

Dr inż. Andrzej Maślowski

Instytut Techniki Ciepłej

OPTYMALNA ESTYMACJA ROZKŁADU PRZESTRZENNO-CZASOWEGO GĘSTOŚCI MOCY W PŁYTOWYM REAKTORZE JĄDROWYM

1. Wstęp

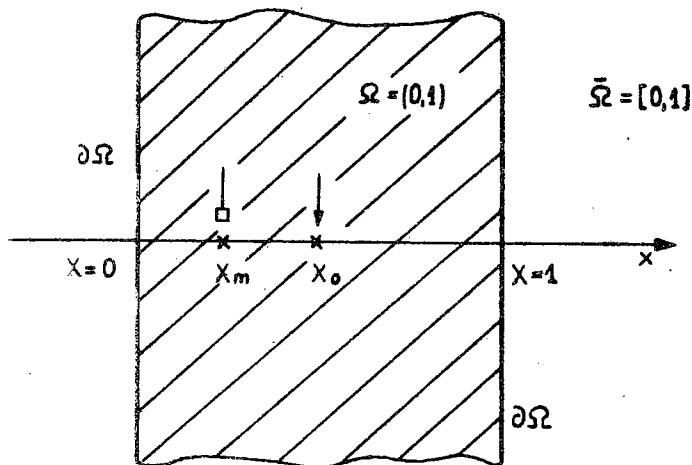
Przedstawiona praca zawiera przykładowe zadanie optymalnej estymacji rozkładu przestrzenno-czasowego gęstości mocy w reaktorze jądrowym oraz jego rozwiązanie metodami analityczną i przybliżoną, których stronę teoretyczną omówiono w [1].

Rozważono przypadek przestrzenno-czasowych zmian gęstości mocy w objętości reaktora na skutek pojawienia się zaburzenia punktowego oraz przypadek, gdy dostępny jest wynik obserwacji (pomiaru) tego zjawiska tylko w jednym punkcie reaktora. Przyjęty prosty model dynamiki i obserwacji tych procesów należy rozumieć jako ewentualną, pierwszą propozycję ich opisu, służącego celom estymacji optymalnej rozkładu gęstości mocy [2]. Także proponowany wskaźnik jakości estymacji został wybrany arbitralnie i może ulegać modyfikacji w następnych etapach prac nad optymalnym oszacowaniem rozważanego zjawiska w relacji odpowiadającej zmianom dokonany w opisie jego dynamiki i obserwacji. Obliczenia numeryczne wykonano dla rozwiązania analitycznego. Dane do obliczeń są przykładowe i nie odnoszą się do rzeczywistego układu reaktorowego. Rozwiązanie zadania metodą przybliżoną podano w postaci algorytmu, wyprowadzając i omawiając występujące w nim zależności.

2. Uproszczony model dynamiki i obserwacji zmian gęstości mocy w reaktorze

2.1. Rozważono bardzo uproszczony model dynamiki i obserwacji procesów reaktorowych. Przyjęto, że interesujące zjawis-

ka reaktora opisać można jednowymiarowym, jednorodnym modelem płytowym, który schematycznie przedstawia rys.1.



Rys.1. Model płytowy reaktora jądrowego mocy

Na rysunku punkty $X = 0$ i $X = 1$ oznaczają granicę ekstrapolowaną reaktora, punkt X_0 jest współrzędną wprowadzonego do reaktora znanego oddziaływania otoczenia w chwili $t = t_0$, punkt X_m jest współrzędną umieszczonego we wnętrzu reaktora detektora rejestrującego w sposób pośredni gęstość mocy w tym punkcie (porównaj [2] i [3]).

2.2. Niech rozkład gęstości mocy wzdłuż współrzędnej $X \in [0,1]$ i jej zmiany w czasie $t \in [t_0, T]$ opisuje następujące równanie (uzyskane z jednogrupowego równania dyfuzji bez neutronów opóźnionych dla płyty, z dodanym członem oddziaływań zewnętrznych):

$$\frac{\partial}{\partial t} u(t, X) = \left[D_u \frac{\partial^2}{\partial X^2} - \sum_u \right] u(t, X) + u_0(t, X) \delta(X - X_0) + f_\Omega^r(t, X), \quad (1)$$

$$u(t, 0) = u(t, 1) = 0 \quad \text{dla } t \geq t_0, \quad (2)$$

$$u(t_0, X) = 0 \quad \text{dla } X \in [0, 1], \quad (3)$$

gdzie:

$u(t, X)$ - gęstość mocy reaktora, będąca funkcją stanu tego zadania estamacji,

- D_u i \sum_u - odpowiednio zdefiniowane współczynniki,
 $u_0(t, X)\delta(X-X_0)$ - dana funkcja określająca zaburzenie punktowe,
 $\delta(X-X_0)$ - funkcja delta Diraca,
 X_0 - współrzędna jak na rys.1,
 $f_{\Omega}^r(t, X)$ - funkcja błędu opisu dynamiki zmian gęstości mocy w reaktorze.

2.3. Niech model obserwacji (pomiaru) gęstości mocy w wybranym punkcie X_m reaktora opisuje zależność

$$z_m(t) = \int_0^1 [S_m u(t, X) + f_{\Omega}^v(t, X)] \delta(X-X_m) dX, \quad (4)$$

gdzie:

- $z_m(t)$ - obserwowana (mierzona) funkcja zmian gęstości mocy w punkcie X_m , odniesiona do danego poziomu mocy reaktora,
 S_m - współczynnik proporcjonalności,
 $f_{\Omega}^v(t, X)$ - funkcja błędu opisu obserwacji (pomiaru) gęstości mocy w punkcie X ,
 X_m - współrzędna jak na rys.1.
 Funkcja $z_m(t)$ - określona jest przez

$$z_m(t) = Z_m(t) - Z_{m0}, \quad t \in [t_0, T], \quad (5)$$

gdzie:

- $Z_m(t)$ - obserwowana (mierzona) funkcja zmian gęstości mocy w punkcie X_m ,
 Z_{m0} - stała, odpowiadająca obserwacji (pomiarowi) gęstości mocy w punkcie X_m w stanie ustalonym.

3. Zadanie estymacji optymalnej zmian gęstości mocy w reaktorze

3.1. Przyjęto następujący wskaźnik jakości estymacji funkcji stanu $u(t, X)$:

$$\beta [\hat{u}, \hat{f}_a^r, \hat{f}_a^v] = \int_{t_0}^T \int_0^1 [(\hat{f}_a^r)^2 + (\hat{f}_a^v)^2 \delta(X-X_m)] dx dt + \int_{t_0}^T \left[z_m(t) - \int_0^1 [S_m \hat{u}(t, X) + \hat{f}_a^v(t, X)] \delta(X-X_m) dx \right]^2 dt, \quad (6)$$

gdzie:

- $\hat{u}(t, X)$ - estymata funkcji stanu gęstości mocy $u(t, X)$,
- $\hat{f}_a^r(t, X)$ - estymata funkcji błędu opisu dynamiki zmian gęstości mocy,
- $\hat{f}_a^v(t, X)$ - estymata funkcji błędu obserwacji zmian gęstości dla punktu $X \in [0, 1]$.

Wskaźnik jakości estymacji (6) jest szczególnym przypadkiem proponowanego w [2] ogólnego całkowo-kwadratowego wskaźnika jakości estymacji rozważanej klasy procesów reaktorowych.

3.2. Z warunku fizycznego nieujemności funkcji $u(t, X)$, zatem i jej estymaty $\hat{u}(t, X)$, wynika dodatkowe ograniczenie nierównościowe zadania estymacji

$$\hat{u}(t, X) + u_p(X) \geq 0, \quad (7)$$

gdzie

$u_p(X)$ - rozkład gęstości mocy w stanie ustalonym.

3.3. Z warunków fizycznych zadania wynika, że dla danego S_m istnieje odwrotność S_m^{-1} , co stanowi warunek jednoznacznego wyznaczenia funkcji stanu $u(t, X_m)$ dla danego t, X_m, Z_m i ustalonego $\hat{f}_a^v(t, X_m)$.

3.4. Zadanie estymacji optymalnej zmian gęstości mocy dla danego modelu reaktora jest następujące:

(I) należy wyznaczyć takie funkcje $\hat{u}^*(t, X)$, $\hat{f}_a^{r*}(t, X)$, $\hat{f}_a^{v*}(t, X)$, które minimalizują funkcjonal (6) przy ograniczeniach równościowym (1)+(3), (funkcja stanu $u(t, X)$ zostaje zastąpiona w (1)+(3) estymatą $\hat{u}(t, X)$) oraz ograniczeniach nierównościowych (7).

4. Warunki istnienia i warunki konieczne
optymalnego rozwiązania danego zadania

4.1. W celu zastosowania podanych w [1] twierdzeń o warunkach istnienia (warunków dostatecznych) i warunkach koniecznych optymalnego rozwiązania zadania (I), przekształcono równanie (1) z warunkami brzegowymi (2) i początkowym (3) do postaci całkowej.

Stosując podstawienia:

$$u_1(t, X) = u(t, X) \exp \left[-\sum_n (t-t_0) \right] \quad (8)$$

$$\chi(t, X) = \psi(t, X) \exp \left[-\sum_n (t-t_0) \right],$$

gdzie

$$\psi(t, X) = u_0(t, X) \delta(X-X_0) + f_0^r(t, X), \quad (8')$$

sprowadzono (1) do postaci

$$(1') \quad \frac{\partial}{\partial t} u_1(t, X) = D_u \frac{\partial^2}{\partial X^2} u_1(t, X) + \chi(t, X).$$

Równanie (1') z warunkami brzegowymi (2) i początkowymi (3) w formie całkowej ma postać następującą

$$u_1(t, X) = \int_{t_0}^t \int_0^1 K_1(t-t, X, X') \chi(t', X') dX' dt', \quad (9)$$

gdzie

$$K_1(t-t', X, X') = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \exp \left[-i^2 \pi^2 D_u (t-t') \right] \sin(i\pi X) \sin(i\pi X').$$

Podstawiając (8) i (8') do (9) otrzymano następującą postać całkową równania (1) z warunkami (2) i (3)

$$u(t, X) = \int_{t_0}^t \int_0^1 K(t-t', X, X') \left[u_0(t', X') \delta(X'-X_0) + f_0^r(t', X') \right] dX' dt' \quad (10)$$

gdzie:

$$K(t-t', X, X') = 2 \sum_{i=1}^{\infty} \exp \left[-\alpha_i (t-t') \right] \sin(\beta_i X) \sin(\beta_i X'),$$

$$\alpha_i = i^2 \pi^2 D_u - \sum_u,$$

$$\beta_i = i\pi.$$

4.2. Obecnie można przedstawić zadanie (I) w formie dogodnej do sprawdzenia założeń twierdzeń podanych w [1], jak i do wyprowadzenia zależności określających warunki istnienia (warunki dostateczne) oraz warunki konieczne optymalnego rozwiązania tego zadania.

Przyjmując początkowy czas $t_0 = 0$, zadanie (I) można sformułować następująco:

(II). Szukamy takich funkcji $\hat{u}^*(t, X)$, $\hat{f}_\Omega^v{}^*(t, X)$, $\hat{f}_\Omega^r{}^*(t, X)$, które minimalizują funkcjonał (6) przy spełnieniu ograniczeń operatorowych:

$$\varphi_1[\hat{u}, \hat{f}_\Omega^r] \triangleq \hat{u}(t, X) - \int_0^t \int_0^1 K(t-t', X, X') [u_0(t', X') \delta(X-X_0) + \hat{f}_\Omega^r(t', X')] dX' dt' = 0, \quad (11a)$$

$$\varphi_2[\hat{u}] \triangleq \hat{u}(t, X) + u_p \geq 0, \quad (11b)$$

W powyższym zadaniu występuje jedno ograniczenie równościowe, w porównaniu z zadaniem (II) [1]. Dane są tam dwa równoważne mu ograniczenia nierównościowe, wprowadzone w celu formalnego podania ogólnych twierdzeń 1 i 2. Przy rozwiązywaniu danego zadania estymacji optymalnej nie powtarza się już tego formalnego zapisu.

4.3. Funkcja Lagrange'a dla zadania (II) ma następującą postać

$$\begin{aligned} \phi(\hat{u}, \hat{f}_\Omega^r, \hat{f}_\Omega^v, \tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2) &\triangleq \beta [\hat{u}, \hat{f}_\Omega^r, \hat{f}_\Omega^v] + \tilde{\lambda}_1 [\varphi_1] + \tilde{\lambda}_2 [\varphi_2] = \\ &= \phi_1(\hat{u}, \hat{f}_\Omega^r, \hat{f}_\Omega^v, \tilde{\lambda}_1) + \tilde{\lambda}_2 [\varphi_2], \end{aligned} \quad (12)$$

gdzie:

- ϕ - funkcja ogólna Lagrange'a zadania (II),
- ϕ_1 - funkcja szczególna Lagrange'a zadania (II),
- $\tilde{\lambda}_1, \tilde{\lambda}_2$ - funkcjonały Lagrange'a.

Ponieważ nie znana jest postać szczególna funkcjonału $\tilde{\lambda}_1$, potrzebnego w dalszej części rozwiązania, to korzysta się w danym przypadku (gdy rozwiązania poszukuje się w klasie funk-

cji całkowalnych w kwadracie w obszarze $[0, T] \times [0, 1]$ z ogólnej postaci funkcjonałów nieujemnych w przestrzeni L^2 .

Wtedy:

$$\hat{u}, \hat{f}_\Omega^r, \hat{f}_\Omega^v \in L^2([0, T] \times [0, 1]),$$

$$\varphi_1 : L^2 \rightarrow L^2,$$

$$\varphi_2 : L^2 \rightarrow L^2.$$

i funkcjonal Lagrange'a ma postać

$$\tilde{\lambda}_1 [\varphi_1] = \int_0^T \int_0^1 \varphi_1 \lambda_1(t, X) \, dX dt, \quad (13)$$

gdzie

$\lambda_1(t, X)$ - funkcja o wartościach nieujemnych prawie wszędzie [5], [7], całkowalna w drugiej potędze w obszarze $[0, T] \times [0, 1]$.

Wstawiając (13) do (12) i uwzględniając (11a) oraz (10) otrzymano funkcję szczególną Lagrange'a o postaci:

$$\begin{aligned} \phi_1[\hat{u}_1, \hat{f}_\Omega^r, \hat{f}_\Omega^v, \lambda_1] &= \int_0^T \int_0^1 [(\hat{f}_\Omega^r)^2 + (\hat{f}_\Omega^v)^2 \delta(X - X_m)] \, dX dt + \\ &+ \int_0^T [z_m(t) \int_0^1 \{S_m[\hat{u}(t, X) - u_p(X)] + \hat{f}_\Omega^v(t, X)\} \delta(X - X_m) \, dX]^2 \, dt + \\ &+ \int_0^T \int_0^1 [\hat{u}(t, X) - u_p(X) - \int_0^t \int_0^1 K(t-t', X, X') [u_0(t', X') \delta(X' - X_0) + \\ &+ \hat{f}_\Omega^r(t', X')] \, dX' dt'] \lambda_1(t, X) \, dX dt, \quad (14) \end{aligned}$$

gdzie

$\hat{u}(t, X) \triangleq \hat{u}(t, X) + u_p(X)$ - nowa funkcja wprowadzona dla zapisu warunków (7).

4.4. Funkcjonał β i operatory graniczeń φ_1 i φ_2 spełniają założenia twierdzeń podanych w [1].

Założenie o silnej różniczkowalności β i φ_1, φ_2 jest spełnione, gdyż można wyznaczyć różniczki Frecheta operatorów danych wzorami (10), (11a) i (11b).

Założenie o wypukłości jest też spełnione. Mianowicie jest wypukły funkcjonal β (wypukłe są funkcje podcałkowe w (10)). Operator φ_1 jest sumą dwu operatorów liniowych jednorodnych, operator φ_2 jest liniowy niejednorodny, zatem operator $\varphi = \{\varphi_1, \varphi_2\}$ jest wypukły [6] lub [7]).

4.5. Również spełnione są tzw. warunki regularności zadania.

Pierwsze założenie o regularności operatorów φ_1, φ_2 jest spełnione, gdyż operatory liniowe jednorodne i niejednorodne, występujące w (11a) i (11b) są regularne.

Założenie drugie o słabym domknięciu zbioru Q_T , w przypadku gdy poszukiwane funkcje $\hat{u}, \hat{f}_\Omega^r, \hat{f}_\Omega^v$ rozwiązania należą do przestrzeni $L^2([0, T] \times [0, 1])$, tj. gdy rozwiązania zadania poszukuje się wśród funkcji całkowalnych w kwadracie w obszarze $[0, T] \times [0, 1]$, jest także spełnione.

4.6. Ponieważ spełnione są powyższe założenia, to można wyprowadzić zależności określające warunki dostateczne i konieczne optymalnego rozwiązania zadania (II), korzystając ze wzorów w [1]. Ale gdy szukane rozwiązania optymalne należą do przestrzeni funkcyjnych, cztery podane tam warunki można zastąpić tylko dwoma. Dla przestrzeni funkcyjnej L^2 i ograniczeń typu φ_2 otrzymuje się dwa układy równań, mianowicie:

$$\begin{aligned}
 Y_{\hat{u}}^*(t, X) \hat{u}^*(t, X) &= 0, \\
 Y_{f_\Omega}^*(t, X) &= 0, \\
 Y_{f_\Omega^v}^*(t, X) &= 0 \text{ dla prawie każdego } (t, X) \in [0, T] \times [0, 1],
 \end{aligned}
 \tag{15}$$

gdzie:

$Y_{(\cdot)}^*(t, X)$ - funkcja całkowalna w kwadracie w obszarze $[0, T] \times [0, 1]$, wyznaczająca pewien funkcjonal liniowy Y^* , będąca różniczką funkcji Lagrange'a i związana z Y^* zależnością:

$$Y^*(\cdot) = \int_0^T \int_0^1 Y_{(\cdot)}^*(t, X) (\cdot) \, dX dt
 \tag{15'}$$

oraz

$$\varphi_1 \lambda_1^*(t, X) = 0 \text{ dla prawie każdego } (t, X) \in [0, T] \times [0, 1],
 \tag{16}$$

gdzie znakiem * oznaczono funkcje (i operacje nad nimi), odpowiadające punktowi optymalnemu.

Ogólnie pierwszy warunek w (15) oznacza ([7]), że albo $\hat{u}^* = 0$ i wtedy $Y_{\hat{u}^*}^* \leq 0$, albo gdy $\hat{u}^* > 0$ to wtedy $Y_{\hat{u}^*}^* = 0$, dla pewnych $(t, X) \in [0, T] \times [0, 1]$.

Ponieważ w danym zadaniu rozważa się przypadek drugi, zatem pierwszy warunek w (15) przyjmuje postać

$$Y_{\hat{u}^*}^* = 0. \quad (15'')$$

Ogólnie warunek (16) oznacza, że albo $\varphi_1 \neq 0$ i wtedy $\lambda_1^* = 0$, dla pewnych $(t, X) \in [0, T] \times [0, 1]$, albo $\varphi_1^* = 0$ i wtedy $\lambda_1^* \neq 0$, dla pewnych $(t, X) \in [0, T] \times [0, 1]$.

Ponieważ w danym zadaniu rozważa się przypadek drugi, zatem z (16) otrzymuje się

$$\varphi_1^* = 0. \quad (16')$$

4.7. Silne różniczki funkcji Lagrange'a obliczone w punkcie optymalnym, kolejno względem $\hat{u}, \hat{f}_\Omega^r, \hat{f}_\Omega^v$ wyrażają się wzorami:

$$Y^*(\hat{u}) = \int_0^T \int_0^1 \left\{ -2 \left[z_m(t) - \int_0^1 [S_m \hat{u}^*(t, X') - u_p(X')] + \right. \right. \\ \left. \left. + \hat{f}_\Omega^{v*} \right] \delta(X - X_m) dX' \right\} S_m \delta(X - X_m) + \lambda_1^*(t, X) \} \hat{u} dXd t, \quad (17)$$

$$Y^*(\hat{f}_\Omega^r) = \int_0^T \int_0^1 2 \left\{ \hat{f}_\Omega^{r*} \hat{f}_\Omega^r - \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 K(t-t', X, X') \hat{f}_\Omega^r(t', X') dX' dt' \cdot \right. \\ \left. \cdot \lambda_1^*(t, X) \right\} dXd t, \quad (18)$$

$$Y^*(\hat{f}_\Omega^v) = \int_0^T \int_0^1 2 \left\{ \hat{f}_\Omega^{v*} \delta(X - X_m) - \left[z_m(t) - \int_0^1 [S_m [\hat{u}^*(t, X') - u_p(X')] + \right. \right. \\ \left. \left. + \hat{f}_\Omega^{v*}(t, X')] \delta(X' - X_m) \right] dX' \delta(X - X_m) \right\} \hat{f}_\Omega^v dXd t. \quad (19)$$

Przekształcając (18) otrzymano (po zapisaniu całki niewłaściwej tam występującej jako granicy i zastosowaniu przekształcenia Dirichleta [8]) zależność o postaci jak (15')

$$Y^*(\hat{f}_\Omega^r) = \int_0^T \int_0^1 2 \left\{ \hat{f}_\Omega^{r*} - \int_t^T \int_0^1 K(t-t', X', X) \lambda_1^*(t', X') dX' dt' \right\} \hat{f}_\Omega^r(t, X) dXd t. \quad (18')$$

Zatem warunki (15) z uwzględnieniem (15'') dla danego zadania są następujące:

$$-2 \left[z_m(t) - \int_0^1 [S_m [\hat{u}^*(t, X') - u_p(X')] + \hat{f}_\Omega^{v*}(t, X')] \delta(X' - X_m) dX' \right] S_m \delta(X - X_m) + \lambda_1^*(t, X) = 0, \quad (20a)$$

$$\hat{f}_\Omega^{r*} - \int_t^T \int_0^1 \lambda_1^*(t', X') K(t-t', X', X) dX' dt' = 0, \quad (20b)$$

$$\hat{f}_\Omega^{v*} \delta(X - X_m) - \left[z_m(t) - \int_0^1 [S_m [\hat{u}^*(t, X') - u_p(X')] + \hat{f}_\Omega^{v*}(t, X')] \delta(X' - X_m) dX' \right] \delta(X - X_m) = 0. \quad (20c)$$

Warunki (16) dla danego zadania są następujące

$$\hat{u}^*(t, X) - u_p(X) - \int_0^t \int_0^1 K(t-t', X, X') [u_0(t', X') \delta(X' - X_0) + \hat{f}_\Omega^{r*}(t', X')] dX' dt' = 0. \quad (21)$$

Wyznaczając zatem: nieujemną prawie wszędzie funkcję $\lambda_1^*(t, X)$, funkcje \hat{u}^* , \hat{f}_Ω^{r*} spełniające ograniczenia (11a), (11b) i funkcję \hat{f}_Ω^{v*} tak, aby były spełnione warunki (20a), (20b), (20c) i (21) znajduje się rozwiązanie optymalnego danego zadania na mocy twierdzenia 1, [1]. Ponieważ spełnione są także założenia twierdzenia 2, [1], to dla rozwiązania optymalnego musi istnieć $\lambda_1^*(t, X)$.

5. Rozwiązanie analityczne danego zadania estymacji optymalnej

5.1. Z równań (20a), (20b), (20c), (21) można wyznaczyć szukane funkcje dla rozwiązania optymalnego.

Należy tu zaznaczyć, że stosowanym schematem rozwiązania zadania szukania ekstremum funkcjonału przy ograniczeniach (ogólnie nierównościowych) metodą funkcjonałów Lagrange'a, jest najpierw przewidzenie kształtu rozwiązania, spełniającego ograniczenia, a następnie dla tego rozwiązania wyznaczenie funkcji tworzącej λ_1 funkcjonał Lagrange'a $\tilde{\lambda}_1$, takiej aby były spełnione równania wynikające z twierdzenia o warunkach dostatecznych rozwiązania. Równania te dają zarazem związki pozwalające na ścisłe wyznaczenie rozwiązania zadania.

Jak można zauważyć kolejne elementy tego schematu zostały zastosowane przy wyprowadzaniu równań (20a), (20c) i (24).

5.2. Z równania (20c) pamiętając, że $\hat{u}^*(t, X) = \hat{u}^*(t, X) + u_p(X)$, otrzymuje się

$$\hat{f}_{\Omega}^{v*}(t, X) \delta(X - X_m) = \left[z_m(t) - \int_0^1 [S_m \hat{u}^*(t, X') + \hat{f}_{\Omega}^{v*}(t, X')] \delta(X' - X_m) dX' \right] \delta(X - X_m). \quad (22)$$

Całkując (22) obustronnie po X od 0 do 1 oraz wykonując całkowanie w nawiasie kwadratowym otrzymuje się

$$\hat{f}_{\Omega}^{v*}(t, X_m) = z_m(t) - S_m \hat{u}^*(t, X_m) - \hat{f}_{\Omega}^{v*}(t, X_m)$$

i ostatecznie

$$\hat{f}_{\Omega}^{v*}(t, X_m) = \frac{1}{2} [z_m(t) - S_m \hat{u}^*(t, X_m)] \quad (23)$$

oraz

$$\hat{f}_{\Omega}^{v*}(t, X) = 0 \quad \text{dla } X \neq X_m.$$

Podstawiając (23) do (20a) otrzymano

$$\lambda_1^*(t, X) = \left[z_m(t) - \int_0^1 S_m \hat{u}^*(t, X') \delta(X' - X_m) dX' \right] S_m \delta(X - X_m), \quad (24)$$

zatem

$$\lambda_1^*(t, X_m) = [z_m(t) - S_m \hat{u}^*(t, X_m)] S_m \quad (24')$$

oraz

$$\lambda_1^*(t, X) = 0 \quad \text{dla } X \neq X_m.$$

Przekształcając (20b) otrzymuje się

$$(20b) \quad \hat{f}_\Omega^{r*}(t, X) = \frac{1}{2} \int_0^t \int_0^1 K(t-t', X', X) \kappa_1^*(t', X') dX' dt'.$$

Po podstawieniu do (20b') zależności (24) otrzymuje się

$$\hat{f}_\Omega^{r*}(t, X) = \frac{1}{2} \int_0^t K(t-t', X_m, X) [z_m(t') - S_m \hat{u}^*(t', X_m)] S_m dt'. \quad (25)$$

Podstawiając (25) do (21) otrzymuje się ostateczne równanie, z którego można wyznaczyć $\hat{u}^*(t, X)$

$$\begin{aligned} \hat{u}^*(t, X) = & D(t, X) + P(t, X) - S_m^2 \int_0^t \int_0^1 K(t-t', X, X') \cdot \\ & \cdot \frac{1}{2} \int_{t'}^t K(t''-t', X_m, X') \hat{u}^*(t'', X_m) dt'' dX' dt', \end{aligned} \quad (26)$$

gdzie:

$$D(t, X) = \int_0^t \int_0^1 K(t-t', X, X') u_0(t', X') \delta(X' - X_0) dX' dt',$$

$$P(t, X) = S_m \int_0^t \int_0^1 K(t-t', X, X') \frac{1}{2} \int_{t'}^t K(t''-t', X_m, X) z_m(t'') dt'' dX' dt'.$$

Po przekształceniu (26) można zapisać w bardziej zwartej formie jako

$$\hat{u}^*(t, X) = F(t, X) + \lambda \int_0^t R[t, t', X, \hat{u}^*(t'', X_m)] dt', \quad (27)$$

gdzie:

$$F(t, X) = D(t, X) + P(t, X),$$

$$R[t, t', X, \hat{u}^*(t'', X_m)] =$$

$$= \int_{t'}^t \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha_i(t-2t'')} \sin(\beta_i X_m) \sin(\beta_i X) \hat{u}^*(t'', X_m) dt'', \quad (28)$$

$$\lambda = -S_m^2.$$

5.3. Równanie (27) jest nieliniowym równaniem całkowym typu Volterry drugiego rodzaju względem czasu $t \in [0, T]$ (współrzędna X jest tu parametrem).

5.4. Rozwiązaniem danego zadania estymacji optymalnej jest zatem estymata optymalna gęstości mocy $\hat{u}^*(t, X)$ określona wzorem (27). Inne funkcje minimalizujące wskaźnik jakości estymacji (6) wyznacza się ze wzorów (23) i (25).

6. Przybliżone rozwiązanie danego zadania estymacji optymalnej

6.1. Do przybliżonego rozwiązania danego zadania estymacji optymalnej zastosowano metodę podaną w [1].

Rozwiązanie to podano w postaci algorytmu, wyprowadzając i omawiając występujące w nim zależności.

6.2. Pierwszym etapem w schemacie rozwiązania jest dyskretyzacja zmiennej przestrzennej. W rozwiązany przypadku wektor, wynikający z dyskretyzacji ma postać

$$X_i = [i(\Delta X_1)], \quad (29)$$

gdzie:

$$i = 0, 1, 2, \dots, N,$$

$$\text{np. } N = \frac{1}{\Delta X_1} = 10, \text{ dla kroku dyskretyzacji } X_1 = 0, 1.$$

Dyskretyzując równania (1), (2), (3) oraz (6) i (7) otrzymano zależności (przyjmując $X_0 = 0, 5$, $X_m = 0, 2$ oraz $t_0 = 0$ i podstawiając estymaty \hat{u} zamiast u) opisujące problem aproksymujący zadanie (I):

(III)

$$\frac{d}{dt} \hat{U}(t) = A \hat{U}(t) + M(t) + \hat{F}^r(t), \quad (30)$$

$$\hat{U}(t_0) = \hat{U}(0) = \theta \quad (31)$$

gdzie:

θ wektor o składowych równych zero,

$$\begin{aligned} \theta = \int_0^T \left\{ \left[\hat{F}^r(t) \right]^T \hat{F}^r(t) + \left[\hat{f}_{\hat{a}_2}^v(t) \right]^2 + \right. \\ \left. + \left[z_2(t) - S_2 \hat{u}_2(t) - \hat{f}_{\hat{a}_2}^v(t) \right]^2 \right\} dt, \end{aligned} \quad (32)$$

$$\hat{U}(t) + U_p \geq 0, \quad (33)$$

gdzie występujące w (30) ÷ (33) wektory definiowane są następująco:

$$\hat{U}(t) \triangleq [\hat{u}_1(t), \hat{u}_2(t), \dots, \hat{u}_9(t)]^{Tr},$$

$$U_p \triangleq [u_p(0, 1 \cdot \pi), u_p(0, 2 \cdot \pi), \dots, u_p(0, 9 \cdot \pi)]^{Tr},$$

$$\hat{F}^r(t) = [\hat{f}_{\Omega 1}^r, \hat{f}_{\Omega 2}^r, \dots, \hat{f}_{\Omega 9}^r]^{Tr}.$$

$\hat{f}_{\Omega 2}^v(t)$ jest elementem wektora $\hat{F}^v(t) = [0, \hat{f}_{\Omega 2}^v, 0, 0, 0, 0, 0, 0, 0]^{Tr}$, $M(t) \triangleq [0, 0, 0, 0, u_0(t, X), 0, 0, 0, 0]^{Tr}$, Tr oznacza transpozycję.

Macierz A zdefiniowana jest jako:

$$A = \frac{D_u}{\Delta X_1^2}$$

$-2 + \sum_u, 1, 0,$	$0, 0, 0,$	$0, 0, 0,$
$1, -2 + \sum_u, 1,$	$0, 0, 0,$	$0, 0, 0,$
$0, 1, -2 + \sum_u$	$1, 0, 0,$	$0, 0, 0,$
$0, 0, 1$	$-2 + \sum_u, 1, 0,$	$0, 0, 0,$
$0, 0, 0,$	$1, -2 + \sum_u, 1,$	$0, 0, 0,$
$0, 0, 0,$	$0, 1, -2 + \sum_u$	$1, 0, 0,$
$0, 0, 0,$	$0, 0, 1,$	$-2 + \sum_u, 1, 0,$
$0, 0, 0,$	$0, 0, 0,$	$1, -2 + \sum_u, 1,$
$0, 0, 0,$	$0, 0, 0,$	$0, 1, -2 + \sum_u$

6.3. Następnym krokiem rozwiązania zadania (III) jest przekształcenie go w zadanie bez ograniczeń nierównościowych przez zastosowanie funkcji kary. Dla danego przypadku przyjęto następującą funkcję kary przesuniętą:

$$\Lambda[\hat{U}+U_p, \varepsilon] = \begin{cases} \left[[\hat{U} + U_p] [E\varepsilon]^{-1} \right]^{\text{Tr}} [(\cdot)], & \text{dla } \hat{U}+U_p < -\varepsilon \\ 0 & , \text{ dla } \hat{U}+U_p \geq -\varepsilon \end{cases} \quad (34)$$

gdzie:

$\varepsilon \triangleq [\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_9]^{\text{Tr}}$ - wektor składowych dodatnich,
 E - macierz jednostkowa.

Dodając funkcję kary Λ do (32) otrzymano wskaźnik jakości dla zadania bez ograniczeń nierównościowych

$$\tilde{\beta} = \int_0^T \left\{ \left[\hat{F}^r(t) \right]^{\text{Tr}} \hat{F}^r(t) + \hat{F}_{\Omega 2}^v(t) \right\}^2 + \left[z_2(t) - S_2 \hat{u}_2(t) - \hat{F}_{\Omega 2}^v(t) \right]^2 + \Lambda \Big\} dt. \quad (35)$$

Obecnie zadaniem estymacji optymalnej, aproksymującym zadanie (I) jest znalezienie minimum funkcjonału (35) względem \hat{U} , \hat{F}^r , \hat{F}^v przy ograniczeniach (31) i (33).

6.4. W wyniku dekompozycji zadania aproksymującego, podzielono wektory \hat{U} , M , \hat{F}^r na trzy podwektory, o trzech składowych każdy oraz macierz A na 3 podmacierze o wymiarach 3×3 :

$$\hat{U} \triangleq \begin{bmatrix} \hat{U}_1 \\ \hat{U}_2 \\ \hat{U}_3 \end{bmatrix}, \quad M \triangleq \begin{bmatrix} M_1 \\ M_2 \\ M_3 \end{bmatrix}, \quad \hat{F}^r \triangleq \begin{bmatrix} \hat{F}_1^r \\ \hat{F}_2^r \\ \hat{F}_3^r \end{bmatrix},$$

$$A = \begin{bmatrix} A_{11}, & A_{12}, & A_{13}, \\ A_{21}, & A_{22}, & A_{23}, \\ A_{31}, & A_{32}, & A_{33}, \end{bmatrix}, \quad \hat{U}(0) = \begin{bmatrix} \hat{U}_1(0) \\ \hat{U}_2(0) \\ \hat{U}_3(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \theta_1 \\ \theta_2 \\ \theta_3 \end{bmatrix},$$

gdzie

$\theta_1, \theta_2, \theta_3$, - wektory o składowych równych zero.

Po wprowadzeniu wektorów interakcji $S_j, j=1,2,3$, każdego o trzech składowych, równania ograniczeń (31) i (33) przyjmują następującą postać:

$$\frac{d}{dt} \hat{U}_j = A_{jj} \hat{U}_j + M_j + \hat{F}_j^r + D_j S_j, \\ \hat{U}_j(0) = \theta, \quad j = 1, 2, 3, \quad (36)$$

gdzie macierze D_j są równe

$$D_1 = A_{12} \frac{D_u}{(\Delta x_1)^2}, \quad D_2 = A_{21} + A_{23} \frac{D_u}{(\Delta x_1)^2}, \quad D_3 = A_{32} \frac{D_u}{(\Delta x_1)^2},$$

$$\text{oraz } S_1 = [0, 0, s_3], \quad S_2 = [s_4, 0, s_6], \quad S = [s_7, 0, 0].$$

Funkcjonał (35) można także przedstawić w postaci sumy funkcyjonałów. Mianowicie:

$$\tilde{\beta} = \sum_{j=1}^3 \int_0^T \left\{ (\hat{F}_j^r)^{Tr} \hat{F}_j^r + (\hat{F}_j^v)^{Tr} \hat{F}_j^v + \Lambda_j + R_j \right\} dt, \quad (37)$$

gdzie:

\hat{F}_j^v - podwektory wektora \hat{F}^v ,

$$\hat{F}^v = \left[\hat{F}_1^v, \hat{F}_2^v, \hat{F}_3^v \right]^{Tr}$$

$$\Lambda_j = \begin{cases} \left[\left[U_j + U_{pj} \right] \left[E \varepsilon_j \right]^{-1} \right]^{Tr} [(\cdot)], & \text{dla } \hat{U}_j + U_{pj} < -\varepsilon_j \\ 0, & \text{dla } \hat{U}_j + U_{pj} \geq -\varepsilon_j \end{cases}$$

$$R_1 \triangleq \left[z_2 - S_2 \dot{u}_2 - \hat{f}_{02}^v \right]^2,$$

$$R_2 = R_3 = 0,$$

przy czym wektory U_p i ε zostały podzielone na trzy podwektory:

$$U_p = \begin{bmatrix} U_{p1} \\ U_{p2} \\ U_{p3} \end{bmatrix}, \quad \varepsilon = \begin{bmatrix} \varepsilon_1 \\ \varepsilon_2 \\ \varepsilon_3 \end{bmatrix}.$$

6.5. Hamiltonian dla zadania minimalizacji (37) przy ograniczeniu (36) przedstawia się jak następuje:

$$H = \sum_{j=1}^3 \left\{ (\hat{F}_j^r)^{Tr} \hat{F}_j^r + (\hat{F}_j^v)^{Tr} \hat{F}_j^v + \Lambda_j + R_j + \right. \\ \left. + \lambda_j [A_{jj} \hat{U}_j + M_j + \hat{F}_j^r + D_j S_j] + \varrho_j \left[\sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^3 C_{jk} \hat{U}_k - S_j \right] \right\}, \quad (38)$$

gdzie:

λ_j - wektory zmiennych sprzężonych, definiowane następująco:

$$\lambda_1 = [\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3]^{Tr},$$

$$\lambda_2 = [\lambda_4, \lambda_5, \lambda_6]^{Tr},$$

$$\lambda_3 = [\lambda_7, \lambda_8, \lambda_9]^{Tr},$$

ϱ_j - wektory mnożników Lagrange'a definiowane następująco:

$$\varrho_1 = [\varrho_1, \varrho_2, \varrho_3],$$

$$\varrho_2 = [\varrho_4, \varrho_5, \varrho_6],$$

$$\varrho_3 = [\varrho_7, \varrho_8, \varrho_9],$$

C_{jk} - macierze interakcji definiowane następująco:

$$C_{12} = A_{12},$$

$$C_{13} = 0,$$

$$C_{21} = A_{21},$$

$$C_{23} = A_{23},$$

$$C_{31} = 0,$$

$$C_{32} = A_{32},$$

gdzie Q - macierz zerowa 3×3 wymiarowa.

6.6. Warunki konieczne optymalnego rozwiązania dla pierwszego poziomu są następujące:

problem 1

$$\frac{d}{dt} \hat{U}_1 = A_{11} \hat{U}_1 + \hat{F}_1^r + D_1 S_1,$$

$$\frac{d}{dt} \lambda_1 = -\frac{\partial}{\partial \hat{U}_1} [\lambda_1 + R_1] - A_{11} \lambda_1 - \frac{\partial}{\partial \hat{U}_1} \left[\hat{U}_1^{\text{Tr}} \sum_{k=2}^3 C_{k1}^{\text{Tr}} \varrho_k \right],$$

$$2 \hat{F}_1^r + \lambda_1 = \theta,$$

$$2 \hat{F}_1^r + \frac{\partial}{\partial \hat{F}_1^v} R_1 = \theta,$$

(39a)

przy

$$\hat{U}_1(0) = \theta,$$

$$\lambda_1(T) = \theta;$$

problem 2

$$\frac{d}{dt} \hat{U}_2 = A_{22} \hat{U}_2 + M_2 + \hat{F}_2^r + D_2 S_2,$$

$$\frac{d}{dt} \lambda_2 = -\frac{\partial}{\partial \hat{U}_2} \Lambda_2 - A_{22}^{\text{Tr}} \lambda_2 - \frac{\partial}{\partial \hat{U}_2} \left[\hat{U}_2^{\text{Tr}} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq 2}}^3 C_{k2}^{\text{Tr}} \varrho_k \right],$$

$$2 \hat{F}_2^r + \lambda_2 = \theta,$$

$$\hat{F}_2^v = \theta,$$

(39b)

przy

$$\hat{U}_2(0) = \theta,$$

$$\lambda_2(T) = \theta;$$

problem 3

$$\frac{d}{dt} \hat{U}_3 = A_{33} \hat{U}_3 + \hat{F}_3^r + D_3 S_3,$$

$$\frac{d}{dt} \lambda_3 = -\frac{\partial}{\partial \hat{U}_3} \Lambda_3 - A_{33}^{\text{Tr}} \lambda_3 - \frac{\partial}{\partial \hat{U}_3} \left[\hat{U}_3^{\text{Tr}} \sum_{k=1}^2 C_{k3}^{\text{Tr}} \varrho_k \right],$$

$$2 \hat{F}_3^r + \lambda_3 = \theta,$$

$$\hat{F}_3^v = \theta, \quad (39c)$$

przy

$$\hat{U}_3(0) = \theta,$$

$$\lambda_3(0) = \theta.$$

6.7. Z zależności

$$2 \hat{F}_1^v + \frac{\partial}{\partial \hat{F}_1^v} R_1 = \theta \quad (40)$$

można od razu wyznaczyć optymalne wartości \hat{F}_1^v w funkcji \hat{U}_1

$$\hat{F}_1^v = \begin{bmatrix} 0 \\ \hat{F}_{\Omega 2}^v \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{2} (z_2 - S_2 \hat{U}_2) \\ 0 \end{bmatrix}. \quad (40')$$

Optymalne \hat{F}_j^r wyznacza się w funkcji λ_j z zależności

$$\hat{F}_j^r = -\frac{1}{2} \lambda_j. \quad (41)$$

6.8. Eliminując z dwu pierwszych równań w (39a), (39b), (39c) \hat{F}_1^v i \hat{F}_j^r , wg zależności odpowiednio (40) i (41), otrzymano równania służące do wyznaczenia \hat{U}_j i λ_j dla $j=1,2,3$, przy założeniu, że S_j i Q_k są parametrami.

Równania te o postaci ogólnej:

$$\frac{d}{dt} \hat{U}_j = A_{jj} \hat{U}_j + M_j - \frac{1}{2} \lambda_j + D_j^{\text{Tr}} S_j = \alpha(\hat{U}_j, \lambda_j), \quad (42)$$

$$\frac{d}{dt} \lambda_j = B_j - A_{jj}^{\text{Tr}} \lambda_j - C_j(Q_k) = \gamma(\hat{U}_j, \lambda_j),$$

gdzie:

B_j - macierz diagonalna (3×3) wymiarowa będąca wynikiem operacji $\frac{\partial}{\partial \hat{U}_j} [\Lambda_j + R_j]$,

$C_j(Q_k)$ - wektor (3×1) wymiarowy, będący znaną funkcją parametru Q_k ,

z warunkami początkowymi dla $\hat{U}_j(0)$

oraz warunkami końcowymi dla $\lambda_j(T)$ równymi:

$$\begin{aligned}\hat{U}_j(0) &= \theta, \\ \lambda_j(T) &= \theta,\end{aligned}\tag{43}$$

stanowią tzw. problem dwugraniczny (two-point boundary value problem) przy rozwiązywaniu układu równań różniczkowych zwyczajnych. Do jego rozwiązania zastosowano transformację Riccatiego [9].

W wyniku otrzymano równanie:

$$\frac{d}{dt} \psi_j(t) = B_j - A_{jj} \psi_j(t) - \psi_j(t) A_{jj} - \frac{1}{2} \psi_j(t) \psi_j(t),\tag{44}$$

$$\frac{d}{dt} K_j(t) = \psi_j(t) \left[\frac{1}{2} K_j(t) - M_j - D_j^{\text{Tr}} S_j \right] - A_{jj} K_j(t) - C_j(q_k),$$

z warunkami końcowymi:

$$\begin{aligned}\psi(T) &= 0, \\ K(T) &= \theta,\end{aligned}\tag{45}$$

gdzie:

$\psi_j(t)$ - (3×3) wymiarowa macierz funkcji czasu,

$K(t)$ - (3×1) wymiarowy wektor funkcji czasu.

Związek między ψ, K , a \hat{U}_j i λ_j dany jest przez zależność

$$\lambda_j = \psi_j \hat{U}_j + K_j.\tag{46}$$

Rozwiązując układ równań (44) "od końca" otrzyma się $\psi_j(t)$ dla $t \in [0, T]$. Z zależności (46) wyznacza się $\lambda_j(\hat{U}_j)$ i po podstawieniu do pierwszego równania w (42) otrzymuje równanie różniczkowe względem \hat{U}_j z warunkiem początkowym $\hat{U}_j(0) = \theta$.

W rezultacie wyznacza się \hat{U}_j i λ_j .

Rozwiązanie układu (44) z warunkami (45) "od końca" polega na formalnym odwróceniu osi czasu przez podstawienie $t = T - t'$, gdzie t' - czas na odwrotnej osi czasu.

Do numerycznego rozwiązania układu (44) jak również pierwszego równania układu (42) można zastosować jedną z metod

całkowania numerycznego układu równań różniczkowych zwyczajnych [10].

6.9. Występujące w równaniach (39a) - (39c) pierwszego poziomu jako parametry S_j i q_k są wyznaczone z równań koordynujących drugiego poziomu o postaci

$$S_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^3 C_{jk} \hat{U}_k,$$

$$q_k = D_k^{\text{Tr}} \lambda_k, \quad (47)$$

dla $j, k, = 1, 2, 3,$

gdzie

\hat{U}_k i λ_k zostały uprzednio wyznaczone na pierwszym poziomie rozwiązania.

6.10. Jako kryterium zbieżności metody GSC (Gauss-Seidel Controller) można przyjąć normę:

$$\|e_j\|_i = \int_0^T \left\{ \left\| S_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^3 C_{jk} \hat{U}_k \right\|_i + \left\| q_j - D_j^{\text{Tr}} \lambda_j \right\|_i \right\} dt \leq \delta_j \quad (48)$$

dla $j = 1, 2, 3,$

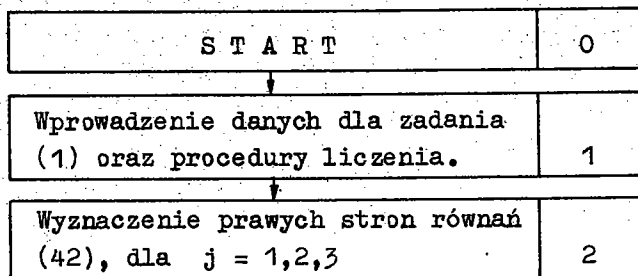
gdzie:

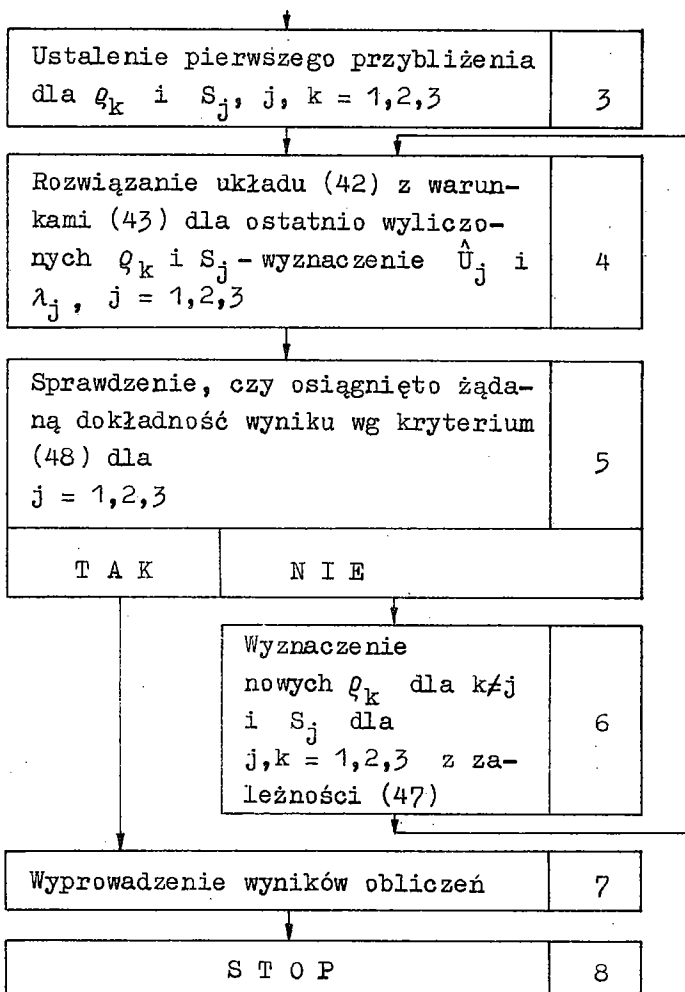
i - numer iteracji,

$$\|A_j - B_j\|_i \triangleq \sum_{l=1}^3 |(a_l)_j - (b_l)_j|_i,$$

δ_j - żądana dokładność liczenia dla j -tego podproblemu.

6.11. Schemat blokowy procesu liczenia przedstawia się następująco:





6.12. Przedstawiony algorytm rozwiązania przybliżonego danego zadania estymacji optymalnej może być realizowany albo w maszynie cyfrowej albo w połączeniu hybrydowym maszyny cyfrowej z analogową. Dla danego, przykładowego, rozwiązania przybliżonego (przyjęcie kroku dyskretyzacji $\Delta x_1 = 0,1$) wybór między maszyną cyfrową a hybrydem może nie mieć istotnego wpływu na ekonomikę obliczeń. Jednakże przy znacznym zwiększeniu liczby punktów dyskretyzacji zastosowanie układu hybrydowego pozwoli na efektywniejsze przeprowadzenie obliczeń. Dotyczy to przede wszystkim szybszego rozwiązywania w maszynie analogo-

wej układów równań różniczkowych zwyczajnych (44) i pierwszego układu równań w (42), niż w maszynie cyfrowej. W takim układzie hybrydowym analog wykonywałby obliczenia właściwe pierwszemu poziomowi rozwiązania zadania, maszyna cyfrowa koordynowałaby rozwiązania częściowe oraz przeprowadzała organizację samego procesu liczenia.

Warto tu wspomnieć o metodzie łańcuchowej rozwiązywania wielowymiarowych zadań optymalizacji dynamicznej przy użyciu symulatora elektrycznego [11].

Problem analizy zgodności rozwiązania przybliżonego według przedstawionej tu metody z rozwiązaniem dokładnym omówiono ogólnie w [1].

7. Obliczenia numeryczne dla rozwiązania analitycznego danego zadania estymacji optymalnej

7.1. Jak można łatwo zauważyć, efektywne wyliczenie na drodze analitycznej $\hat{u}^*(t, X)$ ze wzoru (27), jest niezwykle trudne.

Praktycznie estymatę $\hat{u}^*(t, X)$ należy wyliczać stosując jedną z metod przybliżonych rozwiązywania równań całkowych [10], [12], np. metodę kolejnych przybliżeń.

7.2. Istota metody kolejnych przybliżeń, zastosowanej do równania (27), jest następująca. Obiera się początkowe przybliżenie estymaty optymalnej $\hat{u}^*(t, X)$ jako dowolną funkcję ciągłą $\hat{u}_0^*(t, X)$ i podstawia do prawej strony równania (27). Otrzymuje się w ten sposób pewną funkcję $\hat{u}_1^*(t, X)$, będącą pierwszym przybliżeniem rozwiązania

$$\hat{u}_1^*(t, X) = F(t, X) + \lambda \int_0^t R(t, t', X, \hat{u}_0^*(t', X_m)) dt'.$$

Postępując z \hat{u}_1^* tak samo jak z \hat{u}_0^* otrzymuje się drugie przybliżenie, itd. W taki sposób dochodzi się do następującego wzoru iteracyjnego

$$\hat{u}_{n+1}^*(t, X) = F(t, X) + \lambda \int_0^t R(t, t', X, \hat{u}_n^*(t', X_m)) dt', \quad (49)$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Ogólnie zbieżność tej metody w zastosowaniu do równania (27), będzie zapewniona, jeżeli będzie spełniony następujący warunek [8]:

$$|\lambda| < \min \left(\frac{m_1}{M T}, \frac{T - m_2}{M T} \right),$$

gdzie:

- m_1 - kres dolny funkcji $F(t, X)$ dla danego X i $t \in [0, T]$,
- m_2 - kres górny funkcji $F(t, X)$ dla danego X i $t \in [0, T]$,
- T - długość przedziału czasu estymacji,
- M - kres górny funkcji $|R(t, t', X, r)|$, dla danego X , danego r oraz $t \in [0, T]$, $t' \in [0, t]$,
- r - zmienna liczbowa, dla której R spełnia warunek Lipschitza [8] oraz

$$p \leq r \leq q,$$

$$\text{gdzie: } p < m_1 \leq m_2 < q.$$

7.3. Jak widać, cała trudność przybliżonego rozwiązania równania całkowego (27) metodą kolejnych przybliżeń polega na obliczeniu całki w (49). Do jej obliczenia wykorzystano metodę Simpsona całkowania numerycznego [10]. Ale ponieważ w metodzie tej wymagany jest zawsze podział przedziału całkowania na parzystą ilość odcinków (nieparzystą liczbę punktów dyskretyzacji), dlatego zastosowano tu następujący schemat liczenia. Gdy dla danego czasu t i przyjętego kroku całkowania h_t wypadł podział nieparzysty, to w przedziale $[0, t - h_t]$ korzystano z metody Simpson'a, a w przedziale $[t - h_t, t]$ z metody trapezów.

Zatem w przypadku parzystego podziału przybliżona wartość całki w (49) wyrażała się wzorem

$$\begin{aligned} \mathcal{R}_n [r, X, \hat{u}^*(t, X_m)] &\cong Y(h_t, j, y_k) = \\ &= \frac{h_t}{3} \left[y_0 + y_j + 4 \sum_{k=1}^{j/2} y_{2k-1} + 2 \sum_{k=2}^{j/2} y_{2k-2} \right] \end{aligned} \quad (50)$$

gdzie:

\mathcal{R}_n - wartość całki w (49) dla danego t i X ,

- y_k - wartość funkcji podcałkowej w (49) dla czasu $t_k = k h_t$,
 $h_t = \frac{t}{j}$ - krok całkowania,
 j - parzysta liczba równych odcinków przedziału całkowania,
 $k = 0, 1, 2, \dots, j$ - numery punktów dyskretyzacji przedziału całkowania.

W przypadku nieparzystego podziału przybliżoną wartość całki w (49) wyliczono ze wzoru

$$\mathcal{R}_n = Y(h_t, j-1, y_k) + (y_j + y_{j-1}) \frac{h_t}{2}, \quad (51)$$

gdzie:

- $j-1$ - parzysta liczba odcinków przedziału całkowania,
 y_j - wartość funkcji podcałkowej całki w (49) dla $t = h_t j$;
 reszta oznaczeń jak w (50).

Wartość funkcji podcałkowej R (jądra równania całkowego) wyznaczono stosując całkowanie numeryczne prawej strony w (28) dla danych wartości $\hat{u}_n^*(t'', X_m)$. W wyniku otrzymano następujące zależności (stosując taki sam schemat liczenia jak poprzednio).

Dla podziału parzystego:

$$y_k \cong Y(h_t, M-k, z_1) = \frac{h_t}{3} \left(z_k + z_M + 4 \sum_{l=1}^{(M-k)/2} z_{k+2l-1} + 2 \sum_{l=2}^{(M-k)/2} z_{k+2l-2} \right), \quad (52)$$

gdzie:

- $M-k$ - parzysta liczba równych odcinków przedziału całkowania,
 $l = k, k+1, M$ - kolejne punkty dyskretyzacji przedziału całkowania,

$$z_1 = \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-\alpha_i (j-2k+1) h_t) \sin(\beta_i X_m) \sin(\beta_i X) \cdot \hat{u}^*(1 \times h_t, X_m),$$

α_i, β_i - jak we wzorze (10).

Dla podziału nieparzystego:

$$y_k \cong Y(h_t, M-k-1, z_1) + (z_{M-1} + z_M) \frac{h_t}{2}. \quad (53)$$

Ponieważ funkcja podcałkowa jądra R dla $t = t' = t''$ dąży do ∞ (szereg sinusów jest rozbieżny dla $0 < X_m < 1$ i $0 < X < 1$), to w celu policzenia całki $y_{k=j}$ zastosowano aproksymację polegającą na wyznaczeniu $z_{l=k=j}$ z zależności:

$$z_{l=k=j} \cong \sum_{i=1}^{\infty} \exp(-\alpha_i \varepsilon) \sin(\beta_i X_m) \sin(\beta_i X) \hat{u}^*(1 \cdot h_t, X_m), \quad (54)$$

gdzie

ε - zadana stała dodatnia, odpowiednio mała.

Błąd przybliżeń zastosowanych przy wyliczaniu wartości \mathcal{J}_n jest rzędu $O(h_t^4)$ przy całkowaniu metodą Simpsona i rzędu $O(h_t^2)$ przy metodzie trapezów. Wpływ przybliżenia $z_{l=k=j}$ wzorem (54) badać można zmniejszając ε w procesie liczenia i analizując zmiany w wynikach końcowych.

7.4. Przyjęto, że w procesie liczenia wyznaczona została estymata optymalna \hat{u}^* z żadaną dokładnością, gdy:

$$\left| \left[\hat{u}_{n+1}^*(t, X) - \hat{u}_n^*(t, X) \right] / \hat{u}_n^*(t, X) \right| \leq \delta \quad (55)$$

dla każdego $t \in [0, T]$ i $X \in [0, 1]$,

gdzie

δ - zadana dokładność liczenia.

W celu minimalizacji błędów zaokrągleń i obcięcia (round and truncation errors) w procedurze liczenia zastosowano skalowanie funkcji $\hat{u}^*(t, X)$ według zależności:

$$\hat{u}^*(t, X) = \hat{u}^*(t, X) \varrho_s, \quad (56)$$

gdzie

ϱ_s - mnożnik skalujący.

Zatem odpowiednie wyniki otrzymano w skali odpowiadającej ϱ_s .

7.5. Funkcję $F(t, X)$, która stanowiła jednocześnie przybliżenie początkowe estymaty optymalnej $\hat{u}_0^*(t, X)$ obliczono całkując analitycznie podane w (26) zależności, przy założeniu następujących postaci $u_0(t, X)$ i $z_m(t)$:

$$u_0(t, X) = U_0 = \text{const}, \quad (57)$$

$$z_m(t) = A_z \left(e^{\beta_z t} - 1 \right), \quad \text{dla } 0 < t < T. \quad (58)$$

Otrzymano następujące wyrażenie na $F(t, X)$:

$$\begin{aligned} F(t, X) = D(t, X) + P(t, X) = & 2 \sum_{i=1}^{\infty} \left[\frac{U_0}{\alpha_i} \left(e^{-\alpha_i t} - 1 \right) \sin(\beta_i X_0) + \right. \\ & + S_m^2 A_z \left[\frac{e^{\beta_z T} \cdot e^{-\alpha_i(T-t)}}{2\alpha_i (B_z - \alpha_i)} \left(1 - e^{-2\alpha_i t} \right) + \right. \\ & - \frac{1}{B_z^2 - \alpha_i^2} \left(e^{\beta_z T} - e^{-\alpha_i t} \right) - \frac{1}{\alpha_i^2} \left(e^{-\alpha_i(T-t)} + e^{-\alpha_i t} + \right. \\ & \left. \left. - e^{-\alpha_i(T+t)} - 1 \right) \right] \sin(\beta_i X_m) \left. \right] \sin(\beta_i X). \quad (59) \end{aligned}$$

Występującą w (59) sumę zbieżnego szeregu nieskończonego obliczono sumując kolejne wyrazy szeregu i obcinając resztę, gdy spełniony był warunek

$$\left| (a_{i+1} - a_i) / a_1 \right| < \varepsilon_r,$$

gdzie

ε_r - zadana wielkość dodatnia, odpowiednio mała.

7.6. Przekształcając wzór (25) otrzymano zależność, z której wyliczono $\hat{f}_\Omega^{r*}(t, X)$ dla danej $\hat{u}_{n+1}^*(t, X_m)$ i danego q_s :

$$(25') \quad \hat{f}_\Omega^{r*}(t, X) = Y_1(t, X) - S_m^2 Y_2(t, X),$$

gdzie:

$$Y_1(t, X) = A_Z S_m \sum_{i=1}^{\infty} \left\{ \frac{e^{\beta_Z t}}{B_Z + \alpha_i} \left[e^{(\beta_Z - \alpha_i)(T-t)} - 1 \right] + \frac{1}{\alpha_i} \left[e^{-\alpha_i(T-t)} - 1 \right] \right\} e^{-\alpha_i t} \sin(\beta_i X_m) \sin(\beta_i X), \quad (60)$$

$Y_2(t, X)$ dla parzystego przedziału całkowania wylicza się ze wzoru ogólnego (52), dla nieparzystego ze wzoru ogólnego (53), gdzie teraz funkcje podcałkowe z_1 dane są zależnościami:

dla $l \neq j$

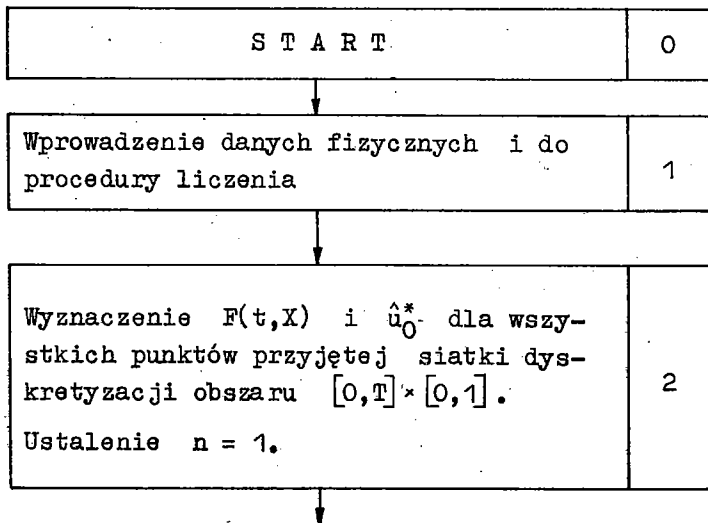
$$z_1 = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha_i(t-j)h_t} \sin(\beta_i X_m) \sin(\beta_i X) \hat{u}_{n+1}^*(lh_t, X_m),$$

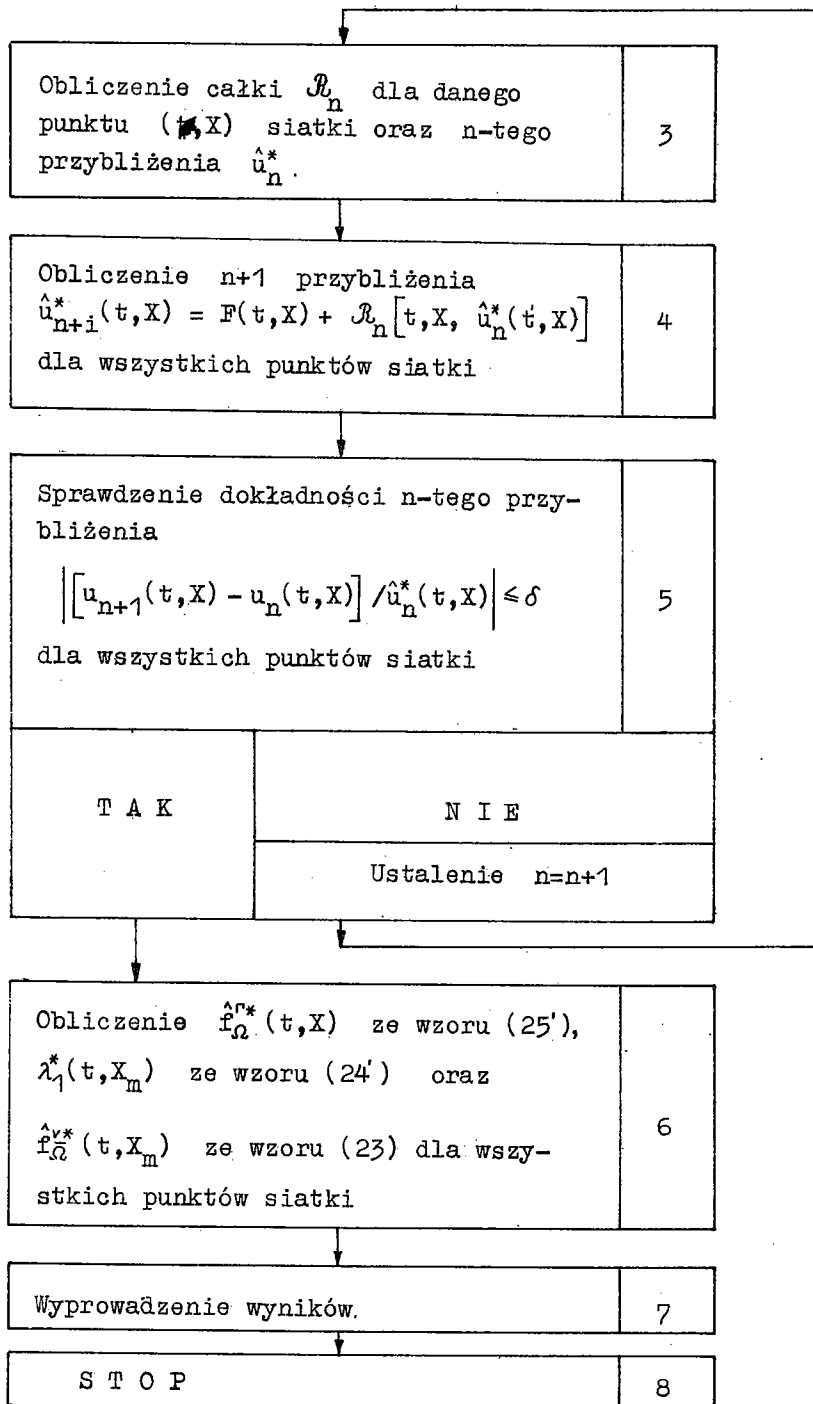
a dla $l = j$

$$z_1 = \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha_i t} \sin(\beta_i X_m) \sin(\beta_i X) \hat{u}_{n+1}^*(lh_t, X_m).$$

Funkcje $\hat{f}_n^*(t, X_m)$ i $\hat{\chi}_1^*(t, X_m)$ wyliczono odpowiednio z zależności (23) i (24) dla danej wartości $\hat{u}_{n+1}^*(t, X_m)$ oraz danej wartości q_s .

7.7. Schemat blokowy liczenia numerycznego przedstawia się następująco:





7.8. W przykładowych obliczeniach numerycznych przyjęto następujące dane liczbowe dla pięciu wariantów (od I do V):

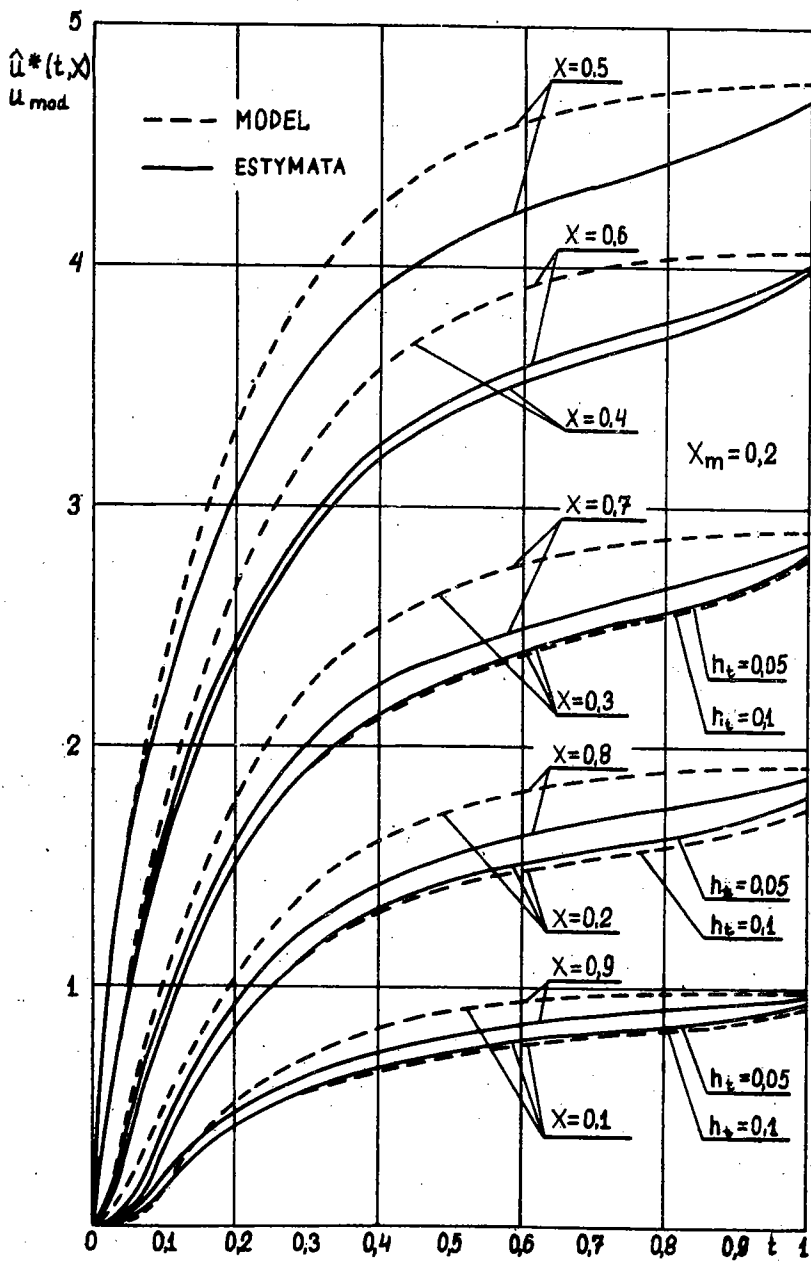
T a b l i c a 1

Lp.	Ozna- czenie	Znaczenie	Warianty				
			I	II	III	IV	V
1	D_u	współczynnik w równaniu 1	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
2	$\sum u$	współczynnik w równaniu 1	0.01	0.01	0.01	0.01	0.01
3	X_0	współrzędna przestrzenna zaburzenia punktowego	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
4	U_0	wartość zaburzenia w punkcie X_0	10	-10	10	-10	10
5	X_m	współrzędna przestrzenna	0.2	0.2	0.2	0.2	0.2
6	S_m	współczynnik w równaniu (4)	1	1	1	1	1
7	A_z	współczynnik w równaniu (58)	5	-5	1	-1	5
8	B_z	współczynnik w równaniu (58)	0.5	0.5	0.5	0.5	0.5
9	T	długość przedziału czasu estymacji	1	1	1	1	1
10	M	liczba kroków dyskretyzacji przedziału czasu estymacji	10	10	10	10	20
11	N	liczba kroków dyskretyzacji przedziału $[0,1]$ współrzędnej przestrzennej	10	10	10	10	10

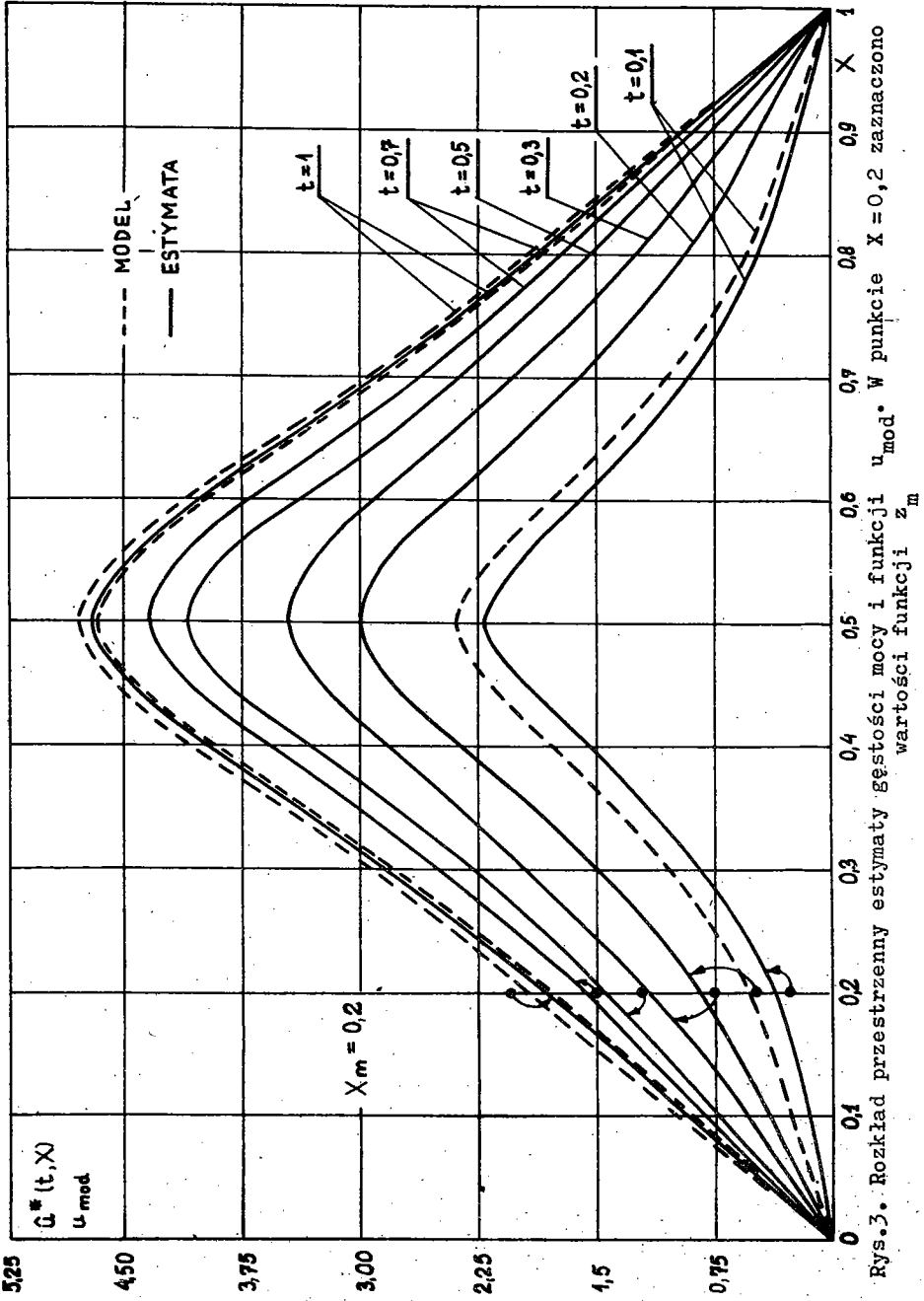
Lp.	Oznaczenie	Znaczenie	Warianty				
			I	II	III	IV	V
12	i_{\max}	zadana maksymalna liczba iteracji przy obliczaniu sumy szeregów nieskończonych	10^3	10^3	10^3	10^3	10^3
13	n_{\max}	zadana maksymalna liczba iteracji metody kolejnych przybliżeń	10^2	10^2	10^2	10^2	10^2
14	ε_{rF}	zadany błąd obcięcia sumy szeregu przy liczeniu $F(t, X)$, wzór (59)	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}
15	ε_{rR}	zadany błąd obcięcia sumy szeregu przy liczeniu całki \mathcal{R}_n , wzór (52)	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}
16	ε	zadana mała wielkość dodatnia do wzorów (54) oraz (61)	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$	$5 \cdot 10^{-3}$
17	δ	zadana dokładność liczenia metodą kolejnych przybliżeń	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}	10^{-2}

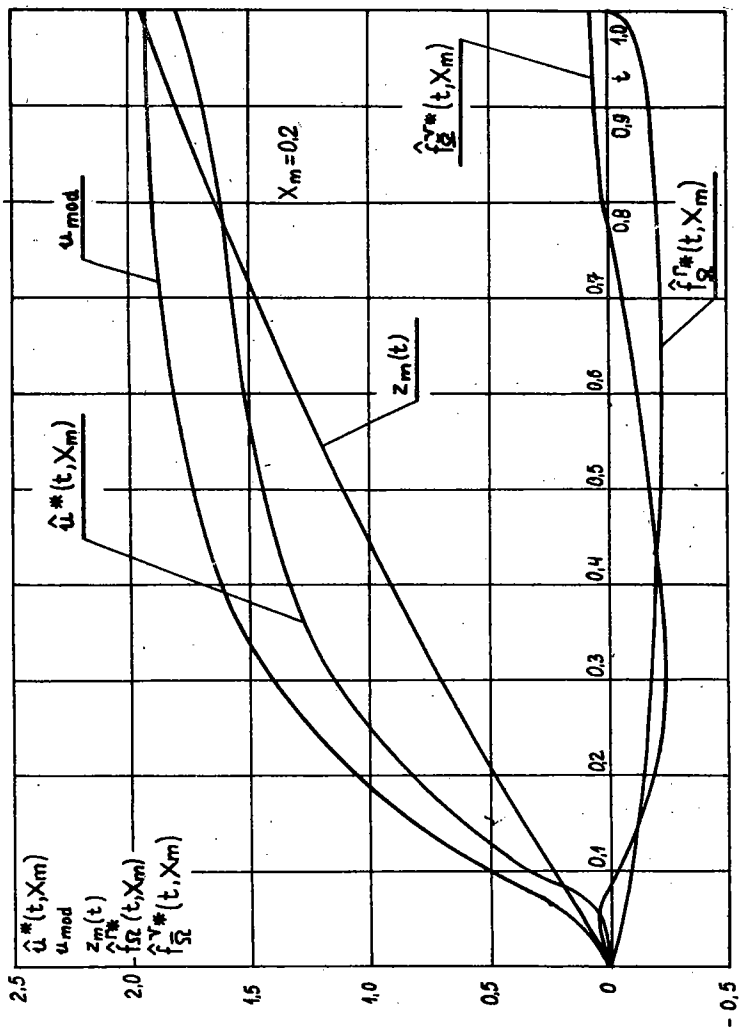
Ze względu na małą prędkość liczenia mc GIER udało się uzyskać wyniki tylko dla kroku całkowania po czasie $h_t = 0,1$ i $h_t = 0,05$ (dla danych z tablicy 1, dla kroków $h_t = 0,1$ i $h_x = 0,1$ czas liczenia jednej iteracji wyniósł 9 min, zaś dla $h_t = 0,05$ i $h_x = 0,1$ już 50 min).

7.9. Na rys.2 do 6 zaprezentowano uzyskane wyniki dla danych liczbowych wariantu I, tablica 1.

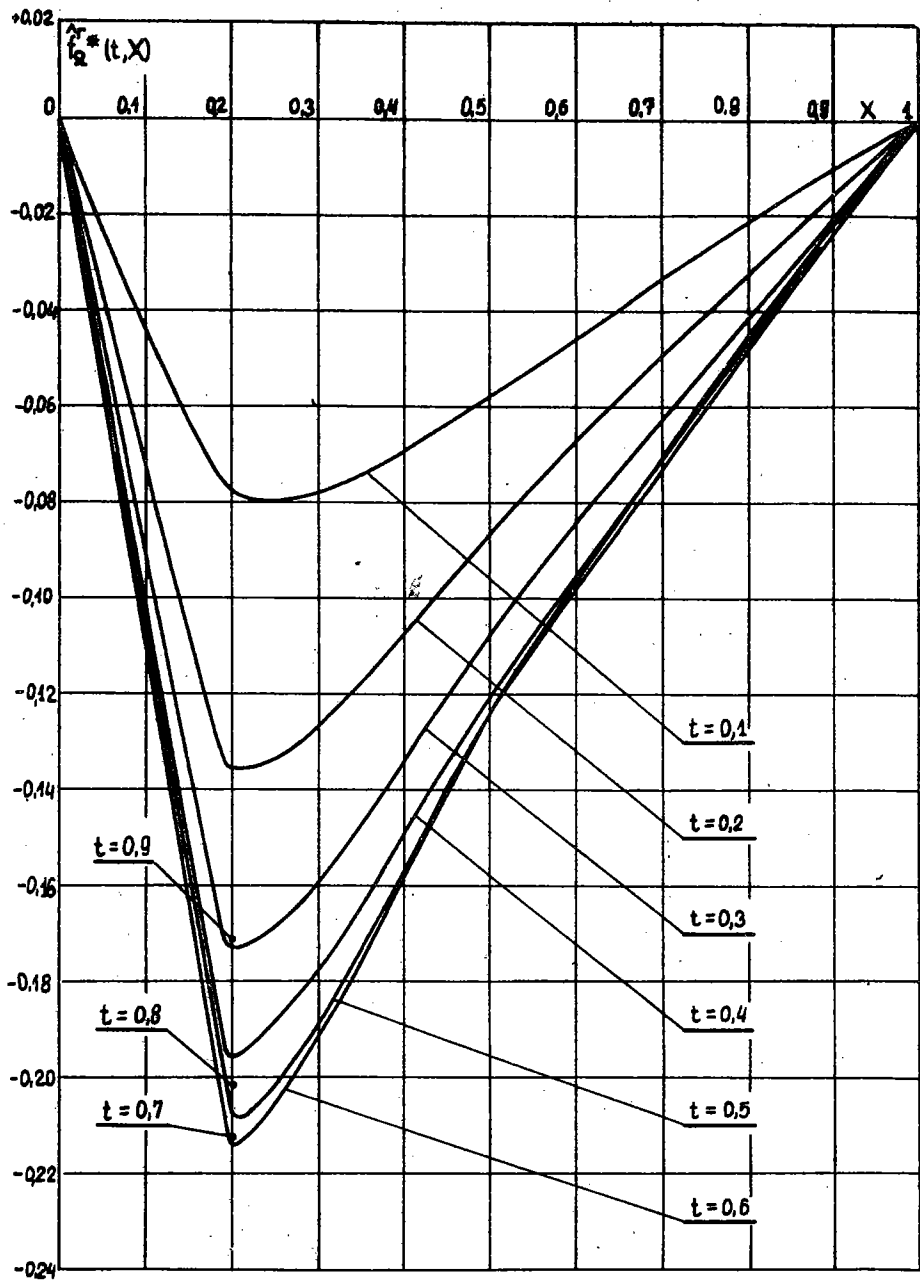


Rys.2. Zmiany w czasie estymaty gęstości mocy. Funkcja u_{mod} jest rozwiązaniem równania (1) dla $f_{\Omega}^r(t, X) = 0$

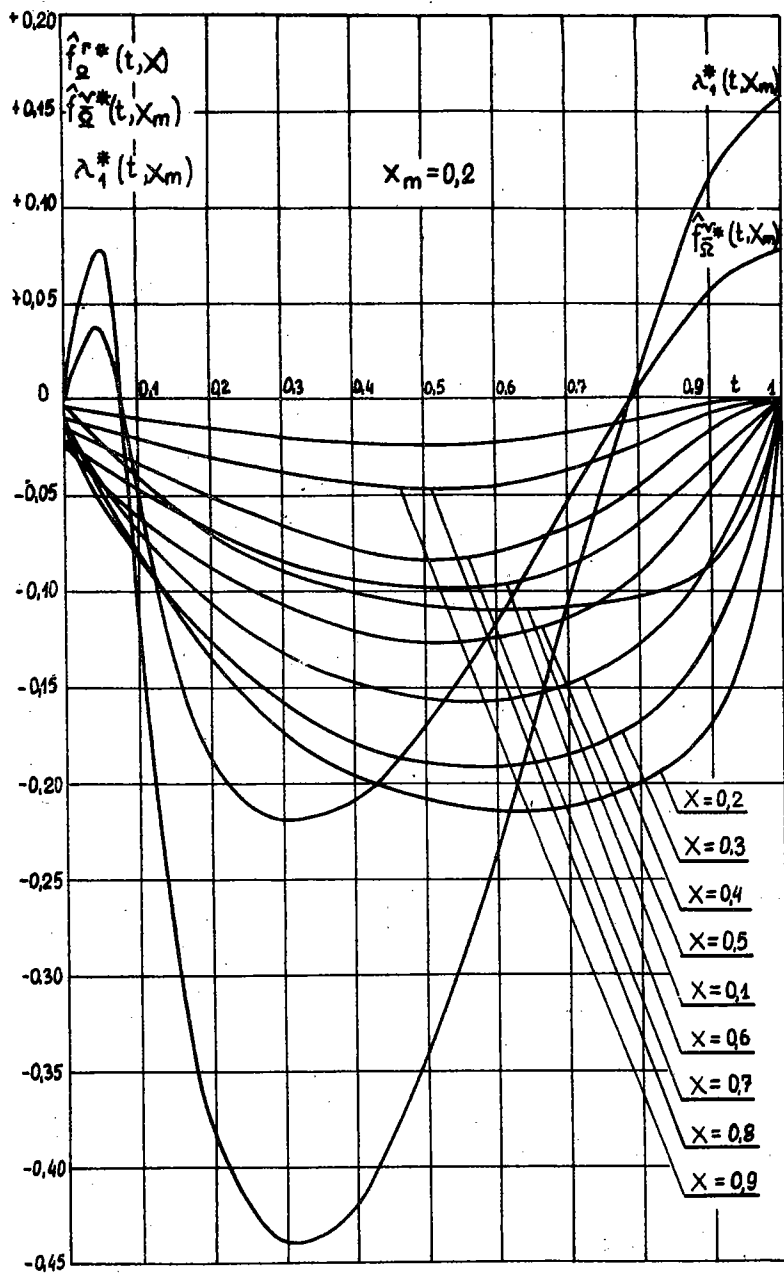




Rys. 4. Zmiany w czasie estymat gęstości mocy, funkcji błędu opisu dynamiki i obserwacji oraz funkcji z_m i u_{mod} w punkcie pomiarowym $X=0,2$



Rys.5. Rozkład przestrzenny estymaty funkcji błędu opisu dynamiki



Rys.6. Zmiany w czasie estymat błędów opisu dynamiki i obserwacji oraz funkcji λ_1^*

8. Dyskusja otrzymanych wyników

8.1. Na podstawie otrzymanych wyników analitycznych i numerycznych można wyprowadzić wnioski o charakterze jakościowym i ilościowym.

8.2. Wyniki obliczeń numerycznych dla danych z tabeli I, jak również innych danych, wykazały przydatność metody kolejnych przybliżeń do rozwiązania równania (27). Zbieżność przybliżonego rozwiązania uzyskiwano wg kryterium (55), już po 2, 3 lub 4 iteracjach, dla $\delta = 10^{-2}$.

Zmiana liczby ($M \geq 10$) kroków całkowania po czasie wpływa w nieznacznym stopniu na uzyskiwane wyniki dla danych z tablicy 1. Zwiększenie liczby M z 10 do 20 spowodowało zmiany w wartościach estymaty optymalnej $\hat{u}^*(t, X)$ o maksimum 2,5% i 3% odpowiednio dla $X=0,1$ i $X=0,2$. Dla pozostałych punktów przestrzeni zmiany te nie przekroczyły 1% (rys.2).

Nieco większy wpływ może mieć liczba kroków całkowania po czasie na wartość estymaty optymalnej $\hat{f}_{\Omega}^{r*}(t, X)$, a to ze względu na jej kształt (rys.5 i 6). Można zatem przyjąć za wystarczającą liczbę $M=10$.

8.3. Uzyskane dla danych przykładowych wyniki pokazały wpływ na oszacowanie rozkładu czasowo-przestrzennego gęstości mocy, przy zaburzeniu punktowym, zarówno funkcji $z_m(t)$ obserwowanej w punkcie pomiarowym, jak i funkcji $u_{\text{mod}}(t, X)$, charakteryzującej przejęty model zjawiska. Dla danego równania (1) modelu przejętego równania (4) sposobu obserwacji, można stwierdzić raczej dominującą rolę pierwszego oraz rolę korygującą drugiego.

Rozkład estymaty optymalnej $\hat{u}^*(t, X)$ w przestrzeni i w czasie jest podobny do rozkładu funkcji u_{mod} (rys. 2 i 3), ale zaznacza się tam wyraźnie wpływ funkcji $z_m(t)$, zwłaszcza w punkcie pomiarowym (rys.4) i bliskich mu punktach, szczególnie dla czasu $t=1$ (rys.2 i 4).

Także z przebiegu estymat optymalnych $\hat{f}_{\Omega}^{r*}(t, X)$ i $\hat{f}_{\Omega}^{y*}(t, X_m)$ (rys.5 i 6), sądzić należy, że rozkład gęstości mocy szacować można najlepiej w punkcie pomiarowym i w jego pobliżu, co jest zresztą zgodne z intuicją.

Jak widać, szczególnie na rys.2, pomiar w jednym punkcie reaktora w podobny sposób wpływa na rozkład funkcji $\hat{u}^*(t, X)$, zarówno dla $X=X_m$ jak i dla innych punktów przestrzeni (porównaj rys.2 i 4).

Zatem otrzymany wynik oszacowania rozkładu gęstości mocy na podstawie tego pomiaru w danym przypadku będzie poprawny, a ile ten pomiar (funkcja $z_m(t)$) obrazować będzie chociażby jakościowe zmiany prawdziwej funkcji stanu zjawiska w innych punktach przestrzeni.

Reasumując można stwierdzić, że im dokładniej wyznaczony będzie model dynamiki i obserwacji oraz im większa będzie liczba punktów pomiarowych, tym lepszemu oszacowaniu danego zjawiska należy oczekiwać (wg przyjętego wskaźnika jakości).

Należy dodać, że formalne rozpisanie algorytmu podanego powyżej, dla przypadku jednego punktu pomiarowego, na przypadek dowolnej liczby punktów pomiarowych nie następuje trudności. Znacznie wzrosnie jednak czas jego realizacji w maszynie cyfrowej.

8.4. Na zakończenie należy zwrócić uwagę na rolę i znaczenie fizyczne ograniczenia nierównościowego (7) w danym zadaniu estymacji optymalnej. W przypadku, gdy jest ono spełnione, np. dla odpowiednio dużych wartości funkcji $u_p(X)$, $X \in \bar{\Omega}$, to optymalny rozkład przestrzenno-czasowy gęstości mocy wynika z rozwiązania równania (27). W przypadku, gdy nie jest ono spełnione dla pewnych $(t, X) \in [0, T] \times [0, 1]$, to optymalną estymatę $\hat{u}^*(t, X)$ otrzymuje się z równania $\hat{u}^*(t, X) = -u_p(X)$.

Fizycznie odpowiada to całkowitemu zanikowi gęstości mocy w danym punkcie (t, X) .

W przytoczonym przykładzie numerycznym taki przypadek nie wystąpił.

9. Podsumowanie

W artykule przedstawiono analityczne i przybliżone rozwiązanie zadania optymalnej estymacji rozkładu przestrzenno-czasowego gęstości mocy w płytowym reaktorze jądrowym. Rozważono przypadek pojawienia się jednego zaburzenia punktowego oraz założono istnienie tylko jednego punktu pomiarowego.

Wyprowadzono równania określające warunki dostateczne i konieczne optymalnego rozwiązania danego zadania, stosując teorię funkcjonałów Lagrange'a. Wyniki analityczne uzyskano w postaci nieliniowego równania całkowego typu Volterry, które rozwiązano metodą kolejnych przybliżeń. Podano i omówiono algorytm tego rozwiązania, zamieszczając wyniki przykładowych obliczeń w postaci wykresów. Przeprowadzono dyskusję otrzymanych wyników analitycznych i numerycznych.

Rozwiązanie przybliżone, według proponowanej metody aproksymacji, podano w postaci algorytmu obliczeniowego, wyprowadzając i omawiając występujące w nim zależności.

Dodatek

D.1. Program AMOE

Program AMOE, którym wykonano obliczenia estymat optymalnych \hat{u}^* , \hat{f}_Ω^{r*} , \hat{f}_Ω^{v*} oraz funkcji λ_1^* i u_{mod} , napisany został wg algorytmu podanego w rozdziale 7, w języku GIER Algol 4, na maszynie cyfrową GIER w ZON UW.

Program pozwala na wyznaczenie wartości \hat{u}^* , \hat{f}_Ω^{r*} w siatce czasowo-przestrzennej, o wymiarach $(M+1) \times (N+1)$, przy czym spełniony musi być warunek

$$(M+1) \times (N+1) + 2 \times (M+1) \leq 4095, \quad (\text{D.1.1})$$

gdzie:

M - liczba kroków po czasie $t \in [0, T]$,

N - liczba punktów współrzędnej przestrzennej $X \in [0, 1]$.

W trakcie realizacji obliczeń, można uzyskać wydruk wartości \hat{u}^* z poszczególnych iteracji po włączeniu klucza KB.

Wartości \hat{f}_Ω^{r*} i λ_1^* , wyznaczone są w M punktach siatki czasowej, odpowiadającej współrzędnej $X = X_m$.

D.2. Obliczenie funkcji $u_{\text{mod}}(t, X)$

Funkcja $u_{\text{mod}}(t, X)$ rozkładu gęstości mocy, przy $f_\Omega^r = 0$, jest rozwiązaniem równania różniczkowego cząstkowego rzędu drugiego o postaci (porównaj punkt 2):

$$\frac{\partial}{\partial t} u_{\text{mod}}(t, X) =$$

$$= D_u \frac{\partial^2}{\partial X^2} u_{\text{mod}}(t, X) - \sum_u u_{\text{mod}}(t, X) + U_0 \delta(X - X_0), \quad (\text{D.2.1})$$

gdzie:

- D_u , \sum_u - stałe współczynniki,
 U_0 - wartość funkcji zaburzenia punktowego = const,
 X_0 - ustalona współrzędna, odpowiadająca punktowi zaburzenia.

Rozwiązanie równania (D.2.1) dane jest wzorem ogólnym

$$u_{\text{mod}}(t, X) = \int_0^t \int_0^1 K(t-t', X, X') U_0 \delta(X' - X_0) dX' dt', \quad (\text{D.2.2})$$

gdzie:

$$K(t-t', X, X') = 2 \sum_{i=1}^{\infty} e^{-\alpha_i(t-t')} \sin(\beta_i X) \sin(\beta_i X'),$$

$$\alpha_i = i^2 \pi^2 D_u - \sum_u,$$

$$\beta_i = i \pi.$$

Po wykonaniu całkowania w (D.2.2) otrzymano zależność określającą rozkład czasowo-przestrzenny funkcji $u_{\text{mod}}(t, X)$:

$$u_{\text{mod}}(t, X) = 2U_0 \sum_{i=1}^{\infty} [e^{-\alpha_i t} - 1] \frac{1}{\alpha_i} \sin(\beta_i X_0) \sin(\beta_i X) \quad (\text{D.2.3})$$

Obliczenia numeryczne wykonano podprogramem MODY, wchodzącym w skład programu AMOE.

BIBLIOGRAFIA

- [1] M a s ł o w s k i A.: "Metoda optymalnej estymacji pewnych procesów fizycznych na przykładzie modelu zjawisk zachodzących w reaktorze jądrowym".
 Biuletyn Informacyjny ITC nr 37, Warszawa 1973.
- [2] M a s ł o w s k i A.: "O optymalnej estymacji niektórych przestrzenno-czasowych procesów zachodzących w reaktorze jądrowym mocy".
 Biuletyn Informacyjny ITC nr 32, Warszawa 1970.

- [3] K r a m e r o w A.Ja., S z e w i e l i e w Ja,W.: Inżynieryjne rozrachunki jądrowych reaktorów. Atomizdat, Moskwa 1964.
- [4] T i c h o n o w A.N., S a m a r s k i A.B.: Równania fizyki matematycznej. PWN. Warszawa 1963.
- [5] K r e j n S.G. red.: Analiza funkcjonalna. PWN, Warszawa 1967.
- [6] K u l i k o w s k i R.: Sterowanie w wielkich systemach. WNT. Warszawa 1970.
- [7] M a j e r c z y k - G ó m u ł k a J., M a k o w s k i K.: Wyznaczenie optymalnego sterowania procesu dynamicznego metodą funkcjonalów Lagrange'a". Arch. Aut. i Telem. zeszyt 2,3, tom XIII.1968.
- [8] P o g o r z e l s k i W.: Równania całkowe i ich zastosowania. Tom I i II. PWN. Warszawa 1953.
- [9] P i e r r e D.A.: Optimization theory with applications. John Wiley, 1969.
- [10] P r a c a z b i o r o w a: Metody przybliżonych obliczeń. WNT. Warszawa 1966 (tłumaczenie z rosyjskiego).
- [11] K u r m a n K.: "Chain models as inertialess optimal controllers of multidimensional processes". IV Congress IFAC, Warszawa 1969, Sess.62.
- [12] M i c h l i n S.G., S m ó l i c k i S.L.: Metody przybliżone rozwiązywania równań różniczkowych i całkowych. PWN. Warszawa 1970 (tłumaczenie z rosyjskiego).

ОПТИМАЛЬНАЯ ОЦЕНКА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОГО
РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПЛОТНОСТИ МОЩНОСТИ В ПЛИТОЧНОМ ЯДЕРНОМ РЕАКТОРЕ

К р а т к о е с о д е р ж а н и е

Представлено аналитическое и приближительное решение задачи оптимальной оценки пространственно-временного распределения плотности мощности в плиточном ядерном реакторе. Обсуждено случай одного возмущения в точке, а также рассуждено существование только одной измерительной точки.

Выведено уравнения определяющие достаточные и необходимые условия оптимального решения данной проблемы используя теорию функционалов Лагранжа. Аналитические результаты получено в виде нелинейного интегрального уравнения типа Вольтерра, которое решено методом последовательных приближений. Указано и обсуждено алгоритм этого решения, помещая результаты примерных расчётов в виде графиков. Сделано дискуссию полученных аналитических и численных результатов.

Приблизительное решение, по предлагаемой методе аппроксимации дано в виде расчётного алгоритма, обсуждая выступающие в них зависимости.

OPTIMAL ESTIMATION OF SPACE-TIME POWER DENSITY DISTRIBUTION IN A NUCLEAR SLAB REACTOR

S u m m a r y

Analytical solutions with approximate problems of an optimal estimation of space-time distribution of power density in a nuclear slab reactor, has been presented in this paper. The case has been taken into consideration, of the occurrence of a single point disturbance, with but a single measurement point considered.

Equations have been derived to determine the sufficient and necessary conditions for an optimal solution of the problem given, under the employment of the Lagrange functionals theory. Analytical results have been obtained in the form of a non-linear integral equation of Volterra type which has then been solved by the method of successive approximations. The algorithm of the above solution has been given and discussed, with the results of exemplary calculations having been presented in the form of graphs. A discussion has been conducted of analytical and numerical results thus obtained.

The approximate solution, having been obtained according to the proposed approximation method, has been presented in the form of a computation algorithm, and dependences occurring within this latter have been derived and discussed.