

doc. dr hab. Kazimierz Brodowicz
mgr inż. Maria Głowacka
mgr inż. Mieczysław Poniewski
mgr inż. Przemysław Szopa

Instytut Techniki Ciepłej
Politechniki Warszawskiej

MODELE O PARAMETRACH SKUPIONYCH DYNAMIKI WYMIENNIKÓW CIEPŁA Z RURAMI KONCENTRYCZNYMI

WYKAZ OZNACZEŃ

$A(\omega)$ - moduł transmitancji operatorowej

$$a_1 = \frac{4\alpha_t}{\rho_{1t} c_{1t} d_1} \quad - \text{współczynnik w równaniu (7)} \quad [s^{-1}]$$

$$a_2 = \frac{4\alpha_t d_1}{\rho_{wt} c_{wt} (d_2^2 - d_1^2)} \quad - \text{współczynnik w równaniu (7)} \quad [s^{-1}]$$

$$a_3 = \frac{4\alpha_s d_2}{\rho_{wt} c_{wt} (d_2^2 - d_1^2)} \quad - \text{współczynnik w równaniu (7)} \quad [s^{-1}]$$

$$a_4 = \frac{4\alpha_s d_2}{\rho_{1s} c_{1s} (d_3^2 - d_2^2)} \quad - \text{współczynnik w równaniu (7)} \quad [s^{-1}]$$

b - wykładnik potęgi występujący przy liczbie Prandtla
w równaniu (8)

c - ciepło właściwe $[J \text{ kg}^{-1} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}]$

C - stała bezwymiarowa w równaniu (8)

C' - stała bezwymiarowa w równaniu (12)

$$[S \frac{K_m^{-(k+2)}}{W} \text{ } ^\circ\text{C}^{-1}]$$

$d_{1,2,3}$ - średnice rur wymiennika ciepła określone
na rys.1

$$[m]$$

$G(s), G(j\omega)$ - transmitancja operatorowa, transmitancja widmowa

h	- długość wymiennika	[m]
j	- jedność urojona	
k	- wykładnik potęgi przy liczbie Reynoldsa w wyrażeniu (8) oraz przy prędkości w wyrażeniu (12)	
m	- numer kolejnej sekcji wymiennika w wyrażeniu (30)	
n	- ilość sekcji wymiennika	
Nu	- liczba Nusselta	
$P_{1,2,3,4,5,6}$	- współczynniki w równaniach (19) i (20)	[s ⁻¹]
Pr	- liczba Prandtla	
Re	- liczba Reynoldsa	
s	- zmienna przekształcenia Laplace'a względem czasu	[s ⁻¹]
t	- czas	[s]
v	- zmienny w czasie składnik prędkości czynnika	[m s ⁻¹]
\bar{v}	- transformata Laplace'a prędkości v	[m s ⁻¹]
V	- prędkość czynnika	[m s ⁻¹]
X	- współrzędna osiowa	[m]
\bar{X}	- transformata Laplace'a wymuszenia harmonicznego	
\bar{Y}	- transformata Laplace'a odpowiedzi obiektu na wymuszenie harmoniczne	
α	- współczynnik przejmowania ciepła	[W m ⁻² °C ⁻¹]
θ	- temperatura czynnika	[°C]
$\bar{\theta}$	- transformata Laplace'a temperatury θ	[°C]
ρ	- gęstość	[kg m ⁻³]
φ	- przesunięcie fazowe	[rad]
ϕ	- temperatura ściany	[°C]
$\bar{\phi}$	- transformata Laplace'a temperatury ϕ	[°C]
ω	- częstotliwość kołowa	[rad s ⁻¹]
$\left(\frac{\bar{\theta}}{\bar{v}}\right)$	- oznaczenie operatora transmitancji zmiennej w czasie wielkości θ na wyjściu obiektu, na skutek zmian w czasie wielkości v na wejściu obiektu	

INDEKSY

- i - wartość wlotowa do wymiennika
- l - czynnik
- o - wartość wylotowa z wymiennika
- t - rura lub od strony rury

- s - płaszczyzna lub od strony płaszczyzna
- ss - dana wielkość w stanie ustalonym
- w - ściana

1. WSTĘP

Stale wzrastająca moc produkcyjna instalacji przemysłowych przy jednoczesnej potrzebie obniżenia kosztów eksploatacji wymaga wprowadzenia automatyzacji procesów.

Do zaprojektowania systemu automatycznej kontroli i regulacji całej nitki technologicznej niezbędne jest dysponowanie pełną informacją dotyczącą dynamiki każdego z elementów, czyli informacją o zachowaniu się tych elementów w warunkach niestabilnych.

Wymienniki ciepła stanowią istotne elementy składowe prawie każdej instalacji przemysłowej, występując pod wieloma postaciami, np. jako podgrzewacze, chłodnice, skraplacze czy też jako składowe części innych zespołów, np. wyparek, kolumn destylacyjnych itd.

Praca zawiera omówienie prostych modeli matematycznych stosowanych w opisie dynamiki rekuperatorowych wymienników ciepła z rurami koncentrycznymi. Na podstawie rozwiązania równań, wynikających z przyjętych modeli matematycznych można uzyskać związki zachodzące między zakłóceniami na wlocie do wymiennika oraz zmianami temperatury na wylocie z wymiennika.

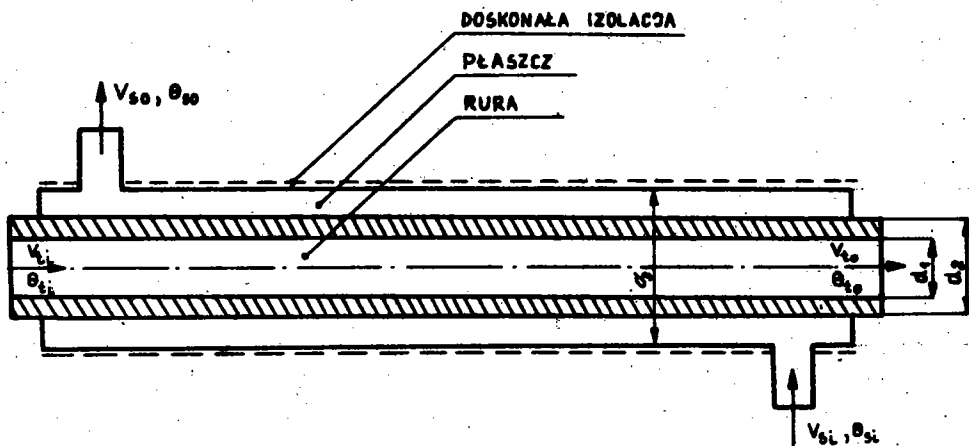
Rozważono dwa modele a mianowicie:

a) model o parametrach skupionych, w którym temperatury czynników wymieniających ciepło są stałe wzdłuż długości wymiennika;

b) model sekcyjny o parametrach skupionych, w którym zastosowano podział całego wymiennika na sekcje, w obrębie których przyjęto założenia zgodnie z modelem o parametrach skupionych.

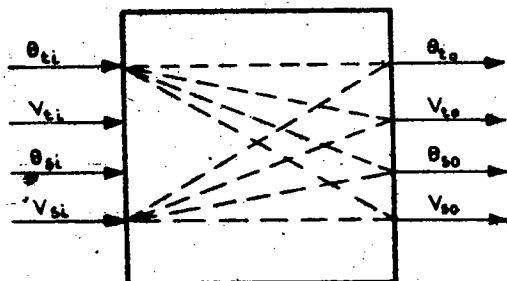
Zaletą tych modeli jest możliwość uzyskania prostego rozwiązania analitycznego. Model sekcyjny pozwala przy tym na lepsze przybliżenie rzeczywistości. W pracy podano również zasady sumowania odpowiedzi w modelu sekcyjnym.

W wymiennikach ciepła często wielkością regulowaną jest temperatura wylotowa czynnika. Taką regulację można uzyskać przez zmianę temperatury wlotowej lub prędkości albo tego samego czynnika albo drugiego. Dlatego istotnym jest możliwość określenia odpowiedzi wymiennika, to jest zmian w czasie temperatur wylotowych wywołanych zmiennymi w czasie temperaturami lub prędkościami wlotowymi. Zatem wielkościami wejściowymi wpływającymi na obiekt regulowany dla wymiennika ciepła są: temperatura wlotowa czynnika w rurze θ_{ti} , prędkość wlotowa czynnika w rurze V_{ti} , temperatura wlotowa czynnika w płaszczu θ_{si} , prędkość wlotowa czynnika w płaszczu V_{si} .



Rys.1. Schemat wymiennika ciepła z rurami koncentrycznymi

Wielkości wyjściowe, zmieniające się na skutek działania wielkości wejściowych, to temperatury i prędkości wylotowe czynników: θ_{so} , θ_{to} , V_{so} , V_{to} .



Rys.2. Schemat strukturalny wymiennika ciepła

Jak wynika z powyższych rozważań rozpatrywany wymiennik jest obiektem czterech wejść i czterech wyjść (jak na rys.2).

Ze związków między wielkościami wyjściowymi a wejściowymi można zestawić następującą macierz, której

elementy przedstawiają kolejno oddziaływanie zmian jednej tylko wielkości wejściowej na poszczególne wielkości wyjściowe, zgodnie ze schematem podanym na rys.2

$$\begin{pmatrix} \frac{\theta_{to}}{\theta_{ti}} & \frac{\theta_{so}}{\theta_{ti}} & \frac{V_{to}}{\theta_{ti}} & \frac{V_{so}}{\theta_{ti}} \\ \frac{\theta_{to}}{V_{ti}} & \frac{\theta_{so}}{V_{ti}} & \frac{V_{to}}{V_{ti}} & \frac{V_{so}}{V_{ti}} \\ \frac{\theta_{to}}{\theta_{si}} & \frac{\theta_{so}}{\theta_{si}} & \frac{V_{to}}{\theta_{si}} & \frac{V_{so}}{\theta_{si}} \\ \frac{\theta_{to}}{V_{si}} & \frac{\theta_{so}}{V_{si}} & \frac{V_{to}}{V_{si}} & \frac{V_{so}}{V_{si}} \end{pmatrix} \quad (1)$$

Wyrazy macierzy (1) są funkcjami czasu, ale ponieważ równania dynamiki wymiennika są równaniami różniczkowymi, to po dokonaniu transformacji Laplace'a względem czasu wyrażenia te staną się transmitancjami operatorowymi.

2. ZAŁOŻENIA UPRASZCZAJĄCE STOSOWANE W OPISIE MATEMATYCZNYM DYNAMIKI WYMIENNIKÓW CIEPŁA

Teoretyczne rozwiązanie równań dynamiki wymiennika jest możliwe tylko przy wprowadzeniu szeregu następujących uproszczeń [2], [5], [8]:

- a) parametry materiałowe zarówno obu czynników jak i ścian nie zależą od temperatury a zatem i od współrzędnej;
- b) prędkości i temperatury obu czynników nie są funkcjami promienia;
- c) spadek ciśnienia na długości wymiennika może być pominięty;
- d) przewodność cieplna ścian rury w kierunku osiowym jest pominięta, natomiast w kierunku promieniowym równa nieskończoności;
- e) nie uwzględnia się pojemności cieplnej ściany płaszczą;
- f) współczynniki przejmowania wyznaczone z zależności $Nu = Nu(Re, Pr)$ dla warunków ustalonych obowiązują również w warunkach nieustalonych;

g) wymiennik ciepła jest doskonale izolowany od otoczenia.

Przedstawione założenia upraszczające odnoszą się do modelu jednowymiarowego z ciągłym rozkładem temperatur czynników wymieniających ciepło wzdłuż długości wymiennika.

Należy podkreślić, że szereg z wyżej poczynionych założeń upraszczających jest do przyjęcia szczególnie dla w pełni rozwiniętego przepływu burzliwego, w którym występują płaskie profile prędkości i temperatur a konwekcja jest na tyle intensywna, że przewodzenie wzdłużne nie odgrywa roli. Przyjęte założenia prowadzą do uproszczenia uprzednio przedstawionej macierzy

$$\begin{vmatrix}
 \frac{\theta_{to}}{\theta_{ti}} & \frac{\theta_{so}}{\theta_{ti}} & 0 & 0 \\
 \frac{\theta_{to}}{V_{ti}} & \frac{\theta_{so}}{V_{ti}} & 1 & 0 \\
 \frac{\theta_{to}}{\theta_{si}} & \frac{\theta_{so}}{\theta_{si}} & 0 & 0 \\
 \frac{\theta_{to}}{V_{si}} & \frac{\theta_{so}}{V_{si}} & 0 & 1
 \end{vmatrix} \quad (2)$$

Proces wymiany ciepła opisują równania ciągłości, ruchu i energii dla obu czynników oraz równanie energii dla rury.

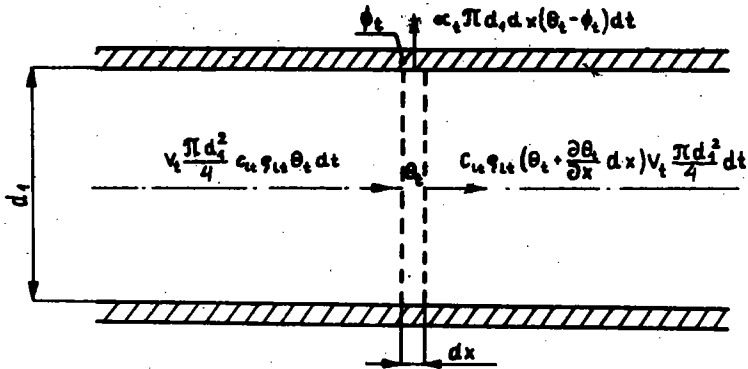
W wyniku przyjętych uproszczeń zanika równanie ciągłości i ruchu.

Bilans energii dla kontrolnej objętości czynnika można wyrazić następująco [2], [3]:

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{Akumulacja energii} \\ \text{w kontrolnej obję-} \\ \text{tości} \end{array} \right\} = \left\{ \begin{array}{l} \text{Ilość ciepła} \\ \text{wpływająca z} \\ \text{czynnikiem do} \\ \text{kontrolnej} \\ \text{objętości} \end{array} \right\} - \left\{ \begin{array}{l} \text{Ilość ciepła} \\ \text{wpływająca} \\ \text{z czynnikiem} \\ \text{z kontrolnej} \\ \text{objętości} \end{array} \right\} +$$

(3)

$$\pm \left\{ \begin{array}{l} \text{ilość ciepła wpływająca} \\ \text{(lub wpływająca) z kontrolnej} \\ \text{objętości przez przejmowanie} \end{array} \right\}$$



Rys.3. Bilans energii dla kontrolnej objętości czynnika przepływającego w rurze

$$\begin{aligned} \varphi_{1t} c_{1t} \frac{\pi d_1^2}{4} dx \frac{\partial \theta_t}{\partial t} dt = \varphi_{1t} c_{1t} V_t \frac{\pi d_1^2}{4} \theta_t dt - \\ - \varphi_{1t} c_{1t} V_t \frac{\pi d_1^2}{4} dt \left(\theta_t + \frac{\partial \theta_t}{\partial x} dx \right) \pm \alpha_t \pi d_1 dx (\theta_t - \phi_t) dt. \end{aligned} \quad (4)$$

Równanie (4) można sprowadzić do postaci:

$$\frac{\partial \theta_t}{\partial t} + V_t \frac{\partial \theta_t}{\partial x} = \frac{\pm 4 \alpha_t}{\varphi_{1t} c_{1t} d_1} (\phi_t - \theta_t). \quad (5)$$

Analogiczną postać przybiera równanie energii dla czynnika przepływającego w płaszczu. w podobny sposób wyprowadza się równanie energii dla ściany rury z tym, że w równaniu tym nie występują człony konwekcyjne:

$$\frac{\partial \phi_t}{\partial t} = \frac{\pm 4 \pi d_1}{\varphi_{wt} c_{wt} \pi (d_2^2 - d_1^2)} \alpha_t (\theta_t - \phi_t). \quad (6)$$

W równaniach energii dla obu czynników, jako zmienne niezależne, występują zarówno czas jak i współrzędna osiowa. występowanie współrzędnej osiowej w bardzo poważnym stopniu utrudnia uzyskanie rozwiązania.

Dla przepływu czynników stosuje się następujące modele:

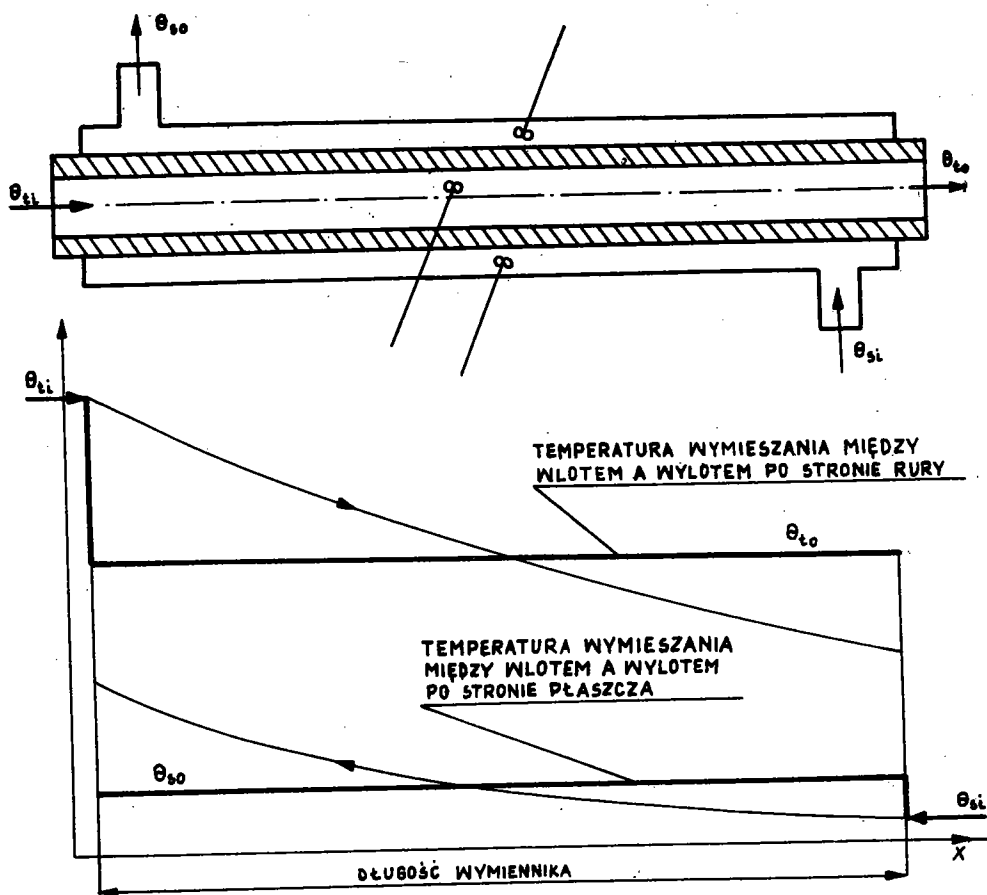
a) zakłada się całkowite wymieszanie i stałą temperaturę czynników w całej przestrzeni - model o parametrach skupionych;

b) dzieli się układ na sekcje i w każdej z nich zakłada się całkowite wymieszanie, a więc i stałe wartości temperatur - model sekcyjny o parametrach skupionych;

c) zakłada się ciągły rozkład temperatur wzdłuż współrzędnej osiowej - model o parametrach rozłożonych.

3. MODEL O PARAMETRACH SKUPIONYCH

W modelu o parametrach skupionych zakłada się, że czynnik w czasie przepływu przez wymiennik jest całkowicie wymieszany, tak że rozkład temperatur wzdłuż wymiennika zastępuje się rozkładem jak na rys.4:



Rys.4. Rozkład temperatur czynników wzdłuż długości wymiennika opisanego modelem o parametrach skupionych. Dla porównania naniesiono rzeczywisty rozkład temperatur

Model o parametrach skupionych opisuje następujący układ równań energii [2], [5], [6]:

$$\frac{d\theta_t}{dt} + \frac{V_t}{h} (\theta_t - \theta_{ti}) = a_1(\phi_t - \theta_t), \quad (7.1)$$

$$\frac{d\phi_t}{dt} = a_2(\theta_t - \phi_t) + a_3(\theta_s - \phi_t), \quad (7.2) \quad (7)$$

$$\frac{d\theta_s}{dt} + \frac{V_s}{h} (\theta_s - \theta_{si}) = a_4(\phi_t - \theta_s). \quad (7.3)$$

Równanie (7.1) dotyczy czynnika przepływającego w rurze wewnętrznej, równanie (7.2) ściany rury, a (7.3) czynnika przepływającego w płaszczu. W dalszym ciągu przedstawiony zostanie sposób wyznaczenia dwóch transmitancji operatorowych wybranych z macierzy (2), jako charakterystycznych dla dynamiki wymiennika:

$$\frac{\bar{\theta}_{to}}{\bar{V}_{ti}} \quad \text{i} \quad \frac{\bar{\theta}_{so}}{\bar{V}_{ti}}.$$

Przebieg postępowania przy wyznaczaniu transmitancji operatorowych:

a. Jeżeli zadane są temperatury wlotowe i prędkości obu czynników, to w stanie ustalonym określić można temperatury wylotowe.

Wartości współczynników przejmowania ciepła wyznacza się z zależności $Nu = Nu(Re, Pr)$, którą można przedstawić w postaci

$$Nu = C Re^k Pr^b. \quad (8)$$

Wówczas układ równań modelu o parametrach skupionych w stanie ustalonym jest układem równań algebraicznych liniowych:

$$\frac{V_{tss}}{h}(\theta_{tss} - \theta_{ti}) = a_{1ss}(\phi_{tss} - \theta_{tss}),$$

$$0 = a_{2ss}(\theta_{tss} - \phi_{tss}) + a_3(\theta_{sss} - \phi_{tss}), \quad (9)$$

$$\frac{V_s}{h}(\theta_{sss} - \theta_{si}) = a_4(\phi_{tss} - \theta_{sss}).$$

Rozwiązanie tego układu stanowią poszukiwane temperatury θ_{tss} i θ_{sss} .

b. Zmiany w czasie prędkości czynnika w rurze, które można zapisać w następujący sposób:

$$V_t = V_{tss} + v_t, \quad (10)$$

wywołują zmiany w czasie następujących temperatur: temperatur wlotowych czynników oraz temperatury ściany rury. Zapis tych zmian może być następujący:

$$\theta_t = \theta_{tss} + \theta_t(t),$$

$$\theta_s = \theta_{sss} + \theta_s(t), \quad (11)$$

$$\phi_t = \phi_{tss} + \phi_t(t).$$

Zgodnie z podaną wcześniej zależnością (8) zmiany prędkości czynnika w rurze pociągają za sobą nieliniową zmianę współczynnika przejmowania ciepła α_t , a to powoduje nieliniowy charakter układu równań wyjściowych (7). Nieliniowość tę można usunąć dokonując linearyzacji zależności na współczynnik przejmowania ciepła od prędkości przez rozwinięcie jej w szereg Taylora w otoczeniu średniej wartości prędkości i uwzględnienie tylko wyrazów liniowych:

$$\alpha_t(v) = C'(V_{tss} + v)^k, \quad (12)$$

$$\alpha_t(v) \Big|_{v=0} = C' V_{tss}^k, \quad (13)$$

$$\left. \frac{d\alpha_t(v)}{dv} \right|_{v=0} = C'k v_{tss}^{k-1}, \quad (14)$$

$$\alpha_t(v) = C'v_{tss}^k + C'k v_{tss}^k \frac{v}{v_{tss}}. \quad (15)$$

W wyrażeniu (15) określającym współczynnik przejmowania w warunkach nieustalonych wyodrębnić można część stałą dla warunków ustalonych: $C'v_{tss}^k$, oraz zmienną: $C'k v_{tss}^k \frac{v}{v_{tss}}$. Tak zapisany współczynnik przejmowania α_t wprowadzony do współczynników a_1 i a_2 z układu równań (7) zmienia je do postaci:

$$a_1 = a_{1ss} + a_{1v} = a_{1ss} + k a_{1ss} \frac{v}{v_{tss}}, \quad (16)$$

$$a_2 = a_{2ss} + a_{2v} = a_{2ss} + k a_{2ss} \frac{v}{v_{tss}}.$$

Po wprowadzeniu do układu równań (7) zależności (10), (11), (16) i wykorzystaniu rozwiązania dla stanu ustalonego, otrzymuje się:

$$\frac{d\theta_t}{dt} + \frac{v_{tss}}{h} \theta_t - a_{1ss} (\phi_t - \theta_t) = (k-1) \frac{v}{v_{tss}} \frac{a_{1ss} a_3}{a_{2ss} + a_3} (\theta_{sss} - \theta_{tss}),$$

$$\frac{d\phi_t}{dt} = a_{2ss} (\theta_t - \phi_t) + a_3 (\theta_s - \phi_t) - k \frac{v}{v_{tss}} \frac{a_{2ss} a_3}{a_{2ss} + a_3} (\theta_{sss} - \theta_{tss}), \quad (17)$$

$$\frac{d\theta_s}{dt} + \frac{v_s}{h} \theta_s = a_4 (\phi_t - \theta_s).$$

c. Zastosowanie przekształcenia Laplace'a względem czasu t układu równań (17), przy zerowych warunkach początkowych, sprowadza układ do równań algebraicznych:

$$s\bar{\theta}_t + \frac{V_{tss}}{h} \bar{\theta}_t - a_{1ss}(\bar{\phi}_t - \bar{\theta}_t) = (k-1) \frac{\bar{v}}{V_{tss}} \frac{a_{1ss}a_3}{a_{2ss}+a_3} (\theta_{sss} - \theta_{tss}),$$

$$s\bar{\phi}_t = a_{2ss}(\bar{\theta}_t - \bar{\phi}_t) + a_3(\bar{\theta}_s - \bar{\phi}_t) - k \frac{\bar{v}}{V_{tss}} \frac{a_{2ss}a_3}{a_{2ss}+a_3} (\theta_{sss} - \theta_{tss}), \quad (18)$$

$$s\bar{\theta}_s + \frac{V_s}{h} \bar{\theta}_s = a_4(\bar{\phi}_t - \bar{\theta}_s).$$

Z układu równań (18) drogą kolejnych przekształceń można wyznaczyć poszukiwane transmitancje operatorowe:

$$\frac{\bar{\theta}_{t0}}{\bar{v}} = \frac{\theta_{sss} - \theta_{tss}}{V_{tss}} \frac{p_3 p_4 + p_2 p_6}{p_1 p_4 - p_2 p_5}, \quad (19)$$

$$\frac{\bar{\theta}_{s0}}{\bar{v}} = \frac{\theta_{sss} - \theta_{tss}}{V_{tss}} \frac{p_3 p_5 + p_1 p_6}{p_1 p_4 - p_2 p_5}, \quad (20)$$

gdzie: $p_1 = s + \frac{V_{tss}}{h} + a_{1ss} - \frac{a_{1ss}a_{2ss}}{s+a_{2ss}+a_3},$

$$p_2 = \frac{a_{1ss}a_3}{s+a_{2ss}+a_3},$$

$$p_3 = - \left[(1-k) \frac{a_{1ss}a_3}{a_{2ss}+a_3} + k \frac{a_{1ss}a_{2ss}a_3}{(a_{2ss}+a_3)(s+a_{2ss}+a_3)} \right], \quad (21)$$

$$p_4 = s + \frac{V_s}{h} - \frac{a_3 a_4}{s+a_{2ss}+a_3} + a_4,$$

$$p_5 = \frac{a_4 a_{2ss}}{s+a_{2ss}+a_3},$$

$$p_6 = -k \frac{a_{2ss}a_3 a_4}{(a_{2ss}+a_3)(s+a_{2ss}+a_3)}.$$

Z uzyskanych transmitancji operatorowych można otrzymać zarówno charakterystyki czasowe jak i częstotliwościowe. Otrzymanie charakterystyk czasowych wymaga dokonania odwrotnego przekształcenia Laplace'a, które często jest bardzo skomplikowane. Projektowanie układów automatycznej regulacji, jak rów-

niez badanie ich stabilności, oparte jest na wykorzystaniu charakterystyk częstotliwościowych. Teoretyczną podstawę charakterystyk częstotliwościowych stanowi transmitancja widmowa, którą definiuje się [7], [10] następująco:

$$G(s) = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}}, \quad (22)$$

$$G(j\omega) = \left. \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} \right|_{s = j\omega},$$

gdzie: \bar{Y} jest zespoloną wartością odpowiedzi układu wywołanej wymuszeniem harmonicznym,

\bar{X} zespoloną wartością tego wymuszenia.

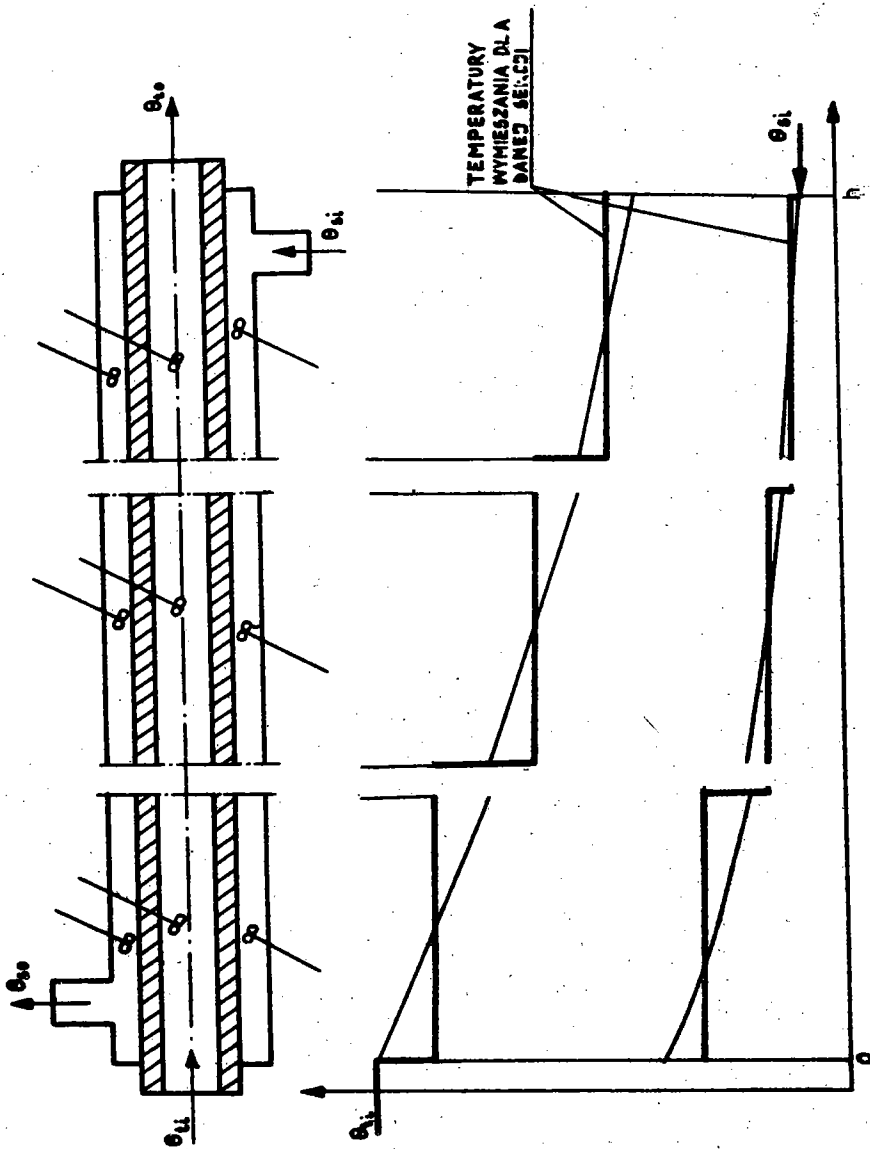
Transmitancję widmową, jako funkcję liczby zespolonej j , można przedstawić w postaci wykładniczej

$$G(j\omega) = A(\omega)e^{j\varphi(\omega)}, \quad (23)$$

gdzie: $A(\omega)$ jest stosunkiem amplitudy odpowiedzi do amplitudy wymuszenia,

$\varphi(\omega)$ przesunięciem fazowym.

Wykresy $A = A(\omega)$, $\varphi = \varphi(\omega)$ noszą nazwę charakterystyk częstotliwościowych: amplitudowej i fazowej. Efektywne wyznaczenie charakterystyk przeprowadza się na maszynach cyfrowych, gdyż wyrażenia (19) i (20) należy policzyć kilkadziesiąt razy dla kolejnych wartości zespolonej częstotliwości $j\omega$. Z uwagi na niedostatek opisu jaki daje tak przedstawiony model skupiony istnieją próby poprawienia go, ale w dalszym ciągu w ramach modelu o parametrach skupionych. Próby te polegają na wprowadzeniu do opisu dynamiki wymiennika wg modelu o parametrach skupionych rozwiązania dla stanu ustalonego z uwzględnieniem rzeczywistego rozkładu temperatur obu czynników wzdłuż długości wymiennika. Osiąga się to zastępując w równaniach (19) i (20) różnicę temperatur $\theta_{tss} - \theta_{sss}$ powszechnie stosowaną średnią logarytmiczną różnicą temperatur czynników.



Rys.5. Rozkład temperatur czynników wzdłuż długości wymiennika dla modelu sekcyjnego o parametrach skupionych

4. MODEL SEKCYJNY O PARAMETRACH SKUPIONYCH

W modelu sekcyjnym o parametrach skupionych wymiennika zakłada się całkowite wymieszanie w poszczególnych częściach (sekcjach) wymiennika. Tak więc model ten składa się z szeregowego ciągu modeli o parametrach skupionych [5], [2].

Rozkład temperatur wzdłuż całego wymiennika przedstawiony jest na rys.5. Temperatura wylotowa czynnika z sekcji n -tej jest temperaturą wlotową do sekcji $n+1$. W wyniku takiego przepływu w warunkach nieustalonych, wywołanych zaburzeniem prędkości wlotowej do rury w każdej sekcji (z wyjątkiem pierwszej) występują jednoczesne zmiany dwóch wielkości wejściowych: prędkości i temperatury w rurze.

Ponieważ zakłada się nieściśliwość cieczy, to zakłócenie prędkości dociera jednocześnie do każdej sekcji wymiennika, więc odpowiednio

$$\frac{\bar{\theta}_{t1}}{\bar{v}}; \frac{\bar{\theta}_{t2}}{\bar{v}}; \dots \text{ itd.}$$

występują też jednocześnie w każdej sekcji. Wywołana przez zmianę prędkości zmiana temperatury jest przetwarzana w każdej sekcji. Całkowita odpowiedź temperaturowa na wylocie jest superpozycją wszystkich sygnałów przybywających równocześnie do wylotu. Sposób przeprowadzenia tej superpozycji przedstawia się następująco. Odpowiedź pierwszej sekcji na zaburzenie prędkości wlotowej do rury określa wyrażenie:

$$\bar{\theta}_{t1} = \left(\frac{\bar{\theta}_{t1}}{\bar{v}} \right) \bar{v} . \quad (24)$$

Dla drugiej sekcji, podobnie jak i dla każdej następnej, temperatura wylotowa jest odpowiedzią na jednoczesne działanie dwu zaburzeń na wejściu, prędkości oraz temperatury wylotowej z sekcji poprzedniej

$$\bar{\theta}_{t2} = \left(\frac{\bar{\theta}_{t2}}{\bar{\theta}_{t1}} \right) \bar{\theta}_{t1} + \left(\frac{\bar{\theta}_{t2}}{\bar{v}} \right) \bar{v} . \quad (25)$$

Po podstawieniu (24) do (25) otrzymuje się

$$\frac{\bar{\theta}_{t2}}{\bar{v}} = \left(\frac{\bar{\theta}_{t2}}{\bar{\theta}_{t1}} \right) \left(\frac{\bar{\theta}_{t1}}{\bar{v}} \right) + \left(\frac{\bar{\theta}_{t2}}{\bar{v}} \right); \quad (26)$$

dla trzeciej sekcji

$$\bar{\theta}_{t3} = \left(\frac{\bar{\theta}_{t3}}{\bar{\theta}_{t2}} \right) \bar{\theta}_{t2} + \left(\frac{\bar{\theta}_{t3}}{\bar{v}} \right) \bar{v}. \quad (27)$$

Wyrażenie (27) po wykorzystaniu (26) przyjmuje postać

$$\frac{\bar{\theta}_{t3}}{\bar{v}} = \left(\frac{\bar{\theta}_{t3}}{\bar{\theta}_{t2}} \right) \left(\frac{\bar{\theta}_{t2}}{\bar{\theta}_{t1}} \right) \left(\frac{\bar{\theta}_{t1}}{\bar{v}} \right) + \left(\frac{\bar{\theta}_{t3}}{\bar{\theta}_{t2}} \right) \left(\frac{\bar{\theta}_{t2}}{\bar{v}} \right) + \left(\frac{\bar{\theta}_{t3}}{\bar{v}} \right).$$

Schematycznie narastanie tych zaburzeń przedstawiono na rys.6.

Z założenia, że wszystkie sekcje mają identyczną geometrię i identyczne współczynniki przejmowania ciepła, wynika

$$\left(\frac{\bar{\theta}_{t3}}{\bar{\theta}_{t2}} \right) = \left(\frac{\bar{\theta}_{t2}}{\bar{\theta}_{t1}} \right) = \left(\frac{\bar{\theta}_{t1}}{\bar{\theta}_{t1}} \right) = \left(\frac{\bar{\theta}_t}{\bar{\theta}_{t1}} \right), \quad (28)$$

a stąd zależność (27) przyjmuje postać

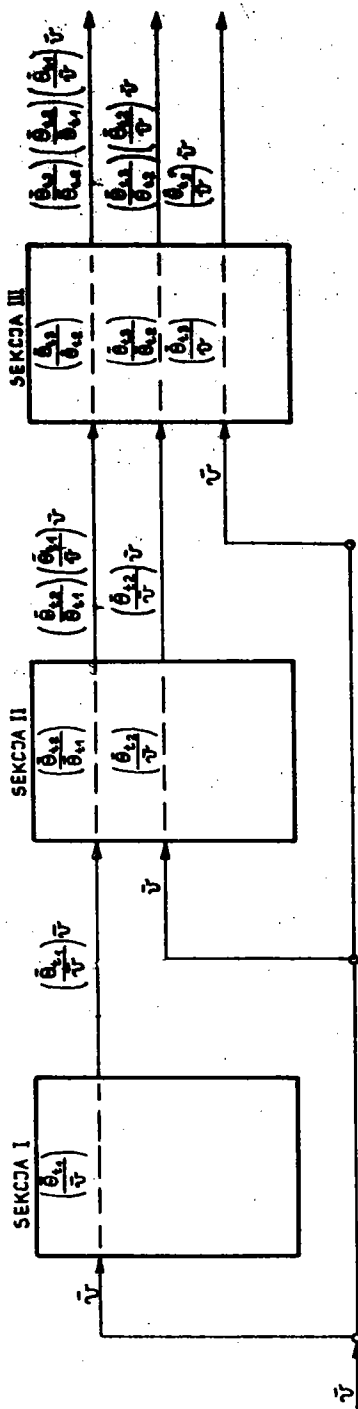
$$\frac{\bar{\theta}_{t3}}{\bar{v}} = \left(\frac{\bar{\theta}_t}{\bar{\theta}_{t1}} \right)^2 \left(\frac{\bar{\theta}_{t1}}{\bar{v}} \right) + \left(\frac{\bar{\theta}_t}{\bar{\theta}_{t1}} \right) \left(\frac{\bar{\theta}_{t2}}{\bar{v}} \right) + \left(\frac{\bar{\theta}_{t3}}{\bar{v}} \right). \quad (29)$$

Uogólniając to dla dowolnej ilości n sekcji, na jakie wymiennik jest podzielony jest wymiennik, wyjście z ostatniej sekcji wymiennika (n -tej) określa następująca suma

$$\frac{\bar{\theta}_{to}}{\bar{v}} = \sum_{m=1}^{m=n} \left(\frac{\bar{\theta}_{tm}}{\bar{v}} \right) \left(\frac{\bar{\theta}_t}{\bar{\theta}_{t1}} \right)^{n-m}, \quad (30)$$

gdzie: $n = 2, 3, \dots$

$m = 1, 2, 3, \dots, n$



Rys.6. Schemat rozchodzenia się zaburzeń temperatury czynnika w rurze wyłożonych zaburzeniem prędkości wlotowej do rury w modelu sekcyjnym o parametrach skupionych

Model sekcynny o parametrach skupionych jest doskonalszym przybliżeniem rzeczywistego układu w porównaniu z modelem o parametrach skupionych. Jednak konieczność sumowania dwóch rodzajów odpowiedzi, zarówno na zmiany temperatury jak i prędkości, czyni go dość złożonym do efektywnego wyliczenia.

5 UWAGI O STOSOWANIU MODELI O PARAMETRACH SKUPIONYCH W OPISIE DYNAMIKI WYMIENNIKA CIEPŁA

Model o parametrach skupionych można stosować w tych przypadkach, gdy zmiany temperatury czynników wzdłuż długości wymiennika są niewielkie. Ten model, oraz model sekcynny, są szczególnie użyteczne przy analogowym modelowaniu instalacji przemysłowych, w skład których wchodzi wymienniki ciepła [1], [8].

Charakterystyki częstotliwościowe otrzymane analitycznie dla przedstawionych modeli, są porównane z wynikami badań eksperymentalnych na rys.7. Eksperyment przeprowadzony został w warunkach [5]:

$$\begin{array}{lll} h = 4,57 \text{ m}, & V_t = 0,33 \text{ m/s}, & \theta_{ti} = 79,6^\circ\text{C}, \\ d_1 = 0,0127 \text{ m}, & V_s = -0,561 \text{ m/s}, & \theta_{si} = 34,4^\circ\text{C}, \\ d_2 = 0,0147 \text{ m}, & Re_t = 32270, & \\ d_3 = 0,022 \text{ m}, & Re_s = 5779, & \end{array}$$

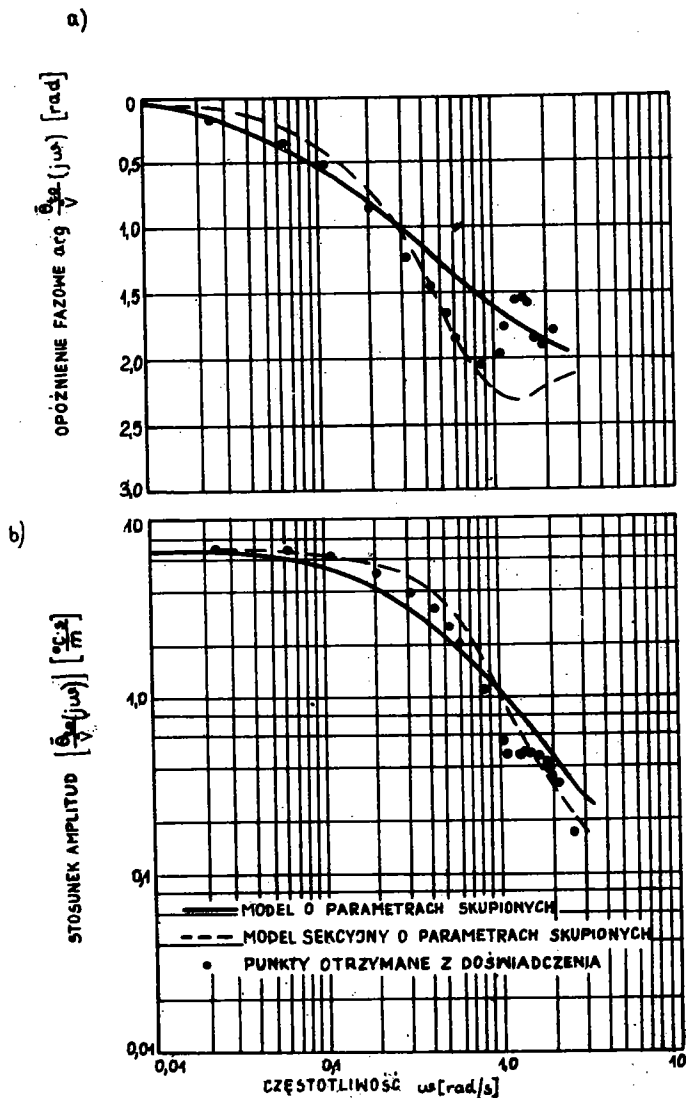
Badany wymiennik pracował w układzie przeciwprądowym. Przy analitycznym wyznaczaniu charakterystyk częstotliwościowych wprowadzono poprawkę zastępując różnicę temperatur ($\theta_{tss} - \theta_{sss}$) w zależnościach (19) i (20) poprzez średnią logarytmiczną różnicę temperatur.

W rozwiązaniu dla modelu sekcynnego zastosowano podział na sześć sekcji.

Na charakterystykach wyznaczonych eksperymentalnie dla pewnej częstotliwości występuje gwałtowny wzrost tłumienia i przesunięcia fazowego. Jest to tzw. efekt rezonansowy^{*)}.

Częstotliwość, przy której występuje to zjawisko nazywamy częstotliwością rezonansową. Charakterystyki teoretyczne, za-

^{*)} Zjawisko rezonansu szczegółowo omówiono w publikacji [11] przygotowanej do druku.



Rys.7. Charakterystyki częstotliwościowe wymiennika ciepła [5]: a) charakterystyka fazowa, b) charakterystyka amplitudowa

równy dla modelu skupionego jak i sekcyjnego, nie wykazują rezonansu. Są one identyczne zarówno dla współprądu jak i przeciwnopływu, gdyż przy formułowaniu równań wyjściowych (7) przyjęto model przepływu z całkowitym wymieszaniem czynnika. Porównanie przebiegu charakterystyk dla modeli o parametrach skupionych wykazuje, że przy częstotliwościach znacznie niż-

szych od częstości rezonansowej, oba modele prowadzą do nieznacznie różniących się wyników od eksperymentu.

Przy zbliżeniu się do częstotliwości rezonansowej wyraźnie występuje przewaga modelu sekcyjnego.

BIBLIOGRAFIA

- [1] B a l l S.J.: ISA Transaction, vol. 3, No 1, p. 38, 1964.
- [2] F i n l a y J.C.: CPE vol.47, Heat Transfer Survey, p.142, 1966.
- [3] G i g n e r H.: Trudy III Międzynarodowego Kongressa Międzynarodowej Federacji po Automaticzeskomu Uprawleniju - London 20 - 25 VII 1966, III. IFAC.
- [4] F i n l a y J.C.: NEL Report No 170, November 1964.
- [5] F i n l a y J.C., D a n g l e i s h N.: NEL Report No 206, November 1965.
- [6] F i n l a y J.C., D a n g l e i s h N.: Journal Mechanical Engineering Science vol. 7, No 3, p.318, 1965.
- [7] Ż e l a z n y M.: Podstawy Automatyki, W.P.W. Warszawa 1973.
- [8] M o z l e y J.M.: Industrial and Engineering Chemistry, vol.48, No 6, p. 1035, 1956.
- [9] T a k a h a s h i Y.: Automatic and manual control. In TUSTIN, A. Butterworths, London 1952.
- [10] O r d y n c e w W.M.: Opis matematyczny obiektów regulacji automatycznej. WNT. Warszawa 1968.
- [11] B r o d o w i c z K., G ł o w a c k a M., P o n i e w s k i M., S z o p a P., W i ś n i e w s k a M.: Biuletyn Infor. Inst. Tech. Ciepłej 44/2, Warszawa 1974.

МОДЕЛИ СО СОСРЕДОТОЧЕННЫМИ ПАРАМЕТРАМИ ДИНАМИКИ ТЕПЛООБМЕННИКОВ С КОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ ТРУБАМИ

К р а т к о е с о д е р ж а н и е

В статье описываются применяемые математические модели в изображении динамики теплообменника с концентрическими трубами: модель со сосредоточенными параметрами и секционная модель со сосредоточенными параметрами.

Приведено метод получения операторных передаточных функции характерных для динамики теплообменников, а с их помощью - частотные характеристики. Проведено анализ свойств теоретических характеристик в сравнении с экспериментальными характеристиками.

LUMPED MODELS OF DYNAMICS OF HEAT EXCHANGERS WITH CONCENTRIC TUBES

S u m m a r y

The aim of this article has been to present mathematical models to depict the dynamic behaviour of heat exchangers with concentric tubes. Two models have been presented: an overall lumped model, and a section-lumped one. The method has been quoted herein of obtaining operator transfer functions characteristic for the dynamics, and of deriving frequency characteristics out of those former. An analysis has been performed herein, of properties of theoretical characteristics in comparison with experimental characteristics.

Rękopis dostarczono w lipcu 1974 r.