BIULETYN INFORMACYJNY INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Nr 37 1972

Mgr inż. Michał Podowski
Instytut Techniki Cieplnej

ANALIZA PEWNEGO RÓWNANIA OPERATOROWEGO I JEJ ZASTOSOWANIE DO BADANIA STABILNOŚCI REAKTORÓW JĄDROWYCH

1. Wstęp

Dla opisu przebiegu różnorodnych procesów fizycznych, jak również działania wielu maszyn i urządzeń, można utworzyć tzw. modele matematyczne mające postać pewnych równań (ogólniej - układów równań). Mogą to być równania zarówno algebraiczne, jak i różniczkowe, całkowe, różnicowe itp. Forma ich jest ściśle związana z opisywanym zjawiskiem i, ogólnie rzecz biorąc, jest różna dla różnych zjawisk. Ponieważ z reguły nie jest możliwe podanie dokładnego rozwiązania tych równań w postaci efektywnej, należy się więc ograniczyć do badania jakościowego pewnych własności rozwiązań bez znajomości tychże rozwiązań. Metody analizy są przy tym zależne od postaci równań; inaczej bada się np. własności rozwiązań równań algebraicznych a inaczej - różniczkowych. Jak się jednak okazuje, stosując pewne pojęcia analizy funkcjonalnej można metody te w poważnym stopniu ujednolicić, sprowadzając różne z pozoru układy równań do postaci jednego równania operatorowego, którego elementy należą do określonej przestrzeni Banacha.

W niniejszej pracy zbadane zostały własności rozwiązań pewnego wybranego równania operatorowego. Na tej podstawie przeanalizowano następnie układ równań algebraicznych oraz równanie całkowe i różniczkowo-całkowe. Na zakończenie zastosowano otrzymane wyniki do badania stabilności rozwiązań punktowego modelu kinetyki reaktora z uwzględnieniem sprzężenia

2. Sformułowanie równania. Twierdzenie o istnieniu i jednoznaczności rozwiązania

Przed podaniem postaci rozważanego równania przytoczone zostaną, w postaci zestawu definicji i twierdzeń, podstawowe własności operatorów liniowych i wieloliniowych w przestrzeniach Banacha.

D e f i n i c j a 2.1.

Operator A, określony w całej przestrzeni liniowej unormowanej X, o wartościach należących do przestrzeni Y, jest operatorem liniowym, jeżeli:

1) jest addytywny i jednorodny, tzn. $A(\alpha_1 x_1 + \alpha_2 x_2) = \alpha_1 Ax_1 + \alpha_2 Ax_2$ dla dowolnych $x_1, x_2 \in X$, gdzie α_1, α_2 - liczby rzeczywiste (lub zespolone),

2) jest ciągły w każdym punkcie przestrzeni X, tzn., że jeżeli $x_n \in X$ $(n = 1,2,\ldots)$ oraz $x_n \to x$, to $Ax_n \to Ax$.

T w i e r d z e n i e 2.1 [1]

Operator addytywny A określony w całej przestrzeni Banacha X i ciągły przynajmniej w jednym punkcie $x_0 \in X$ jest ciągły w całej przestrzeni X.

T w i e r d z e n i e 2.2 [1]

Jeżeli A jest operatorem liniowym, to istnieje taka liczba $c > 0$, że dla każdego $x \in X$ zachodzi nierówność $\|Ax\| \leq c\|x\|$.

D e f i n i c j a 2.2

Najmniejsza z liczb c spełniających powyższą nierówność nosi nazwę normy operatora A (oznaczenie - $\|A\|$).

T w i e r d z e n i e 2.3 [1]

Norma operatora liniowego spełnia równanie

$$\|A\| = \sup_{\|x\|=1} \|Ax\|.$$

Z ostatniego twierdzenia wynika, że $\|Ax\| \leq \|A\| \cdot \|x\|$.

Fakt, że operator liniowy A przekształca przestrzeń Banacha X w przestrzeń Y oznaczany będzie w dalszym ciągu pracy symbolem $A \in (X \to Y)$.

D e f i n i c j a 2.3

Niech $X_1, X_2, \ldots, X_p, Y$ - oznaczają przestrzenie liniowe unormowane. Operator p-liniowy jest to funkcja $y = G(x_1, \ldots, x_p)$, $x_k \in X_k$ $(k = 1,2,\ldots,p)$, $y \in Y$, posiadająca następujące własności:

1) jest addytywna i jednorodna ze względu na każdą ze zmiennych przy ustalonych zmiennych pozostałych,

2) jest ciągła, tzn. z tego, że $x_{kn} \to x_{ko}$ $(k = 1,\dots,p)$ wynika, że $G(x_{1n},\dots,x_{pn}) \to G(x_{1o},\dots,x_{po})$.

T w i e r d z e n i e 2.4 [1]

Jeżeli G jest operatorem p-liniowym, to istnieje stała $c > 0$ taka, że $\|G(x_1,\dots,x_p)\| \leqslant c\|x_1\|\dots\|x_p\|$.

D e f i n i c j a 2.4

Najmniejsza ze stałych spełniających poprzednią nierówność, nosi nazwę normy operatora G (oznaczenie - $\|G\|$).

Z twierdzenia 2.4 wynika bezpośrednio następująca nierówność

$$\|G(x_1,\dots,x_p)\| \leqslant \|G\| \cdot \|x_1\| \dots \|x_p\| .$$

T w i e r d z e n i e 2.5 [1]

Norma operatora p-liniowego G spełnia równanie

$$\|G\| = \sup_{\|x_k\|=1 \ (k=1,\dots,p)} \|G(x_1,\dots,x_p)\| .$$

T w i e r d z e n i e 2.6 [1]

Jeżeli przestrzenie $X_k (k = 1,\dots,p)$ są przestrzeniami Banacha a operator $G(x_1,\dots,x_p)$ jest liniowy ze względu na każdą ze zmiennych, to G - jest operatorem p-liniowym.

W dalszej części pracy stosowane będą następujące oznaczenia:

jeżeli G jest operatorem p-liniowym, przeprowadzającym przestrzenie X_k $(k = 1,\dots,p)$ w przestrzeń Y, to $G \in (X_1 \times X_2 \times \dots \times X_p \to Y)$;

jeżeli w szczególności $X_k = X$ $(k = 1,\dots,p)$, to $G \in (X^p \to Y)$;

jeżeli $G \in (X^p \to Y)$ oraz $x \in X$, to $G(x,x,\dots,x) = Gx^p$.

Mając zdefiniowane pojęcia operatorów w przestrzeni Banacha można teraz zapisać równanie, będące przedmiotem dalszej analizy. Ma ono postać

$$x - A \sum_{p=2}^{\infty} G_p x^p = z , \tag{2.1}$$

gdzie:

$z \in X$, X - przestrzeń Banacha,

$A \in (X \to X)$,

$G_p \in (X^p \to X)$ $(p = 2,3,\ldots)$.

Równanie to, w zależności od postaci z, A oraz G_p, może mieć w przestrzeni X jedno lub wiele rozwiązań, bądź też nie mieć ich wcale. Określeniu warunków, przy spełnieniu których równanie (2.1) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $x^* \in X$, poświęcone jest podane poniżej twierdzenie 2.7. Dla jego dowodu niezbędne jest wykorzystanie następującego lematu:

L e m a t 2.1

Dane jest równanie

$$y - \sum_{p=2}^{\infty} a_p y^p = u, \tag{2.2}$$

gdzie:

u - liczba rzeczywista,

a_p $(p = 2,3,\ldots)$ - nieujemne liczby rzeczywiste.

Jeżeli szereg $\sum_{p=2}^{\infty} a_p y^p$ posiada promień zbieżności $R > 0$, to istnieją liczby $\alpha > 0$ oraz $\beta > 0$ takie, że dla każdego $u \in \langle 0, \alpha \rangle$ równanie (2.2) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $y^* \in \langle 0, \beta \rangle$, zależne w sposób ciągły od u.

D o w ó d lematu

Jeżeli szereg $\sum_{p=2}^{\infty} a_p y^p$ posiada dodatni promień zbieżności R to, jak łatwo można wykazać, dodatni jest również promień zbieżności R' szeregu $\sum_{p=2}^{\infty} p a_p y^{p-1}$, przy czym $R' < R$. Istnieje więc taka liczba $r \in (0, R')$, że funkcja

$$u = f(y) = y - \sum_{p=2}^{\infty} a_p y^p \tag{2.3}$$

jest różniczkowalna w przedziale $\langle -r, r \rangle$. Pochodna jej jest równa

$$f'(y) = 1 - \sum_{p=2}^{\infty} p a_p y^{p-1}. \tag{2.4}$$

Z postaci wzoru (2.4) wynika, że na odcinku $\langle 0, r \rangle$ $f'(y)$ jest funkcją malejącą oraz, że $f'(0) = 1$. Jeżeli więc $f'(r) \leqslant 0$, to istnieje $\tilde{y} \in (0, r \rangle$ takie, że $f'(\tilde{y}) = 0$ oraz dla każdego $y \in \langle 0, \tilde{y} \rangle$ spełniona jest nierówność $0 \leqslant f'(y) < 1$. Gdy natomiast

$f'(r) > 0$, to tym bardziej $f'(y) > 0$ dla $y \in (0,r>$. Jeżeli więc β jest dowolną liczbą z przedziału $(0,\min(\tilde{y},r))$, to dla każdego $y \in <0,\beta>$ zachodzi nierówność $0 < f'(y) \leqslant 1$. Wynika stąd, że istnieje ciągła funkcja $y = f^{-1}(\tilde{u})$, odwrotna względem f, określona na odcinku $<0,\alpha>$, gdzie $\alpha = f(\beta)$. A więc równanie (2.2) posiada w tym przedziale dokładnie jedno rozwiązanie $y^*(u) \in (0,\beta>$, zależne w sposób ciągły od u.

Twierdzenie 2.7

Jeżeli szereg $\sum_{p=2}^{\infty} \|G_p\| y^p$ posiada dodatni promień zbieżności, to istnieje taka liczba $\alpha > 0$, że dla każdego z spełniającego nierówność $\|z\| \leqslant \alpha$ równanie (2.1) posiada dokładnie jedno rozwiązanie $x^* \in X$ będące granicą ciągu kolejnych przybliżeń

$$x_{n+1} = z + A \sum_{p=2}^{\infty} G_p x_n^p, \tag{2.5}$$

przy czym x_0 może być dowolnym elementem przestrzeni X takim, że $\|x_0\| \leqslant y^*$, gdzie y^* jest jedynym nieujemnym rozwiązaniem równania (dla $\|z\| \leqslant \alpha$)

$$y - \|A\| \sum_{p=2}^{\infty} \|G_p\| y^p = \|z\|. \tag{2.6}$$

Zachodzi wtedy oszacowanie

$$\|x^*\| \leqslant y^*. \tag{2.7}$$

Dowód

Niech:

$$a_p = \|A\| \cdot \|G_p\| \quad (p = 2,3,\ldots), \tag{2.8}$$

$$u = \|z\|. \tag{2.9}$$

Dla dowolnego z takiego, że $\|z\| \leqslant \alpha$, można rozpatrzyć operację

$$F_z(x) = z + A \sum_{p=2}^{\infty} G_p x^p \tag{2.10}$$

określoną w kuli domkniętej $K_z(0,y^*(z)) \stackrel{df}{=} \{x: \|x\| \leqslant y^*(z)\}$, gdzie y^* jest rozwiązaniem równania (2.6). Ponieważ

$$\|F_z(x)\| \leqslant \|z\| + \|A\| \sum_{p=2}^{\infty} \|G_p\| \cdot \|x\|^p \leqslant \|z\| + \|A\| \sum_{p=2}^{\infty} \|G_p\| [y^*(z)]^p =$$

$$= y^*(z), \tag{2.11}$$

więc dla każdego ustalonego z operacja F_z przekształca kulę K_z w siebie.

Jednocześnie, dla dowolnych $x_1, x_2 \in K_z$, spełniona jest nierówność

$$\|F_z(x_2) - F_z(x_1)\| \leqslant \|A\| \sum_{p=2}^{\infty} \|G_p x_2^p - G_p x_1^p\| \leqslant$$

$$\leqslant \|x_2 - x_1\| \cdot \|A\| \sum_{p=2}^{\infty} p\|G_p\| [y^*(z)]^{p-1}. \tag{2.12}$$

Z podstawień (2.8) i (2.9) oraz lematu 2.1 wynika, że

$$\|A\| \sum_{p=2}^{\infty} p\|G_p\| [y^*(z)]^{p-1} = 1 - f'(y^*) < 1 \tag{2.13}$$

co, wraz ze wzorami (2.10) i (2.11) dowodzi, że operacja F_z jest zwężająca w kuli K_z. Z twierdzenia Banacha o odwzorowaniach zwężających wynika teraz bezpośrednio teza twierdzenia. Oszacowanie (2.7) jest natychmiastowym wnioskiem z nierówności (2.11). Z lematu 2.1 wynika ciągła zależność normy rozwiązania $\|x^*\|$ od normy $\|z\|$ jak również fakt, że jeśli $\|z\| = 0$, to jedynym rozwiązaniem równania (2.1) jest $x^* = 0$ (element zerowy przestrzeni X).

Zakładając $x_o = 0$, można rozwiązanie x^* [zgodnie ze wzorem (2.5)] przedstawić w postaci

$$x^* = \lim_{n\to\infty} x_n = z + \sum_{p=2}^{\infty} U_p z^p, \tag{2.14}$$

gdzie:

$U_p \in (X^p \to X)$ dla $p = 2,3,\dots$

Operatory U_p można określić podstawiając rozwiązanie (2.14) do równania wyjściowego. Otrzymuje się wtedy

$$z + \sum_{p=2}^{\infty} U_p z^p = z + A \sum_{p=2}^{\infty} G_p \left[z + \sum_{k=2}^{\infty} U_k z^k \right]^p, \qquad (2.15)$$

a po rozpisaniu

$$U_2 z^2 + U_3 z^3 + \ldots = AG_2 (z + U_2 z^2 + \ldots)^2 + AG_3 (z + U_2 z^2 + \ldots)^3 + \ldots =$$

$$= AG_2 z^2 + AG_2 [z(U_2 z)^2 + (U_2 z^2) z] + AG_3 z^3 + \ldots \qquad (2.16)$$

Z porównania wyrażeń przy jednakowych "potęgach" z wynika, że:

$$U_2 z^2 = AG_2 z^2, \qquad (2.17)$$

$$U_3 z^2 = AG_2 [z(U_2 z^2) + (U_2 z^2) z] + AG_3 z^3, \qquad (2.18)$$

itp.

Zakładając $z_1, z_2, \ldots, z_p \in X$, można operatory U_p zdefiniować następująco:

$$U_2 : \quad U_2(z_1, z_2) = AG_2(z_1, z_2), \qquad (2.19)$$

$$U_3 : \quad U_3(z_1, z_2, z_3) = AG_2[z_1, U_2(z_2, z_3)] + AG_2[U_2(z_1, z_2), z_3] +$$

$$+ AG_3(z_1, z_2, z_3) = AG_2[z_1, AG_2(z_2, z_3)] + AG_2[AG_2(z_1, z_2), z_3] +$$

$$+ AG_3(z_1, z_2, z_3), \quad \text{itp.} \qquad (2.20)$$

Należy zauważyć, że opisana metoda pozwala wyznaczać operatory U kolejno, każdy w zależności od operatorów U_k ($k = 2, 3, \ldots, p-1$).

Rozpatrzono dwa szczególne przypadki równania typu (2.1):

P r z y k ł a d 1

Jeżeli $G_p \equiv 0$ dla $p \geqslant 3$, to równanie (2.1) sprowadza się do postaci

$$x = z + AG_2 x^2 \qquad (2.21)$$

i posiada dla każdego z takiego, że $\|z\| \leq \frac{1}{4\|A\| \cdot \|G_2\|}$ dokładnie jedno rozwiązanie $x^* \in X$ spełniające nierówność

$$\|x^*\| \leq \frac{1}{2\|A\| \cdot \|G_2\|}\left(1 - \sqrt{1 - 4\|A\| \cdot \|G_2\| \cdot \|z\|}\right). \tag{2.22}$$

P r z y k ł a d 2

Niech będzie dane równanie

$$\lambda x - Bx = \tilde{z} + \sum_{p=2}^{\infty} G_p x^p, \tag{2.23}$$

gdzie:

λ - liczba rzeczywista (lub zespolona),

$B \in (X \to X)$, $\tilde{z} \in X$, $G_p \in (X^p \to X)$.

Jeżeli λ jest wartością regularną operatora B ($\lambda \notin$ spB), to równanie (2.23) można przekształcić do postaci

$$x = (\lambda I - B)^{-1} \tilde{z} + (\lambda I - B)^{-1} \sum_{p=2}^{\infty} G_p x^p, \tag{2.24}$$

gdzie:

I - operator tożsamościowy.

Jeśli teraz oznaczyć:

$$(\lambda I - B)^{-1} \tilde{z} = z \in X,$$

$$(\lambda I - B)^{-1} = A \in (X \to X),$$

otrzymuje się postać równania (2.1).

3. Badanie własności rozwiązań nieliniowego układu równań algebraicznych

Obecnie zostanie rozpatrzony przypadek, gdy równanie (2.1) określone jest w odniesieniu do przestrzeni euklidesowej E_M. Elementami jej są M-wymiarowe ciągi: $x = \{x_i\}_{(i=1,2,\ldots,M)}$ a norma określona jest wzorem

$$\|x\|_2 = \left\{ \sum_{i=1}^{M} |x_i|^2 \right\}^{1/2} . \tag{3.1}$$

Niech operatory G_p $(p = 2,3,\ldots)$ mają postać

$$G_p(x_1,\ldots,x_p) = \left\{ G_{pi}(x_1,\ldots,x_p) \right\}_{(i=1,\ldots,M)} \tag{3.2}$$

gdzie:

$$x_l = \left\{ x_{lm} \right\}_{(l=1,\ldots,p;\ m=1,\ldots,M)}$$

$$G_{pi}(x_1,\ldots,x_p) = \sum_{m_1=1}^{M} \ldots \sum_{m_p=1}^{M} g_{pim_1\ldots m_p} \cdot x_{1m_1} \ldots x_{pm_p} . \tag{3.3}$$

W szczególności więc

$$G_{pi}(x,\ldots,x) = \sum_{m_1=1}^{M} \ldots \sum_{m_p=1}^{M} g_{pim_1\ldots m_p} \cdot x_{m_1} \ldots x_{m_p} , \tag{3.4}$$

gdzie:

$g_{pim_1\ldots m_p}$ - liczby rzeczywiste.

Jak łatwo zauważyć, tak zdefiniowane operatory są operatorami p-liniowymi w przestrzeni E_M. Norma operatora G_p spełnia nierówność

$$\|G_p\|_2 \leq \left\{ \sum_{i=1}^{M} \sum_{m_1=1}^{M} \ldots \sum_{m_p=1}^{M} |g_{pim_1\ldots m_p}|^2 \right\}^{1/2} . \tag{3.5}$$

Jeżeli $u = \left\{ u_i \right\}_{(i=1,\ldots,M)}$ jest danym wektorem rzeczywistym, a $B = \left\{ b_{ij} \right\}$ $(i,j = 1,\ldots,M)$ - macierzą o współczynnikach rzeczywistych, to równanie

$$\lambda x - Bx - \sum_{p=2}^{\infty} G_p x^p = u , \tag{3.6}$$

gdzie:

λ - dowolna liczba rzeczywista, jest wektorowym zapisem nieliniowego układu M-równań algebraicznych.

Jeżeli spełniony jest warunek

$$\det(\lambda I - B) \neq 0, \tag{3.7}$$

wówczas równanie (3.6) można przepisać w postaci

$$x = (\lambda I - B)^{-1} u + (\lambda I - B)^{-1} \sum_{p=2}^{\infty} G_p x^p. \tag{3.8}$$

Przy podstawieniach

$$(\lambda I - B)^{-1} = A = \{ a_{ij} \}_{(i,j=1,\ldots,M)} , \tag{3.9}$$

$$Au = z, \tag{3.10}$$

ostatnie równanie przyjmuje postać (2.1). Jeżeli więc spełnione jest założenie twierdzenia 2.7, wówczas równanie (3.8) posiada, dla każdego u takiego,że $\|(\lambda I - B)^{-1}u\|_2 \leq \alpha$ dokładnie jedno rozwiązanie x^* spełniające nierówność $\|x^*\|_2 \leq \beta$., gdzie α i β można obliczyć numerycznie dla każdego konkretnego układu równań.

Z przytoczonych rozważań wynika oczywiście,że jeżeli $u=0$, to przy spełnieniu warunku (3.7) jedynym rozwiązaniem układu

$$\lambda x - Bx - \sum_{p=2}^{\infty} G_p x^p = 0 \tag{3.11}$$

jest rozwiązanie zerowe ($x = \{0,0,\ldots,0\}$).

Jeżeli w szczególności $p = 2$, to każdy operator

$$G_{2i}(x,x) = \sum_{j=1}^{M} \sum_{m=1}^{M} g_{2ijm}\, x_j x_m \qquad (i = 1,\ldots,M) \tag{3.12}$$

jest formą kwadratową. Jeżeli więc oznaczyć

$$C^{(i)} = \{ c_{jm}^{(i)} \}_{(j,m=1,\ldots,M)} \qquad \text{dla } i = 1,\ldots,M, \tag{3.13}$$

gdzie

$$c_{jm}^{(i)} = \frac{1}{2}\left(g_{2ijm} + g'_{2imj}\right), \tag{3.14}$$

to wyrażenie (3.12) można przepisać w postaci

$$G_{2i}(x,x) = x^T C^{(i)} x, \tag{3.15}$$

gdzie

$C^{(i)}$ jest dla każdego $i = 1,\dots,M$ macierzą hermitowską.

Wynika stąd, że norma operatora G_2 spełnia nierówność

$$\|G_2\|_2 \leq \left\{ \sum_{i=1}^{M} \|C^{(i)}\|_2^2 \right\}^{1/2} = \left\{ \sum_{i=1}^{M} \mu_i^2 \right\}^{1/2}, \tag{3.16}$$

gdzie

μ_i jest maksymalną wartością własną macierzy $C^{(i)}$.

Jak wynika ze wzoru (2.22), oszacowanie normy rozwiązania układu (3.8) (przy założeniu, że $\|u\|_2 \leq \frac{1}{4\|A\|_2^2 \|G_2\|_2}$) jest wówczas następujące

$$\|x\| \leq \frac{1}{2\|A\|_2 \cdot \|G_2\|_2} \left(1 - \sqrt{1 - 4\|A\|_2 \cdot \|G_2\|_2 \cdot \|Au\|_2}\right) \leq$$

$$\leq \frac{1}{2\|A\|_2 \cdot \|G_2\|_2} \left(1 - \sqrt{1 - 4\|A\|_2^2 \cdot \|G_2\|_2 \cdot \|u\|_2}\right), \tag{3.17}$$

gdzie norma $\|G_2\|_2$ spełnia oszacowanie (3.16), natomiast norma macierzy A jest równa pierwiastkowi z maksymalnej wartości własnej macierzy AA^*

$$\|A\|_2 = \left\{ \max_{i=1,\dots,M} \lambda_i(AA^*) \right\}^{1/2}. \tag{3.18}$$

Rozważania powyższe, które przeprowadzone zostały w odniesieniu do układu równań o współczynnikach rzeczywistych, można bez trudu uogólnić na przypadek zespolony.

4. Analiza równania całkowego

Jeżeli operatory A i G_p mają postać:

$$[Ax](t) = \int_0^t k(t,\tau)\, x(\tau)\, d\tau, \tag{4.1}$$

$$[G_p(x_1,\dots,x_p)](t) = \int_0^t \dots \int_0^t k_p(t,\tau_1,\dots,\tau_p) x_1(\tau_1)\dots x_p(\tau_p)\, d\tau_1 \dots d\tau_p, \tag{4.2}$$

natomiast $z = z(t)$ jest daną funkcją zmiennej t, wówczas równanie (2.1) staje się nieliniowym równaniem całkowym. Zakładając, że $z(t)$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną w przedziale $<0,\infty)$, można zadać sobie pytanie, jakie warunki muszą spełniać operatory A i G_p, aby rozwiązanie $x(t)$ równania (2.1) posiadało te same własności co $z(t)$. Aby na nie odpowiedzieć wystarczy przyjąć, że wymienione równanie rozpatruje się w przestrzeni Banacha C, której elementami są funkcje ciągłe i ograniczone w przedziale $<0,\infty)$ z normą określoną wzorem

$$\|x\|_C = \sup_{t \geq 0} |x(t)|, \tag{4.3}$$

oraz zbadać jakie własności powinny posiadać funkcje $k(t,\tau)$ oraz $k_p(t,\tau_1,\dots,\tau_p)$ aby $A \in (C \to C)$ oraz $G_p \in (C^p \to C)$. Własności te wynikają z następujących twierdzeń:

T w i e r d z e n i e 4.1

Jeżeli $k(t,\tau)$ jest funkcją ciągłą obu zmiennych w obszarze $\{<0,\infty); <0,\infty)\}$ oraz $\sup_{t\geq 0} \int_0^t |k(t,\tau)|\, d\tau < \infty$, to operator (4.1) przekształca przestrzeń C w siebie a normę jego określa wzór

$$\|A\|_C = \sup_{t \geq 0} \int_0^t |k(t,\tau)|\, d\tau. \tag{4.4}$$

D o w ó d

Jeżeli $x \in C$, a $y(t) = [Ax](t) = \int_0^t k(t,\tau)\, x(\tau) d\tau$, to y jest funkcją ciągłą dla każdego $t > 0$. Zachodzi ponadto nierówność

$$\sup_{t\geq 0}|y(t)| = \sup_{t\geq 0}\left|\int_0^t k(t,\tau)\,x(\tau)d\tau\right| \leq \sup_{t\geq 0}|x(t)| \sup_{t\geq 0}\int_0^t |k(t,\tau)|d\tau,$$

z której wynika, że $y \in C$ oraz $\|y\|_C \leq \sup_{t\geq 0}\int_0^t |k(t,\tau)|\,d\tau\cdot\|x\|_C$, a więc $\|A\|_C \leq \sup_{t\geq 0}\int_0^t |k(t,\tau)|d\tau$.

Dla dowodu nierówności przeciwnej wystarczy zauważyć, że dla każdej liczby $\varepsilon>0$ można znaleźć takie t_0, że $\sup_{t\geq 0}\int_0^t|k(t,\tau)|d\tau - \int_0^{t_0}|k(t_0,\tau)|d\tau<\frac{\varepsilon}{2}$ oraz taką funkcję $x_0 \in C$ ($\|x_0\|_C = 1$), że $\int_0^{t_0}|x_0(\tau) - \mathrm{sgn}[k(t_0,\tau)]|\,d\tau<\frac{\varepsilon}{2\sup\limits_{0\leq\tau\leq t_0}|k(t_0,\tau)|}$. Możliwość wyboru takiego x_0 wynika z faktu, że zbiór funkcji ciągłych jest gęsty w przestrzeni $L(0,t_0)$. Zachodzi wówczas następujące oszacowanie

$$\sup_{t\geq 0}\int_0^t |k(t,\tau)|d\tau - \int_0^{t_0} k(t_0,\tau)\,x_0(\tau)\,d\tau = \sup_{t\geq 0}\int_0^t|k(t,\tau)|d\tau -$$

$$-\int_0^{t_0}|k(t_0,\tau)|\,d\tau + \int_0^{t_0}|k(t_0,\tau)|d\tau - \int_0^{t_0}k(t_0,\tau)\,x_0(\tau)\,d\tau \leq$$

$$\leq \sup_{t\geq 0}\int_0^t|k(t,\tau)|d\tau - \int_0^{t_0}|k(t_0,\tau)|d\tau + \sup_{0\leq\tau\leq t_0}|k(t_0,\tau)|\int_0^{t_0}|x_0(\tau) -$$

$$- \mathrm{sgn}\,k(t_0,\tau)|\,d\tau < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

skąd wynika teza twierdzenia.

T w i e r d z e n i e 4.2

Jeżeli $k_p(t,\tau_1,\dots,\tau_p)$ jest funkcją ciągłą $p+1$ zmiennych w obszarze $\{<0,\infty),\dots,<0,\infty)\}$ oraz $\sup_{t\geq 0}\int_0^t|k(t,\tau_1,\dots,\tau_p)|d\tau_1\dots d\tau_p<\infty$, to operator (4.2) przekształca C^p w C ($p = 2,3,\dots$) a jego norma spełnia nierówność

$$\|G_p\|_C \leq \sup_{t\geq 0}\int_0^t\dots\int_0^t |k(t,\tau_1,\dots,\tau_p)|d\tau_1\dots d\tau_p. \tag{4.5}$$

Dowód jest analogiczny jak dla pierwszej części twierdzenia 4.1. Równość zachodzi jedynie dla szczególnych postaci jądra k_p.

Jeżeli w szczególności

$$k(t,\tau) = k(t-\tau) \tag{4.6}$$

oraz

$$k_p(t,\tau_1,\ldots,\tau_p) = k_p(t-\tau_1,\ldots,t-\tau_p), \tag{4.7}$$

wówczas:

$$\|A\|_C = \int_0^\infty |k(t)|\,dt, \tag{4.8}$$

$$\|G_p\|_C \leqslant \int_0^\infty \ldots \int_0^\infty |k_p(\tau_1,\ldots,\tau_p)|\,d\tau_1 \ldots d\tau_p. \tag{4.9}$$

Jeżeli więc spełnione są założenia twierdzenia 2.7, wówczas dla dostatecznie małego z ($\|z\|_C \leqslant \alpha$) równanie (2.1) z operatorami (4.1) i (4.2) posiada w przestrzeni C dokładnie jedno rozwiązanie x, którego norma spełnia nierówność $\|x\|_C \leqslant \beta$.

W sposób analogiczny do opisanego powyżej można również wykazać, przy jakich własnościach jąder k i k_p rozwiązanie równania (2.1) jest, przy $z(t)$ ciągłym w przedziale $\langle 0,\infty)$ i zbieżnym do zera przy $t \to \infty$, również ciągłe i zbieżne do zera. Należy w tym miejscu wprowadzić pojęcie nowej przestrzeni Banacha. Będzie to przestrzeń ilorazowa $K = C/N$, gdzie N jest podprzestrzenią przestrzeni C złożoną z funkcji zbieżnych do zera w nieskończoności. Elementami przestrzeni K są klasy $\tilde{x}$ elementów przestrzeni C, różniące się o element należący do N. Norma jest określona wzorem

$$\|\tilde{x}\|_K = \lim_{T\to\infty} \sup_{t \geqslant T} |x(t)|, \tag{4.10}$$

gdzie

x - dowolny reprezentant klasy $\tilde{x}$.

Ponieważ każdy element $x \in C$ należy dokładnie do jednej klasy $\tilde{x} \in K$, więc zamiast klasy $\tilde{x}$ można brać pod uwagę dowolny jej reprezentant x. W szczególności można zapisać, że

$\|x\|_K = \lim\limits_{T\to\infty} \sup\limits_{t\geq T} |x(t)|$. Jeżeli $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$ (a więc $x \in N$), to $\|x\|_K = 0$.

Omawiany problem sprowadza się więc do określenia, jakie własności muszą mieć operatory A i G_p, aby przekształcały odpowiednio K w K oraz K^p w K (dla $p = 2,3,\ldots$). Własności te precyzują następne dwa twierdzenia:

T w i e r d z e n i e 4.3

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 4.1 oraz ponadto dla każdego $t_0 > 0$ spełniona jest równość

$$\lim_{t\to\infty} \int_0^{t_0} |k(t,\tau)|\, d\tau = 0, \tag{4.11}$$

to operator (4.1) przekształca przestrzeń K w siebie oraz

$$\|A\|_K \leq \sup_{t\geq 0} \int_0^t |k(t,\tau)|\, d\tau. \tag{4.12}$$

D o w ó d

Z założenia wynika, że dla każdego $t_0 > 0$ i każdego $\varepsilon > 0$ można dobrać takie $T_1 > 0$, że dla każdego $t > T_1$ zachodzi nierówność $\int_0^{t_0} |k(t,\tau)| d\tau < \frac{\varepsilon}{2 \sup\limits_{t\geq 0} |x(t)|}$ (dla dowolnego $x \in C$ takiego, że $x(t) \not\equiv 0$). Jeżeli więc $\lim\limits_{t\to\infty} x(t) = 0$, to dla każdego t_0 i ε można również dobrać takie $T_2 > 0$, że $\sup\limits_{t>T_2} |x(t)| < \frac{\varepsilon}{2\sup\limits_{t\geq 0}\int_0^t |k(t,\tau)| d\tau}$

Jeżeli więc $y(t) = \int_0^t k(t,\tau)x(\tau)d\tau$, to dla każdego $t > T = T_1 + T_2$ zachodzi oszacowanie

$$|y(t)| = \left|\int_0^T k(t,\tau)x(\tau)d\tau + \int_T^t k(t,\tau)x(\tau)d\tau\right| \leq \sup_{t\geq 0}|x(t)| \int_0^T |k(t,\tau)|\, d\tau +$$

$$+ \sup_{t\geq T>T_2} |x(t)| \int_T^t |k(t,\tau)|\, d\tau < \frac{\varepsilon}{2} + \sup_{t\geq T>T_2} |x(t)| \int_0^t |k(t,\tau)|\, d\tau < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

skąd wynika, że $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$. Jeżeli teraz założyć, że $x = x_0 + u$, gdzie $u \in N$ ($\lim\limits_{t\to\infty} u(t) = 0$, $\|u\|_K = 0$), natomiast $\|x_0\|_C = 1$, to

$$\|A\|_K = \sup_{\|x\|_K=1} \|Ax\|_K = \sup_{\|x_0\|_C=1} \|Ax_0\|_K \leq \sup_{\|x_0\|_C=1} \|Ax_0\|_C = \|A\|_C,$$

skąd wynika, że $A\in(K\to K)$ oraz $\|A\|_K \leq \sup_{t\geq 0}\int_0^t |k(t,\tau)|\,d\tau$, co kończy dowód.

Ostatnia nierówność przechodzi w równość jedynie dla szczególnych postaci jądra $k(t,\tau)$.

T w i e r d z e n i e 4.4

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 4.2 oraz dla każdego ustalonego $t_0 > 0$ spełniony jest warunek

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^{t_0}\ldots\int_0^{t_0} |k(t,\tau_1,\ldots,\tau_p)|\, d\tau_1\ldots d\tau_p = 0 \tag{4.13}$$

(równoważny warunkowi: $\lim_{t\to\infty} k(t,\tau_1,\ldots,\tau_p) = 0$ dla ustalonych $\tau_1,\ldots,\tau_p$), to operator (4.2) przekształca K^p w K oraz

$$\|G_p\|_K \leq \sup_{t\geq 0}\int_0^t\ldots\int_0^t |k(t,\tau_1,\ldots,\tau_p)|\, d\tau_1\ldots d\tau_p. \tag{4.14}$$

D o w ó d

Jak wynika z założenia, dla każdego $t_0 > 0$ i $\varepsilon > 0$ można dobrać takie T_0, że dla każdego $t > T_0$ i dowolnych $x_i \in C$ ($x_i(t) \not\equiv 0$, $i = 1,2,\ldots,p$) zachodzi nierówność $\int_0^{t_0}\ldots\int_0^{t_0} |k(t,\tau_1,\ldots,\tau_p)|\,d\tau_1\ldots d\tau_p < \dfrac{\varepsilon}{2\prod_{i=1}^{p}\sup_{t\geq 0}|x_i(t)|}$. Jeżeli więc $\lim_{t\to\infty} x_i(t) = 0$, to istnieją liczby T_i ($i = 1,2,\ldots,p$) takie, że $\sup_{t\geq T_i}|x_i(t)| <$

$$< \frac{\varepsilon}{2p\prod_{j\neq i}\sup_{t\geq 0}|x_j(t)|\ \sup_{t\geq 0}\int_0^t\ldots\int_0^t |k(t,\tau_1,\ldots,\tau_p)|\,d\tau_1\ldots d\tau_p}.$$

Jeśli teraz $y(t) = \int_0^t\ldots\int_0^t k(t,\tau_1,\ldots,\tau_p)x_1(\tau_1)\ldots x_p(\tau_p)\,d\tau_1\ldots d\tau_p$, to dla każdego $t > T = T_0 + \sum_i T_i$ zachodzi oszacowanie

$$|y(t)| = \Big|\int_0^T\ldots\int_0^T k(t,\tau_1,\ldots,\tau_p)x_1(\tau_1)\ldots x_p(\tau_p)\,d\tau_1\ldots d\tau_p +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p}\underbrace{\int_0^T\ldots\int_0^T}_{i-1}\int_T^t\int_0^t\ldots\int_0^t k(t,\tau_1,\ldots,\tau_p)x_1(\tau_1)\ldots x_p(\tau_p)\,d\tau_1\ldots d\tau_p\Big| \leq$$

$$\leqslant \prod_{i=1}^{p} [\sup_{t \geqslant 0} |x_i(t)|] \int_0^T \dots \int_0^T |k(t,\tau_1,\dots,\tau_p)| d\tau_1 \dots d\tau_p +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} \left\{ \sup_{t \geqslant T} |x_i(t)| \cdot \prod_{j \neq i}^{p} [\sup_{t \geqslant 0} |x_i(t)|] \sup_{t \geqslant 0} \int_0^t \dots \int_0^t |k(t,\tau_1,\dots,\tau_p)| d\tau_1 \dots \right.$$

$$\left. \dots d\tau_p \right\} < \frac{\varepsilon}{2} + p\frac{\varepsilon}{2p} = \varepsilon ,$$

co oznacza, że $\lim\limits_{t\to\infty} y(t) = 0$.

Niech $x_i = x_{oi} + u_i$ $(i = 1,\dots,p)$, gdzie $x_{oi} \in C$, $u_i \in N$.

Wtedy

$$G_p(x_1,\dots,x_p) = G_p(x_{o1}+u_1,\dots,x_{op}+u_p) = G_p(x_{o1},\dots,x_{op}) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{p} G_p(x_{o1},\dots,x_{o(i-1)},u_i,x_{o(i+1)}+u_{i+1},\dots,x_{op}+u_p) =$$

$$= G_p(x_{o1},\dots,x_{op}) + w,$$

gdzie

$w \in N$.

Wynika stąd, że $G_p \in (K^p \to K)$. Jeżeli ponadto przyjąć, że $\|x_{oi}\|_C = 1$, to można otrzymać oszacowanie

$$\|G_p\|_K = \sup_{\substack{\|x_i\|_K = 1 \\ (i=1,\dots,p)}} \|G_p(x_1,\dots,x_p)\|_K = \sup_{\substack{\|x_{oi}\|_C = 1 \\ (i=1,\dots,p)}} \|G_p(x_{o1},\dots,x_{op})\|_K \leqslant$$

$$\leqslant \sup_{\substack{\|x_{oi}\|_C = 1 \\ (i=1,\dots,p)}} \|G_p(x_{o1},\dots,x_{op})\|_C = \|G_p\|_C,$$

skąd, po uwzględnieniu twierdzenia 4.2, otrzymuje się (4.14).

Z przeprowadzonego poprzednio rozumowania wynika więc, że jeżeli równanie (2.1) określone jest na przestrzeni K, operatory A i G_p spełniają założenia ostatnich twierdzeń oraz spełnione jest założenie twierdzenia 2.7,to dla każdego z takiego, że $\|z\|_K = 0$ również $\|x\|_K = 0$, co jest równoważne zbieżności do zera rozwiązania x(t).

W przypadku, gdy jądra k i k_p redukują się do postaci (4.6) i (4.7), warunki (4.11) i (4.12) są spełnione automatycznie, jeśli tylko spełnione są założenia pozostałe.

5. Analiza równania różniczkowo-całkowego

Przeprowadzone w punkcie poprzednim rozważania można zastosować do badania własności rozwiązań następującego równania różniczkowo-całkowego

$$\frac{dx}{dt} - ax - \int_0^t f(t-\tau)x(\tau)d\tau - \sum_{p=2}^{\infty} \int_0^t \ldots \int_0^t k_p(t,\tau_1,\ldots,\tau_p)x(\tau_1)\ldots$$

$$\ldots x(\tau_p)d\tau_1 \ldots d\tau_p = u \tag{5.1}$$

z warunkiem początkowym $x(0) = 0$, gdzie $f(t)$ - funkcja ciągła i spełniająca warunek $\int_0^{\infty} |f(t)|dt < \infty$, natomiast jądra k_p spełniają założenia twierdzenia 4.2.

Aby wykazać, kiedy równanie (5.1) można przekształcić do postaci (2.1) wystarczy rozpatrzyć następujące równania liniowe

$$\frac{dx}{dt} - ax - \int_0^t f(t-\tau)x(\tau)d\tau = u \tag{5.2}$$

z warunkiem początkowym $x(0) = 0$. Własności rozwiązań równania (5.2) wynikają z następującego twierdzenia, którego dowód można znaleźć w [2]:

T w i e r d z e n i e 5.1

Jeżeli funkcja $g(t)$ ma ograniczone wahanie $(\mathop{\mathrm{Var}}_{\langle 0,\infty)} g < \infty)$, nie ma części osobliwej, oraz spełniona jest nierówność

$$\inf_{\mathrm{Re}\, s \geq 0} \left| \int_0^{\infty} e^{-st}\, dg(t) \right| > 0,$$

gdzie $G(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} dg(t)$ jest transformatą Laplace'a-Stieltjesa funkcji $g(t)$, to istnieje dokładnie jedna funkcja $h(t)$ o ograniczonym wahaniu i bez części osobliwej taka, że

$$\int_0^\infty e^{-st}\,dg(t)\cdot\int_0^\infty e^{-st}\,dh(t) = 1 \quad \text{dla } \operatorname{Re} s \geqslant 0.$$

Na podstawie tego twierdzenia można teraz dowieść słuszności twierdzenia następującego:

T w i e r d z e n i e 5.2

Jeżeli

$$\inf_{\operatorname{Re} s\geqslant 0} |s - a - F(s)| > 0 \tag{5.3}$$

to rozwiązanie równania (5.2) można przedstawić w postaci

$$x(t) = \int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau, \tag{5.4}$$

gdzie

$k(t)$ jest funkcją ciągłą dla $t\in\langle 0,\infty)$ oraz $\int_0^\infty |k(t)|dt<\infty$.

D o w ó d

Stosując do równania (5.2) w sposób formalny transformatę Laplace'a otrzymuje się

$$[s - a - F(s)]\, X(s) = U(s). \tag{5.5}$$

Dla dowolnej liczby $\alpha > 0$ zachodzi wtedy równość

$$\frac{1}{s+\alpha}[s - a - F(s)]X(s) = \frac{1}{s+\alpha}U(s), \tag{5.6}$$

gdzie dla każdego s takiego, że $\operatorname{Re} s \geqslant 0$ spełniona jest nierówność

$$\left|\frac{1}{s+\alpha}[s - a - F(s)]\right| > 0 \tag{5.7}$$

oraz

$$\lim_{s\to\infty\,(\operatorname{Re} s\geqslant 0)}\left|\frac{1}{s+\alpha}[s - a - F(s)]\right| = 1. \tag{5.8}$$

Uwzględniając teraz twierdzenie 5.1 można przyjąć

$$K(s) = \frac{1}{s+\alpha}H(s), \tag{5.9}$$

gdzie

$$H(s) = \left\{ \frac{1}{s+\alpha} \left[s - a - F(s) \right] \right\}^{-1} = \int_0^\infty e^{-st} \, dh(t), \tag{5.10}$$

skąd

$$k(t) = \int_0^t e^{-\alpha(t-\tau)} \, dh(t) \tag{5.11}$$

oraz

$$\int_0^\infty |k(t)| \, dt < \infty . \tag{5.12}$$

Dla zakończenia dowodu wystarczy teraz zauważyć, że z ciągłości funkcji $f(t)$ wynika ciągłość $k(t)$.

Powracając do równania (5.1) łatwo można zauważyć, że jeżeli spełniony jest warunek (5.3), to przyjmuje ono postać (2.1), przy czym

$$[Ax](t) = \int_0^t k(t-\tau) \, x(\tau) d\tau, \tag{5.13}$$

$$z = Au, \tag{5.14}$$

gdzie:

$A \in (C \to C)$,

$A \in (K \to K)$.

Rozpatrywany problem został w ten sposób sprowadzony do omawianego poprzednio.

Otrzymane wyniki można bez trudu uogólnić na niezerowe warunki początkowe. Wystarczy w tym celu dodatkowo założyć, że $k \in C$, bądź też $k \in K$. Wtedy równanie (5.1) przyjmie również postać (2.1), przy czym

$$z(t) = k(t) \cdot x(0) + \int_0^t k(t-\tau) u(\tau) d\tau. \tag{5.15}$$

6. Analiza stabilności punktowego modelu reaktora ze sprzężeniem temperaturowym

Równanie kinetyki reaktora z uwzględnieniem wpływu temperatury na reaktywność (przy założeniu, że całą objętość reaktora można podzielić na M-stref, każda o innej temperaturze) mają postać następującą:

$$\dot{n} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n + \sum_{i=1}^{K} \lambda_i C_i, \tag{6.1}$$

$$\dot{C}_i = \frac{\beta_i}{\Lambda} n - \lambda_i C_i \qquad (i = 1,\dots,K), \tag{6.2}$$

$$\rho = \rho_o + \rho_z(t) - \alpha n - \sum_{k=1}^{M} c_k T_k, \tag{6.3}$$

$$\dot{T}_k = \sum_{j=1}^{M} p_{kj} T_j + b_k n \qquad (k = 1,\dots,M), \tag{6.4}$$

gdzie:

n - gęstość neutronów termicznych (z założenia proporcjonalna do mocy reaktora) $[m^{-3}]$,

Λ - czas generacji neutronów $[s]$,

C_i - koncentracja prekursorów i-tej grupy neutronów opóźnionych $[m^{-3}]$,

β_i - udział neutronów opóźnionych i-tej grupy w ogólnej liczbie neutronów rozszczepieniowych ($\beta = \sum_{i=1}^{K} \beta_i$),

λ_i - stała rozpadu prekursorów i-tej grupy $[s^{-1}]$,

ρ - reaktywność,

ρ_z - reaktywność zewnętrzna (wymuszenie).

Jeżeli n_o, C_{io}, T_{ko} oznaczają wartości zmiennych stanu w położeniu równowagi (w punkcie pracy reaktora), to oczywiście zachodzi związek

$$\rho_o = \alpha n_o + \sum_{k=1}^{M} c_k T_{ko}. \tag{6.5}$$

W przypadku szczególnym, jeżeli rozpatrzyć podział reaktora na dwie strefy: paliwo i chłodziwo, otrzymuje się model reaktora z dwoma współczynnikami temperaturowymi. Zależność każdej z temperatur od mocy reaktora określają następujące równania:

$$m_1 c_1 \dot{T}_1 = bn - k(T_1 - T_2), \tag{6.6}$$

$$m_2 c_2 \dot{T}_2 = k(T_1 - T_2) - Gc_2(T_2 - \bar{T}), \tag{6.7}$$

gdzie:

m_1, m_2 - masa paliwa i chłodziwa w rdzeniu [kg],
c_1, c_2 - ciepło właściwe paliwa i chłodziwa $[\mathrm{Jkg^{-1}deg^{-1}}]$,
T_1, T_2 - temperatury (uśrednione po objętości) paliwa i chłodziwa $[^{\circ}\mathrm{C}]$,
G - wydatek chłodziwa $[\mathrm{kg\ s^{-1}}]$,
$\bar{T}$ - temperatura wlotowa chłodziwa (zakłada się, że $\bar{T}$ = const) $[^{\circ}\mathrm{C}]$,
k - współczynnik przenikania ciepła pomiędzy paliwem i chłodziwem $[\mathrm{J\ deg^{-1} s^{-1}}]$,
b - współczynnik wpływu mocy $[\mathrm{J\ m^3 s^{-1}}]$.

Równania (6.6) i (6.7) różnią się od postaci (6.4) członem zawierającym $\bar{T}$. Jeżeli jednak zastosować podstawienie

$$y_k(t) = T_k(t) - T_{ko} \quad (k = 1,\dots,M), \tag{6.8}$$

$$x(t) = n(t) - n_o, \tag{6.9}$$

to, po uwzględnieniu, że w punkcie pracy zachodzą związki:

a) w odniesieniu do równania (6.4)

$$\sum_{j=1}^{M} p_{kj} T_{jo} + b_k n_o = 0 \quad \text{dla } k = 1,\dots,M, \tag{6.10}$$

b) w odniesieniu do równań (6.6) i (6.7):

$$bn_o - k(T_{1o} - T_{2o}) = 0, \tag{6.11}$$

$$k(T_{1o} - T_{2o}) - Gc_2(T_{2o} - \bar{T}) = 0 \tag{6.12}$$

można równanie (6.4) przepisać w postaci

$$\dot{y}_k = \sum_{j=1}^{M} p_{kj} y_j + b_k x, \tag{6.13}$$

której szczególnym przypadkiem stają się równania (6.6) i (6.7) zapisane następująco:

$$\dot{y}_1 = -\frac{k}{m_1 c_1} y_1 - \frac{k}{m_1 c_1} y_2 + \frac{b}{m_1 c_1} x, \tag{6.14}$$

$$\dot{y}_2 = \frac{k}{m_2 c_2} y_1 - \frac{k + Gc_2}{m_2 c_2} y_2. \tag{6.15}$$

Wprowadzając zmienne

$$x_i(t) = C_i(t) - C_{io} \tag{6.16}$$

i uwzględniając, że

$$\frac{\beta i}{\Lambda} n_o - \lambda_i C_{io} = 0 \quad \text{dla } i = 1,\dots,K \tag{6.17}$$

można układ równań (6.1) ÷ (6.4) przepisać w postaci:

$$\dot{x} = \frac{\rho}{\Lambda}(x + n_o) - \frac{\beta}{\Lambda} x + \sum_{i=1}^{K} \lambda_i x_i, \tag{6.18}$$

$$\dot{x}_i = \frac{\beta_i}{\Lambda} x - \lambda_i x_i \quad (i = 1,\dots,K), \tag{6.19}$$

$$\rho = \rho_z(t) - \alpha x - \sum_{k=1}^{M} c_k y_k, \tag{6.20}$$

$$\dot{y}_k = \sum_{j=1}^{M} p_{kj} y_j + b_k x \quad (k = 1,\dots,M). \tag{6.21}$$

Zapisując układ (6.21) w postaci wektorowej

$$\dot{y} = Py + bx, \tag{6.22}$$

gdzie:

$$\left.\begin{aligned} P &= \{p_{kj}\}, \\ y &= \{y_k\}, \\ b &= \{b_k\} \end{aligned}\right\} (j,k = 1,\dots,M),$$

można jego rozwiązanie względem y przedstawić w formie

$$y(t) = e^{Pt}y_o + \int_0^t e^{P(t-\tau)}bx(\tau)d\tau , \qquad (6.23)$$

gdzie

$y_o = \{ y_{ok} \}_{(k=1,\dots,M)}$ - wartość wektora y(t) w chwili t = 0.

Wprowadzając z kolei wektor $c = \{ c_k \}_{(k=1,\dots,M)}$, można sumę $\sum_{k=1}^{M} c_k y_k$ wyrazić następująco

$$\sum_{k=1}^{M} c_k y_k(t) = c^T y(t) = c^T e^{Pt} y_o + \int_0^t c^T e^{P(t-\tau)} bx(\tau)d\tau =$$

$$= f(t) + \int_0^t h(t - \tau)x(\tau)d\tau , \qquad (6.24)$$

gdzie:

$c^T = \{ c_1, \dots, c_M \}$ - wektor transponowany w stosunku do c,

$$\left.\begin{aligned} f(t) &= c^T e^{Pt} y_o \qquad (6.25) \\ h(t) &= c^T e^{Pt} b \qquad (6.26) \end{aligned}\right\} \text{ - funkcje skalarne .}$$

Równanie (6.20) można wtedy przepisać w postaci

$$\rho = \rho^*(t) - \alpha x(t) - \int_0^t h(t - \tau)x(\tau)d\tau , \qquad (6.27)$$

gdzie

$$\rho^*(t) = \rho_z(t) + f(t). \qquad (6.28)$$

Uwzględniając, że każde z równań (6.19) można rozwiązać względem x_i

$$x_i(t) = e^{-\lambda_i t} x_{io} + \frac{\beta_i}{\Lambda} \int_0^t e^{-\lambda_i (t-\tau)} x(\tau)d(\tau), \qquad (6.29)$$

gdzie

x_{io} - wartość funkcji $x_i(t)$ w chwili t = 0, można układ (6.18) ÷ (6.21) sprowadzić do postaci równania następującego

$$\dot{x} + \frac{\beta}{\Lambda}x(t) - \frac{1}{\Lambda}\sum_{i=1}^{K}\beta_i\lambda_i\int_0^t e^{-\lambda_i(t-\tau)}\,x(\tau)d\tau + \frac{n_o}{\Lambda}\Big[\alpha x(t) +$$

$$+\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau\Big] = u(t) + [Bx](t) + [G_2x^2](t), \qquad (6.30)$$

gdzie:

$$u(t) = \frac{n_o}{\Lambda}\,\varrho^*(t) + \frac{1}{\Lambda}\sum_{i=1}^{K}\lambda_i e^{-\lambda_i t}\,x_{io}, \qquad (6.31)$$

$$[Bx](t) = \frac{\varrho^*(t)}{\Lambda}\,x(t), \qquad (6.32)$$

$$[G_2x^2](t) = -\frac{\alpha}{\Lambda}x^2(t) - \frac{1}{\Lambda}\,x(t)\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau. \qquad (6.33)$$

Dalsza analiza zostanie przeprowadzona przy założeniu, że części rzeczywiste wszystkich wartości własnych macierzy P (równanie (6.22)) są ujemne. Wtedy oczywiście $\lim_{t\to\infty} f(t) = 0$, $\lim_{t\to\infty} h(t) = 0$ oraz $\int_0^\infty |h(t)|dt < \infty$. Na wstępie zostanie rozpatrzone równanie

$$\dot{x}(t) + \frac{\beta}{\Lambda}x(t) - \frac{1}{\Lambda}\sum_{i=1}^{K}\beta_i\lambda_i\int_0^t e^{-\lambda_i(t-\tau)}\,x(\tau)d\tau + \frac{n_o}{\Lambda}\Big[\alpha x(t) +$$

$$+\int_0^t h(t-\tau)x(\tau)d\tau\Big] = u(t), \qquad (6.34)$$

będące szczególnym przypadkiem równania (5.2). Z twierdzenia 5.2 wynika, że jeśli

$$\inf_{Re\, s\geq 0} |F(s)| > 0, \qquad (6.35)$$

gdzie:

$$F(s) = s - \frac{1}{\Lambda}\sum_{i=1}^{K}\frac{\beta_i\lambda_i}{s+\lambda_i} + \frac{n_o}{\Lambda}[\alpha + H(s)] = s\Big(1 + \frac{1}{\Lambda}\sum_{i=1}^{K}\frac{\beta_i}{s+\lambda_i}\Big) +$$

$$+\frac{n_o}{\Lambda}[\alpha + H(s)], \qquad (6.36)$$

$H(s)$ - transformata Laplace'a funkcji $h(t)$,

to rozwiązanie równania (6.34) ma postać

$$x(t) = k(t)x_0 + \int_0^t k(t-\tau)u(\tau)d\tau, \tag{6.37}$$

gdzie:

$$x_0 = x(0) \quad \text{oraz}$$
$$K(s) = \mathcal{L}\{k(t)\} = [F(s)]^{-1}. \tag{6.38}$$

przy czym $\int_0^\infty |k(t)|\,dt < \infty$.

Ponieważ funkcja $F(s)$ jest ciągła w półpłaszczyźnie $\mathrm{Re}\, s \geqslant 0$ oraz holomorficzna dla $\mathrm{Re}\, s > 0$, więc [6]

$$\inf_{\mathrm{Re}\, s\geqslant 0} |F(s)| = \inf_{\omega\in(-\infty,\infty)} |F(j\omega)| \geqslant \inf_{\omega\in(-\infty,\infty)} |\mathrm{Re}\, F(j\omega)|. \tag{6.39}$$

Uwzględniając (6.36) można warunek (6.35) zastąpić nierównością mocniejszą

$$\inf_{\omega\in(-\infty,\infty)} \left| \frac{\omega^2}{\Lambda} \sum_{i=1}^{K} \frac{\beta_i}{\lambda_i^2+\omega^2} + \frac{n_0}{\Lambda}[\alpha + \mathrm{Re}\, H(j\omega)] \right| > 0, \tag{6.40}$$

która jest spełniona, jeśli tylko

$$\alpha + \mathrm{Re}\, H(j\omega) > 0 \quad \text{dla każdego rzeczywistego } \omega . \tag{6.41}$$

Jak łatwo zauważyć, funkcja $k(t)$ jest wówczas zbieżna do zera

$$\lim_{t\to\infty} k(t) = 0. \tag{6.42}$$

Jeśli więc oznaczyć

$$[A_1x](t) = \int_0^t k(t-\tau)x(\tau)d\tau, \tag{6.43}$$

to

$$A_1 \in (C \to C), \; A_1 \in (K \to K)$$

oraz

$$\|A_1\|_K \leqslant \|A_1\|_C = \int_0^\infty |k(t)|\,dt. \tag{6.44}$$

Równanie (6.30) można wtedy przepisać w formie następującej

$$x = w + A_1Bx + A_1G_2x^2, \tag{6.45}$$

gdzie

$$w(t) = k(t)x_o + [A_1u](t). \tag{6.46}$$

Równanie (6.45) można zapisać nieco inaczej

$$(I - A_1B)x = w + A_1G_2x^2, \tag{6.47}$$

gdzie

I - operator tożsamościowy.

Jak można wykazać, jeśli $A_1 \in (X \to X)$, $B \in (X \to X)$ oraz

$$\|A_1B\| < 1, \tag{6.48}$$

to istnieje operator $A_2 \in (X \to X)$ o postaci następującej

$$A_2 = (I - A_1B)^{-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (A_1B)^n, \tag{6.49}$$

gdzie

$$\|A_2\| \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A_1B\|^n = (1 - \|A_1B\|)^{-1}. \tag{6.50}$$

Ponieważ z tego, że $\varphi_z \in C$ wynika, że:

1) $w \in C$,
2) $B \in (C \to C)$,
3) $B \in (K \to K)$,
4) $\|B\|_K \leq \|B\|_C = \frac{1}{\Lambda} \sup_{t \geq 0} |\varphi^*(t)|$,

więc jeśli tylko

$$\sup_{t \geq 0} |\varphi^*(t)| < \frac{\Lambda}{\int_0^{\infty} |k(t)| dt}, \tag{6.51}$$

wówczas warunek (6.48) jest spełniony zarówno w odniesieniu do przestrzeni C jak i K, a więc równanie (6.47) przyjmie ostatecznie postać

$$\dot{x} = z + AG_2x^2, \tag{6.52}$$

gdzie:

$$z = A_2w = (I - A_1B)^{-1}w \in C, \tag{6.53}$$

$$A = A_2A_1, \tag{6.54}$$

$$\|A\|_K \leqslant \|A\|_C \leqslant \frac{\Lambda \int_0^\infty |k(t)|\,dt}{\Lambda - \sup\limits_{t\geqslant 0} |\varrho^*(t)| \int_0^\infty |k(t)|\,dt}. \tag{6.55}$$

Uwzględniając wzory (6.24), (6.28), (6.46) oraz (6.51) można otrzymać następujące oszacowanie normy z w przestrzeni C

$$\|z\|_C = \sup_{t\geqslant 0} |z(t)| \leqslant \frac{\Lambda}{\Lambda - \sup\limits_{t\geqslant 0} |\varrho^*(t)| \int_0^\infty |k(t)|\,dt} \Big[\sup_{t\geqslant 0} \big|k(t)\big|\,|x_o| + $$

$$+ \frac{1}{\Lambda} \int_0^\infty |k(t)|\,dt \Big(n_o \sup_{t\geqslant 0} |\varrho_z(t)| + n_o \sup_{t\geqslant 0} |c^T e^{Pt} y_o| + $$

$$+ \sum_{i=1}^{K} \lambda_i |x_{io}| \Big) \Big]. \tag{6.56}$$

Jeżeli więc wartości x_o, x_{io} $(i = 1,\dots,K)$, y_{jo} $(j = 1,\dots,M)$ oraz $\sup\limits_{t\geqslant 0} |\varrho_t(t)|$ są dostatecznie małe, to równanie (6.52) ma postać (2.1) w odniesieniu do przestrzeni C, norma zaś jego rozwiązania spełnia oszacowanie (2.22).

Na szczególnie dokładne rozpatrzenie zasługuje przypadek, gdy $\varrho_z(t) \equiv 0$.

Dla jego analizy celowe będzie przytoczenie definicji stabilności w sensie Lapunowa [3].

Niech będzie dany układ równań

$$\frac{d\xi}{dt} = f(t,\xi), \tag{6.57}$$

gdzie:

$\xi = \{\xi_k\}$,

$f = \{f_k\}$ $(k = 1,\dots,n)$.

D e f i n i c j a 6.1

Rozwiązanie $\xi^*(t)$ $(a<t<\infty)$ równania (6.57) jest stabilne w sensie Lapunowa, jeżeli dla dowolnego $\varepsilon>0$ i $t_0 \in (a,\infty)$ istnieje liczba $\delta>0$ taka, że:

1) wszystkie rozwiązania $\xi=\xi(t)$ równania (6.57) spełniające warunek

$$\|\xi(t_0)-\xi^*(t_0)\|_2<\delta \tag{6.58}$$

są określone w przedziale $t\in\langle t_0,\infty)$, przy czym $\xi(t)\in D\subset E_n^2$ (dla każdego $t\geqslant t_0$);

2) wszystkie te rozwiązania spełniają nierówność

$$\|\xi(t)-\xi^*(t)\|_2<\varepsilon \quad \text{dla } t\in\langle t_0,\infty). \tag{6.59}$$

W powyższej definicji norma $\|\ \|_2$ może być zastąpiona przez jakąkolwiek inną jej równoważną (w przestrzeni n-wymiarowej), np. $\|\xi\|_1 = \sup\limits_{k=1,\dots,n}|\xi_k|$

D e f i n i c j a 6.2

Jeżeli liczba δ nie zależy od wyboru t_0, to stabilność jest jednostajna.

Ponieważ układ (6.18)$\div$(6.21) jest (przy $\varrho_z(t)\equiv 0$) układem autonomicznym (podstawienie $t'=t-t_0$ nie zmienia jego postaci), więc nierówność (6.41) jest warunkiem dostatecznym stabilności w sensie Lapunowa jego rozwiązania zerowego (a nawet stabilności jednostajnej tegoż rozwiązania). O własnościach rozwiązań tego układu można nawet powiedzieć coś więcej. Jeżeli oznaczyć przez $\xi(t)$ wektor o składowych

$$\xi(t)=\left\{x(t),\ x_1(t),\dots,\ x_K(t),\ y_1(t),\dots,\ y_M(t)\right\}, \tag{6.60}$$

to (jak wynika z poprzednich rozważań) można znaleźć taką liczbę $\gamma>0$ oraz funkcję ciągłą f, że dla każdego $t_0>0$, jeśli tylko $\|\xi(t_0)\|_2<\gamma$, to

$$\|\xi(t)\|_2\leqslant f\left(\|\xi(t_0)\|_2\right) \quad \text{dla } t\geqslant t_0, \tag{6.61}$$

gdzie

$f(0) = 0.$

Powracając do przypadku ogólnego ($\rho_z \in C$), można dotyczące go wyniki sformułować w formie analogicznej jak powyżej wprowadzając nową definicję stabilności, stanowiącą uogólnienie definicji Lapunowa, a mającą zastosowanie do następującego układu równań różniczkowych zwyczajnych (stanowiącego rozszerzenie układu (6.57)

$$\frac{d\xi(t)}{dt} = f\big(t, \xi(t), w(t)\big), \tag{6.62}$$

gdzie

$w(t) = \{w_k(t)\}_{(k=1,\dots,m)}$ - wymuszenie.

D e f i n i c j a 6.3

Rozwiązanie $\xi^*(t)$ $(a<t<\infty)$ równania (6.62) jest stabilne przy wymuszeniu $w(t)$, jeżeli dla dowolnej liczby dodatniej ε i dowolnego $t_o > a$ istnieją liczby dodatnie δ_1 i δ_2 takie, że:

1) wszystkie rozwiązania $\xi = \xi(t)$ równania (6.62) spełniające warunek

$$\|\xi(t_o) - \xi^*(t_o)\|_2 < \delta_1 \tag{6.63}$$

są, dla $w(t)$ takich, że $\sup\limits_{t \geq t_o} \|w(t)\|_2 < \delta_2$, określone w przedziale $\langle t_o, \infty)$, przy czym $\xi(t) \in D \subset E_n^2$ (dla każdego $t \geq t_o$);

2) wszystkie te rozwiązania spełniają nierówność

$$\|\xi(t) - \xi^*(t)\|_2 < \varepsilon \quad \text{dla } t > t_o. \tag{6.64}$$

Jeśli w układzie (6.18)÷(6.21) przyjąć $w(t) = \rho_z(t)$ to, jak łatwo zauważyć, jeżeli spełniony jest warunek (6.41), wówczas rozwiązanie zerowe tegoż układu jest stabilne w sensie definicji 6.3. Podobnie jak w przypadku $\rho_z(t) = 0$, również tutaj można własności rozwiązań omawianego układu określić dokładniej: można mianowicie znaleźć takie liczby $\gamma_1 > 0$ i $\gamma_2 > 0$ oraz funkcję ciągłą f_1, że dla każdego $t_o > 0$ jeśli $\sup\limits_{t \geq t_o} |\rho_z(t)| < \gamma_1$ oraz $\|\xi(t_o)\|_2 < \gamma_2$, spełniona jest nierówność

$$\|\xi(t)\|_2 \leq f\Big[c_1 \sup_{t \geq t_0} |\varrho_z(t)| + c_2 \|\xi(t_0)\|_2\Big], \tag{6.65}$$

gdzie:

$f_1(0) = 0$, a

ξ jest określone wzorem (6.60).

Równanie (6.52) można również rozpatrywać w przestrzeni K. Jak łatwo wykazać, zachodzi następujące oszacowanie

$$\|z\|_K \leq \frac{n_0}{\Lambda - \sup\limits_{t \geq 0} |\varrho^*(t)| \int_0^{\infty} |k(t)|\,dt} \|\varrho_z\|_K , \tag{6.66}$$

skąd wynika, że jeśli tylko norma $\|\varrho_z\|_K$ jest dostatecznie mała, to norma $\|x\|_K$ rozwiązania równania (6.52) spełnia oszacowanie (2.22). Jeżeli ponadto $\lim\limits_{t \to \infty} \varrho_z(t) = 0$, to $\|\varrho_z\|_K = 0$, a więc również $\lim\limits_{t \to \infty} x(t) = 0$.

W przypadku szczególnym, gdy $\varrho_z(t) \equiv 0$, wynika stąd stabilność asymptotyczna globalna rozwiązania zerowego układu (6.18)÷(6.21), co jest równoważne stabilności asymptotycznej globalnej rozwiązania stacjonarnego (punktu pracy reaktora) układu równań kinetyki (6.1)÷(6.4).

Dla przypadku ogólnego można wprowadzić następującą definicję stabilności asymptotycznej oraz asymptotycznej globalnej:

D e f i n i c j a 6.4

Rozwiązanie $\xi^*(t)$ $\big(t \in (a, \infty)\big)$ równania (6.62) jest asymptotycznie stabilne przy wymuszeniu $w(t)$, jeśli jest stabilne w sensie definicji 6.3 oraz dla dowolnego $t_0 > a$ istnieje liczba $M = M(t_0)$ taka, że jeśli $\lim\limits_{t \to \infty} w(t) = 0$, to wszystkie rozwiązania $\xi(t)$ spełniające warunek

$$\|\xi(t_0) - \xi^*(t_0)\|_2 < M \tag{6.67}$$

mają własność

$$\lim_{t \to \infty} \|\xi(t) - \xi^*(t)\|_2 = 0. \tag{6.68}$$

D e f i n i c j a 6.5

Jeżeli warunek (6.68) zachodzi dla każdego rozwiązania $\xi(t)$ (tzn. $M = \infty$), to rozwiązanie $\xi^*(t)$ jest stabilne asymptotycznie globalnie przy działającym wymuszeniu $w(t)$.

Łatwo teraz można stwierdzić, że nierówność (6.41) jest warunkiem koniecznym na to, żeby rozwiązanie stacjonarne układu równań kinetyki (6.1)÷(6.4) było stabilne asymptotycznie globalnie przy działającym wymuszeniu $\rho_z(t)$.

7. Wnioski końcowe

Podana w niniejszej pracy metoda pozwala badać własności rozwiązań szerokiej klasy równań (bądź układów równań), które można sprowadzić do postaci równania operatorowego (2.1) określonego na pewnej przestrzeni Banacha. Jak wykazano, można przy jej pomocy sformułować m.in.warunki konieczne stabilności w sensie Lapunowa dla układu równań różniczkowych zwyczajnych.

W odniesieniu do zagadnienia kinetyki reaktorów otrzymano wyniki, które stanowią uogólnienie tzw. kryterium Weltona [4, 5]. Godny uwagi jest fakt, że opracowana metoda umożliwia badanie stabilności modeli reaktorów uwzględniających wpływ wymuszenia zewnętrznego reaktywności, które w dotychczasowych opracowaniach było z reguły pomijane.

BIBLIOGRAFIA

[1] Kołodziej W.: Wybrane rozdziały analizy funkcjonalnej. PWN. Warszawa 1970.

[2] Gelfand I. M., Rajkov D., Sziłov G. E.: Kommutativnyje normirowannyje kolca. GIFMA. Moskva 1960.

[3] Gutowski R.: Równania różniczkowe zwyczajne. WNT. Warszawa 1971.

[4] Welton T. A.: A stability criterion for reactor systems. ORNL-1894. 1955.

[5] Gyftopoulos E. P.: Theoretical and experimental criteria for nonlinear reactor stability. Nucl. Sci. and Engng 26,No1. 1966.

[6] Saks S., Zygmund A.: Funkcje analityczne. PWN.Warszawa 1959.

АНАЛИЗ НЕКОТОРОГО ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЯМ УСТОЙЧИВОСТИ ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРОВ

К р а т к о е   с о д е р ж а н и е

Проведено анализ некоторого операторного уравнения определённого в пространстве Банаха. К этому уравнению можно свести широкий класс нелинейных уравнений.

Подробно рассмотрено свойства решений системы альгебраических уравнений а также интегрального и дифференциально-интегрального уравнений.

Наконец определено достаточные условия асимптотической устойчивости в целом для модели реактора с линейной обратной связью, принимая во внимание внешние колебания реактивности.

ANALYSIS OF A CERTAIN OPERATOR EQUATION AS APPLIED TO THE EXAMINATION OF NUCLEAR REACTOR STABILITY

S u m m a r y

An analysis has been performed herein of a certain operator equation as determined within the Banach space. This equation provides a form to which an extensive class of non-linear equations of various type can be reduced.

The properties of solutions of a set of algebraic equations as well as those of an integral and of an integro-differential equation, have been given a consideration in detail. This has served as the basis for the determination of sufficient conditions of the global asymptotic stability of point kinetics model for a reactor incorporating a linear feedback, with the consideration given to the external reactivity oscillations.

Rękopis dostarczono we wrześniu 1972 r.