1}{\Delta r} - \frac{1}{2r_1}\right)}}$$

zostaje wyeliminowana z dalszego ruchu i jest sumowana jako wielkość N_b , zaś część określona zależnością

$$pr(ib) = 1 - pe(ib)$$

przechodzi do punktu opisanego współrzędną $it - 1$.

Położenie punktów przestrzennych walca opisano wzorem

$$r(i) = (2i - 1) \frac{\Delta r}{2}.$$

Temperatura w rozważanym punkcie (i, t) wynosi więc

$$T(i, t) = \frac{(N_b T_f + N_i T_i)}{(N_i + N_b)},$$

gdzie:

- N_b - liczba cząstek eliminowana na brzegu przestrzennym,
- T_f - temperatura płynu omywającego walec,
- N_i - liczba cząstek eliminowana przez brzeg czasowy,
- T_i - temperatura początkowa.

Procedurę powyższą opisaną programem PW-5 [2] wykorzystano do obliczeń na maszynie CDC-160 dla następujących danych:

- | | |
|---|---|
| - temperatura początkowa walca | $T_i = 35^\circ\text{C}$ |
| - temperatura płynu omywającego | $T_f = 0^\circ\text{C}$ |
| - współczynnik przejmowania ciepła | $\alpha = 15 \text{ W/m}^2\text{K}$ |
| - dyfuzyjność cieplna | $a = 1,22 \cdot 10^{-7} \text{ m}^2/\text{s}$ |
| - przewodność cieplna | $\lambda = 0,48 \text{ W/mK}$ |
| - promień walca | $R = 0,1947 \text{ m}$ |
| - założona długość kroku przestrzennego | $\Delta r = 3,54 \cdot 10^{-2} \text{ m}$ |
| - położenie startowe cząstek | $i_o = 3,4,5$ |
| - położenie punktu brzegowego | $i_b = 6$ |

Wyniki obliczeń metodą "Exodus" i analityczną podano w tablicy 1.

Tablica 1

Wyniki obliczeń zestawiono w poniższej tabelicy

i_0	t [s]	Exodus	Analityczna	
		T [K]	T [K]	błąd względny [%]
3	20560	31,34	31,19	- 0,48
	30840	27,58	27,54	- 0,15
	41120	24,11	24,11	0,00
	51400	21,01	21,04	0,14
	61680	18,29	18,33	0,22
4	15420	28,90	29,18	0,96
	25100	24,26	24,45	0,78
	35980	20,69	20,79	0,48
	46260	17,81	17,85	0,22
	56540	15,40	15,42	0,13
66820	13,35	13,36	0,07	
5	10280	24,33	25,18	3,37
	20560	18,94	19,22	1,46
	30840	15,23	15,61	2,43
	41120	13,09	13,08	- 0,08
	51400	11,20	11,15	- 0,45
	61680	9,65	9,59	- 0,63

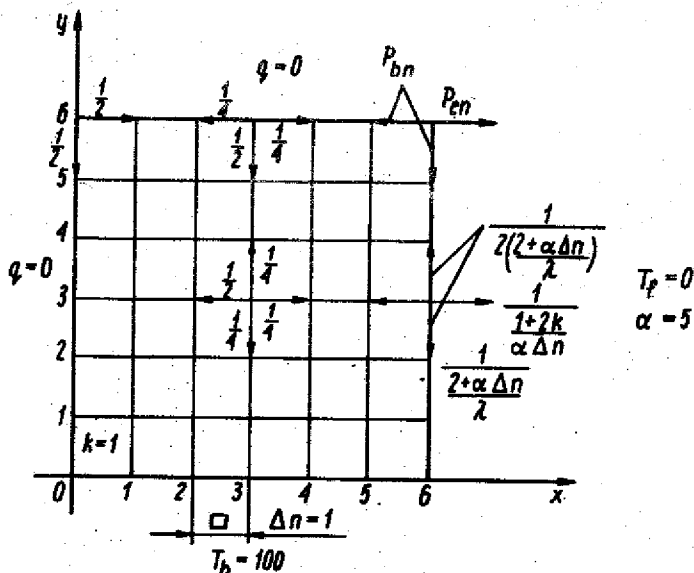
Czas obliczeń temperatury w jednym punkcie za pomocą:
 metody "Exodus" 3,6 s
 metody analitycznej 26 s

5.2. DWUWYMIAROWE USTALONE PRZEWODZENIE CIEPŁA W KWADRACIE Z WARUNKAMI BRZEGOWYMI TRZECH RODZAJÓW

Poszukiwany jest rozkład temperatury wewnątrz kwadratu o wymiarach 6×6 , który jest omywany przez płyn. Przewodność cieplna ciała wynosi $\lambda = 1$; na jego boku opisanym zależnością $y = 0$; $0 \leq x \leq 6$ panuje stała temperatura $T_b = 100$; boki $x = 0$; $0 \leq y \leq 6$ i $0 \leq x \leq 6$; $y = 6$ są izolowane, tzn. $q = 0$, zaś bok $x = 6$; $0 \leq y \leq 6$ jest omywany przez płyn o temperaturze $T_f = 0$. Współczynnik przejmowania ciepła $\alpha = 5$.

Rozpatrywany obszar został podzielony na elementarne kwadraty o wymiarach 1×1 . Przy takiej siatce udział cząstek rozchodzących się z dowolnego punktu wewnętrznego do każdego z czterech punktów sąsiednich jest jednakowy i wynosi $1/4$. W punktach brzegowych, w których $q = 0$, udziały cząstek rozchodzących się wzdłuż brzegu wynoszą po $1/4$, zaś udział cząstek przechodzących do wnętrza wynosi $1/2$, w narożu udziały cząstek rozchodzących się w obie strony wynoszą po $1/2$.

Na rysunku 4 przedstawiono ilustrację rozważanego układu.



Rys. 4. Model dwuwymiarowego przewodzenia ciepła z warunkami brzegowymi I, II i III rodzaju

Na brzegu omywanym przez płyn, udział cząstek eliminowanych z ruchu wynosi

$$p_e = \frac{1}{1 + \frac{2\lambda}{\alpha\Delta n}},$$

przesuwających się wzdłuż brzegu

$$p_b = \frac{1}{2\left(2 + \frac{\alpha\Delta n}{\lambda}\right)},$$

wracających do wnętrza kwadratu

$$p_w = \frac{1}{2 + \frac{\alpha\Delta n}{\lambda}}.$$

W narożu o współrzędnych $x = 6$, $y = 6$ udział cząstek elementarnych

$$p_{en} = \frac{1}{1 + \frac{2\lambda}{\alpha\Delta n}}$$

oraz cząstek przesuwających się wzdłuż brzegu

$$p_{on} = \frac{1}{1 + \frac{\alpha\Delta n}{\lambda}}.$$

Wzór (1) dla tego przykładu przyjmuje postać

$$T(x, y) = \frac{(N_b T_b + N_f T_f)}{(N_b + N_f)},$$

gdzie:

N_b i N_f oznaczają liczby cząstek eliminowanych przez brzeg o znanej temperaturze i brzeg omywany przez płyn.

Obliczenia kończono gdy $N_b + N_f \geq 0,99999 N$.

Otrzymane wyniki podano w zestawieniu:

Współrzędne	(4.2)	(6.2)	(6.4)	(6.6)
Analityczna	53,16	6,29	3,40	2,82
Exodus	53,32	6,44	3,38	2,81
Błąd względny %	0,30	2,38	- 0,59	- 0,35

Największy błąd względny wystąpił w punkcie (6.2) i nie przekraczał 2,4%.

Zastosowanie sieci prostokątów zamiast kwadratów prowadzi do gorszych wyników. Podobnie stwierdzono, że stosowane jedynie przesunięcia cząstek wzdłuż normalnej do brzegu, bez uwzględnienia rozptyłów brzegowych, prowadzi do wyników obarczonych większym błędem. Obliczenia wykonano na maszynie cyfrowej CDC-Cyber 72, przy czym czas obliczeń wynosił około 5 s dla jednego punktu.

Punkty osobliwe (0,0); (6,0); (6,6) nie utrudniały rozwiązania. W punktach (0,0) i (6,0) cząstki były eliminowane z ruchu i zapamiętywane w wielkości N_b , zaś w punkcie (6,6) były eliminowane przy udziale pen i przesuwane wzdłuż brzegów przy udziale pbn. Dodatkowo wykonano obliczenia traktujące brzeg $x = 6$ jako powierzchnię o znanym strumieniu ciepła, otrzymano wyniki zbliżone do tych, które uzyskano w oryginalnym układzie, lecz czas obliczeń wzrósł około 3 razy.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Emery A.F., Carson W.W.: A Modification to the Monte Carlo Method - The Exodus Method, J.Heat Transfer No. 8, 1968.
- [2] Suski J.: Rozwiązywanie zagadnień nieustalonego przewodzenia ciepła metodami statystycznymi. Praca Doktorska, Politechnika Warszawska 1973.
- [3] Beckenbach E.F. (redaktor): Tłum. z angielskiego, Nowoczesna matematyka dla inżynierów Część II, PWN, Warszawa 1968.
- [4] Hammersley J.M., Handscomb B.C.: Monte Carlo, Methods, London: Mathuen and Co. LTD, 1964.
- [5] Brown G.M.: Monte Carlo Methods, in Modern Mathematics for the Engineers, E.F. Beckenbach, editor, Mc Graw-Hill Book Co, New York 1956.

- [6] Buslenko N.P., i inni. Tłum. z rosyjskiego, Metoda Monte Carlo, PWN, Warszawa 1967.
- [7] Zieliński R.: Metody Monte Carlo, WNT, Warszawa 1970.
- [8] Muller M.E.: Some continuous Monte Carlo methods for the Dirichlet problem. Ann. Math., 27, 1956, 569-589.
- [9] Haji-Sheikh A., Sparrow E.M.: The Floating Random Walk and Its Application to Monte Carlo Solution of Heat Equation, J.Siam 14, 1966, 370.
- [10] Feller W.: Tłum. z angielskiego, Wstęp do rachunku prawdopodobieństwa, PWN, Warszawa 1966.
- [11] Crank J., Nicolson P.A.: Practical Method for Numerical Evaluation of Solution of Partial Differential Equations of Heat Conduction Type, Proc. Cambridge Philos. Soc. 43, 50-67.
- [12] Douglas J.Jr., Rachford H.H.: On the Numerical Solution of Heat Conduction Problems in Two and Three Space. Trans. of the Asme 82, 1956.
- [13] Feynman R.P. i inni: Tłum. z angielskiego, Feynmana wykłady z fizyki. Tom I. Część 2. Str. 388, PWN, Warszawa 1969.
- [14] Haji-Sheikh A., Sparrow E.M.: The Solution of Heat Conduction Problems by Probability Methods, J.Heat Transfer 89, 1967, 121.
- [15] Rozewicz J.: Zastosowanie metody Monte Carlo do zagadnień przewodzenia ciepła. Praca habilitacyjna. Zeszyt Naukowy Nr 180 Politechnika Śląska, Gliwice 1967.
- [16] Staniszewski B.: Wymiana ciepła. Podstawy teoretyczne, PWN, Warszawa 1963.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА „ЭКСОДУС“ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ

К р а т к о е с о д е р ж а н и е

В работе приводятся основы метода "ЭКСОДУС" и примеры его применения для решения вопросов теплопроводности.

Рассматривается моделирование движения частиц согласно различным конечно-разностным системам уравнения теплопроводности и анализируются различные виды краевых задач. Приводятся примеры решения задачи неустановившегося поля температур в цилиндре с крайними условиями третьего рода и стационарного поля температур в квадрате с крайними условиями трех родов.

SOLUTION OF HEAT CONDUCTION PROBLEMS BY EXODUS METHOD

S u m m a r y

The principles of Exodus method and its application to the solution of heat conduction problems have been presented. The modeling of particles motions according to several finite difference schemes have been considered and various boundary conditions have been analyzed.

As examples of the application of the method two particular problems have been solved: unsteady heat conduction in an infinite cylinder subjected to the boundary conditions of the third kind and twodimensional steady heat conduction in a square with three different kinds of boundary conditions.