BIULETYN INFORMACYJNY INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Nr 37 1972

Mgr inż. Andrzej Masłowski
Instytut Techniki Cieplnej

METODA OPTYMALNEJ ESTYMACJI PEWNYCH PROCESÓW FIZYCZNYCH — NA PRZYKŁADZIE MODELU ZJAWISK ZACHODZĄCYCH W REAKTORZE JĄDROWYM

1. Wstęp

W wielu dziedzinach nauki i techniki występuje problem oszacowania pewnych zjawisk zachodzących w czasie i przestrzeni. Do takich dziedzin zalicza się także inżynieria reaktorowa. Jak wykazano w [1], reaktor jądrowy mocy jest układem złożonym i opisanie go dokładnym modelem matematycznym (szczególnie w stanie nieustalonym) jest praktycznie niemożliwe. W wielu zagadnieniach, związanych np. z przyszłą lub bieżącą eksploatacją reaktora, przydatna okazać się może estymacja optymalna funkcji stanu pewnych zjawisk reaktorowych [1], formalizm której został podany w [2]. Ta metoda estymacji opiera się na znanym z pewną dokładnością modelu deterministycznym dynamiki i obserwacji tych zjawisk oraz na przyjętym (proponowanym) wskaźniku jakości estymacji, stanowiącym miarę zgodności modelu matematycznego z rzeczywistymi procesami reaktorowymi.

W niniejszej pracy omówione zostaną teoretyczne aspekty proponowanej metody estymacji optymalnej rozważanej klasy procesów zachodzących w reaktorze jądrowym, szczególnie reaktorze energetycznym.

2. Sformułowanie zadania optymalnej estymacji rozważanych zjawisk reaktorowych

2.1. Zadanie estymacji optymalnej funkcji stanu interesującej klasy procesów reaktorowych, można postawić następująco [1] [2]:

(I) Należy znaleźć taką funkcję $\hat{U}(t,X)$ oraz funkcje $\hat{F}^{\Gamma}_{\Omega}(t,X)$ i $\hat{F}_{\bar{\Omega}}(t,X)$, dla których funkcjonał (proponowany wskaźnik jakości estymacji [1]) o postaci

$$\beta\left[\hat{U},\hat{F}^{\Gamma}_{\Omega},\ \hat{F}^{V}_{\bar{\Omega}}\right] = \int_{t_0}^{T}\int_{\bar{\Omega}} (\hat{F}^{\Gamma})^{Tr}\hat{F}^{\Gamma}\,d\Omega dt + \int_{t_0}^{T}\int_{\bar{\Omega}} (\hat{F}^{V}_{\bar{\Omega}})^{Tr}D(X)\hat{F}^{V}_{\bar{\Omega}}\,d\bar{\Omega}dt +$$
$$+\int_{t_0}^{T}\left[Z(t) - \int_{\bar{\Omega}} D(X)\left[S(t)\hat{U}(t,X) + \hat{F}^{V}_{\bar{\Omega}}\right]d\bar{\Omega}\right]^{Tr}\left[(\cdot)\right] dt \tag{1}$$

osiąga swoje minimum warunkowe przy spełnieniu ograniczeń równościowych (równania opisujące model dynamiki [1]):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,X) = \mathcal{L}(X)\hat{U}(t,X) + \zeta(t,X) + \hat{F}^{\Gamma}_{\Omega}(t,X) && \text{dla } X\in\Omega, \\ &\hat{U}(t,X) = 0 && \text{dla } X\in\partial\Omega, \\ &\hat{U}(t_0,X) = 0 && \text{dla } X\in\bar{\Omega}, \end{aligned} \tag{2}$$

oraz ograniczeń nierównościowych (warunek poprawnego postawienia zadania estymacji z fizycznego punktu widzenia [1]):

$$\hat{U}(t,X) + U_p(X) \geq 0 \quad \text{dla } X\in\bar{\Omega}, \tag{3}$$

gdzie:

X – trójwymiarowy wektor współrzędnych przestrzennych z obszaru reaktora $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, gdzie Ω jest wnętrzem a $\partial\Omega$ brzegiem tego obszaru,

t – czas przedziału czasu estymacji $[to,\ T]$,

$\hat{U}(t,X)$ – n-wymiarowy wektor estymat funkcji stanu rozważanych procesów reaktorowych,

$\hat{F}^{\Gamma}_{\Omega}(t,X)$ – n-wymiarowy wektor dopuszczalnych [2] funkcji błędu opisu dynamiki rozważanych procesów reaktorowych,

$E_{\Omega}^{v}(t,X)$ - k - wymiarowy wektor dopuszczalnych [2] funkcji błędu opisu obserwacji rozważanych procesów reaktorowych,

$U_p(X)$ - dany n - wymiarowy wektor funkcji zależnych od X, określający poziom mocy reaktora,

$\zeta(t,X)$ - dany n - wymiarowy wektor, określający znane oddziaływanie otoczenia na zjawiska zachodzące w reaktorze jądrowym,

$\alpha(X)$ - dany, liniowy $(n * n)$ macierzowy operator różniczkowy cząstkowy rzędu drugiego, zależny od X,

D(X) - diagonalna $(k * k)$ macierz funkcji delta Diraca,

S(t) - dana $(n * k)$ macierz funkcji zależnych od czasu, spełniająca rolę macierzy wagi,

Z(t) - dany k - wymiarowy wektor funkcji opisujących zmiany wielkości obserwowanych w czasie $t \in [t_o, T]$,

Tr - oznacza transpozycję,

$[(\cdot)]$ - oznacza (tu i dalej w artykule) takie samo wyrażenie, jak w poprzedzającym ten zapis nawiasie kwadratowym.

2.2. W powyższym sformułowaniu zadanie optymalnej estymacji funkcji stanu rozważanych procesów reaktorowych jest zadaniem szukania minimum funkcjonału całkowo-kwadratowego przy ograniczeniu równościowym typu równań różniczkowych cząstkowych i ograniczeniu nierównościowym nałożonym na jedną z funkcji minimalizujących ten funkcjonał.

3. Analiza możliwości optymalnej estymacji rozważanej klasy zjawisk reaktorowych

3.1. Analiza możliwości estymacji rozpatrywanych procesów reaktorowych dotyczy przede wszystkim dwu zagadnień [2]:

a) czy można jednoznacznie wyznaczyć (dla ustalonej funkcji błędu $E_{\Omega}^{v}(t,X)$ funkcje stanu U(t,X) dla chwili czasu $t \in [t_o,T]$ i $X_m \in \Omega$ oraz dla danego Z(t), przy określonej transformacji między Z i U

$$Z(t) = \int_{\Omega} D(X)\left[S(t)U(t,X) + F_{\Omega}^{\nu}\right] d\bar{\Omega}, \tag{4}$$

b) czy istnieje rozwiązanie danego zadania (I) estymacji optymalnej funkcji stanu $U(t,X)$ i czy jest ono jednoznaczne.

3.2. Problem pierwszy przedstawić można jako problem istnienia jednoznacznego przekształcenia, odwrotnego do danego, co w danym przypadku sprowadza się do istnienia macierzy odwrotnej do danej macierzy $S(t)$.

Rozpisując bowiem (4) otrzymuje się

$$z_m(t) = \sum_{n=1}^{N} S_{m,n}(t) u_n(t, X_m) + f_{\Omega m}^{\nu}(t, X_m) \tag{4'}$$

$$m = 1, 2, \ldots K,$$

gdzie:

$S_{m,n}$ - wyrazy macierzy $S(t)$,

$u_n(t,X_m)$ - n-ta składowa wektora funkcji stanu w punkcie przestrzeni $X = X_m$,

X_m - punkt przestrzeni $\bar{\Omega}$, odpowiadający indeksowi funkcji $z_m(t)$, a w interpretacji fizycznej oznaczający miejsce umieszczenia m - tego detektora w objętości reaktora [1],

$f_{\bar{\Omega} m}^{\nu}(t,X_m)$ - m - ta składowa wektorowej funkcji błędu opisu obserwacji procesu [1].

Ponieważ dla celów tej analizy funkcja $f_{\bar{\Omega} m}^{\nu}(t,X_m)$ jest ustalona, a X_m jest w tym przypadku parametrem, można zatem napisać zależność (4)' jako

$$\tilde{w}_m(t) = z_m(t) - f_{\bar{\Omega} m}^{\nu}(t,X_m) = \sum_{n=1}^{N} S_{m,n}(t)\tilde{u}_n(t), \tag{5}$$

gdzie:

$$\tilde{u}_n(t) \triangleq u_n(t, X_m).$$

Pisząc (5) w postaci wektorowej otrzymuje się

$$\tilde{W}(t) = S(t)\tilde{U}(t), \tag{5'}$$

skąd

$$\tilde{U}(t) = S^{-1}(t)\tilde{W}(t). \tag{6}$$

Zatem warunkiem jednoznacznego wyznaczenia funkcji stanu $U(t,X)$ dla danego t,X, $Z(t)$ i ustalonej $\dot{E}^{v}_{\Omega}$ jest w tym przypadku istnienie macierzy odwrotnej $S^{-1}(t)$ do danej macierzy $S(t)$.

3.3. Problem drugi wiąże się z badaniem warunków wystarczających na to, aby rozwiązanie danego zadania estymacji było optymalne. Spełnienie przez to warunków wystarczających zapewni jego istnienie, a spełnienie jednocześnie warunków koniecznych pozwoli na jego jednoznaczne wyznaczenie [3], przy czym będzie to jednoznaczność albo w sensie lokalnym albo w sensie absolutnym, w zależności od rodzaju uzyskanego ekstremum funkcjonału (1).

4. Optymalna estymacja rozważanej klasy procesów reaktorowych jako zadanie optymalizacji dynamicznej

4.1. Przekształcając sformułowanie (I) zadania estymacji optymalnej, równanie opisujące model dynamiki [1] rozważanych procesów reaktorowych można przedstawić w równoważnej mu postaci całkowej [4], [5]

$$U(t,X) = \int_{t_0}^{t}\int_{\Omega} K_0(t',t,X',X)\left[\zeta(t',X') + E^{r}_{\Omega}(t',X')\right] d\Omega' dt', \tag{7}$$

gdzie:

K_0 jest macierzą funkcji Greena, z założenia daną.

Należy zaznaczyć, że w szczególnym przypadku jej wyznaczenie może okazać się trudnym zadaniem.

4.2. Zdefiniowano następujący operator

$$\varphi[\hat{U},\hat{F}_{\Omega}^{\Gamma}] \triangleq \left\{\varphi_1[\hat{U},\hat{F}_{\Omega}^{\Gamma}],\ -\varphi_1[\hat{U},\hat{F}_{\Omega}^{\Gamma}],\ -(\hat{U}+U_p)\right\}, \tag{8}$$

gdzie:

$$\varphi_1[\hat{U},\hat{F}_{\Omega}^{\Gamma}] = \hat{U}(t,X) - \int_{t_0}^{t}\int_{\Omega} K_0(t',t,X',X)[\xi(t',X') + \hat{F}_{\Omega}^{\Gamma}(t',X')]d\Omega dt',$$

oraz symbol $\{\}$ jest symbolem zbioru uporządkowanego [6].

Operator (8) przyjmuje wartość w przestrzeni funkcyjnej Z, będącej iloczynem kartezjańskim przestrzeni $\hat{\Gamma}$ estymat funkcji stanu i przestrzeni $\hat{\Gamma}_{\Gamma}$ estymat funkcji błędu opisu dynamiki

$$Z = \hat{\Gamma}(\bar{\Omega}\times[t_0,T])\times\hat{\Gamma}_{\Gamma}(\bar{\Omega}\times[t_0,T])\times\hat{\Gamma}(\bar{\Omega}\times[t_0,T])\times$$
$$\times\hat{\Gamma}_{\Gamma}(\bar{\Omega}\times[t_0,T])\times\hat{\Gamma}(\bar{\Omega}\times[t_0,T]). \tag{9}$$

Przyjmuje się, że przestrzenie $\hat{\Gamma}$, $\hat{\Gamma}_{\Gamma}$ są przestrzeniami Banacha. Zatem Z jest też przestrzenią Banacha [6]. Zakłada się ponadto, że przestrzeń dopuszczalnych funkcji błędu opisu obserwacji rozważanej klasy procesów reaktorowych (zdefiniowanej w [2]) jest również przestrzenią Banacha. Niech funkcjonał (1) będzie określony na elementach przestrzeni Z i przestrzeniach funkcji $z_m(t)$, $S_{n,m}(t)$, będących też przestrzeniami Banacha, np. przestrzeniami typu $C[t_0,T]$ (funkcji ciągłych czasu).

4.3. Zadanie optymalnej estymacji podane w punkcie 2 można sformułować przy przyjętych założeniach jako następujące zadanie optymalizacji dynamicznej:

(II) należy wyznaczyć takie elementy $\hat{U}^*$, $\hat{F}_{\Omega}^{\Gamma *}$ przestrzeni $\hat{\Gamma}$ i $\hat{\Gamma}_{\Gamma}$ oraz element $\hat{F}_{\Omega}^{v\,*}$ przestrzeni $\hat{\Gamma}_{\Gamma}$ dla których funkcjonał (1) osiąga swoje minimum warunkowe, tzn.

$$\beta\left[\hat{U}^*,\hat{F}_\Omega^{\Gamma *},\hat{F}_\Omega^{V *}\right] = \min_{\substack{\hat{U}\in\hat{\Gamma} \\ \hat{F}_\Omega^{\Gamma}\in\hat{\Gamma}_r \\ \hat{F}_\Omega^{V}\in\hat{\Gamma}_V}} \beta\left[\hat{U},\hat{F}_\Omega^{\Gamma},\hat{F}_\Omega^{V}\right] \tag{10}$$

przy spełnieniu ograniczenia

$$\varphi\left[\hat{U}^*,\hat{F}_\Omega^{\Gamma *}\right]\leqslant 0. \tag{11}$$

Bowiem zgodnie z (8) warunek (11) można zapisać jako

$$\left\{\varphi_1\left[\hat{U}^*,\hat{F}_\Omega^{\Gamma *}\right],\ -\varphi_1\left[\hat{U}^*,\hat{F}_\Omega^{\Gamma *}\right],\ -\left(U^* + U_p\right)\right\}\leqslant 0, \tag{11'}$$

co jest równoważne zależnościom:

$$\begin{aligned} \varphi_1\left[\hat{U}^*,\ \hat{F}_\Omega^{\Gamma *}\right] &= 0, \\ U^* + U_p &\geqslant 0. \end{aligned} \tag{11''}$$

5. Warunki wystarczające i konieczne optymalnego rozwiązania danego zadania estymacji

5.1. Warunki powyższe, w postaci różniczkowej i określające ekstremum lokalne, zostaną podane przy wykorzystaniu pojęcia funkcjonałów Lagrange'a [6] [7]:

Niech:

a) funkcjonał β i operator φ będą różniczkowalne w sensie Frecheta (silnie różniczkowalne),

b) funkcjonał β i operator φ będą wypukłe.

Ogólną funkcją Lagrange'a danego zadania będzie następujące wyrażenie

$$\Phi[\hat{\underset{\sim}{U}},\hat{F}^{\Gamma}_{\Omega},\hat{F}^{V}_{\Omega},\tilde{\lambda}]=\beta[\hat{\underset{\sim}{U}},\hat{F}^{\Gamma}_{\Omega},\hat{F}^{V}_{\Omega}]+\tilde{\lambda}\left[\varphi[\hat{\underset{\sim}{U}},\hat{F}^{\Gamma}_{\Omega}]\right]=$$

$$=\beta[\hat{\underset{\sim}{U}},\hat{F}^{\Gamma}_{\Omega},\hat{F}^{V}_{\Omega}]+\tilde{\lambda}_1\left[\{\varphi_1,-\varphi_1\}\right]+\tilde{\lambda}_2[-\hat{\underset{\sim}{U}}]= \tag{12}$$

$$=\Phi_1[\hat{\underset{\sim}{U}},\hat{F}^{\Gamma}_{\Omega},\hat{F}^{V}_{\Omega},\tilde{\lambda}_1]+\tilde{\lambda}_2[-\hat{\underset{\sim}{U}}],$$

gdzie:

$\tilde{\lambda}=\{\tilde{\lambda}_1,\tilde{\lambda}_2\}$ - funkcjonał liniowy nieujemny [6], określony na przestrzeni Z,

$\tilde{\lambda}_1$ - funkcjonał liniowy nieujemny określony na przestrzeni $\hat{\Gamma}\times\hat{\Gamma}_r\times\hat{\Gamma}\times\hat{\Gamma}_r$,

$\tilde{\lambda}_2$ - funkcjonał liniowy nieujemny, określony na przestrzeni $\hat{\Gamma}$,

$\Phi_1=\beta+\tilde{\lambda}_1$ - szczególną funkcja Lagrange'a danego zadania,

$\hat{\underset{\sim}{U}} \triangleq \hat{U}+U_p$.

5.2. Warunki wystarczające na to, aby istniało optymalne rozwiązanie zadania (II) estymacji, podaje poniższe twierdzenie.

W tym twierdzeniu jak i dalej symbol $d_\alpha D(\alpha_0;\alpha)$ oznacza silną różniczkę Fracheta [6].

T w i e r d z e n i e 1

Przy przyjętych założeniach, jeżeli istnieją takie $\hat{\underset{\sim}{U}}^*$, $\hat{F}^{\Gamma*}_{\Omega}$, $\hat{F}^{V*}_{\Omega}$ i taki funkcjonał liniowy $\tilde{\lambda}_1^*$ (funkcjonał Lagrange'a), że dla każdego $\hat{\underset{\sim}{U}}$, $\hat{F}^{\Gamma}_{\Omega}$, $\hat{F}^{V}_{\Omega}$ spełnione są warunki:

$$d_{\hat{\underset{\sim}{U}}}\Phi_1[(\hat{\underset{\sim}{U}}^*,\hat{F}^{\Gamma*}_{\Omega},\hat{F}^{V*}_{\Omega},\tilde{\lambda}_1^*);\hat{\underset{\sim}{U}}^*]=0,$$

$$d_{\hat{F}^{\Gamma}_{\Omega}}\Phi_1[(\hat{\underset{\sim}{U}}^*,\hat{F}^{\Gamma*}_{\Omega},\hat{F}^{V*}_{\Omega},\tilde{\lambda}_1^*);\hat{F}^{\Gamma*}_{\Omega}]=0, \tag{13}$$

$$d_{\hat{F}^{V}_{\Omega}}\Phi_1[(\hat{\underset{\sim}{U}}^*,\hat{F}^{\Gamma*}_{\Omega},\hat{F}^{V*}_{\Omega},\tilde{\lambda}_1^*);\hat{F}^{V*}_{\Omega}]=0,$$

dla każdego $\hat{U} \geq 0$

$$d_{\hat{U}}\Phi_1[(\hat{U}^*, \hat{F}_\Omega^{\Gamma *}, \hat{F}_\Omega^{v*}, \tilde{\lambda}_1^*); \hat{U}] \geq 0, \tag{14}$$

$$d_{\tilde{\lambda}_1}\Phi_1[(\hat{U}^*, \hat{F}_\Omega^{\Gamma *}, \hat{F}_\Omega^{v*}, \tilde{\lambda}_1^*); \tilde{\lambda}_1^*] = 0, \tag{15}$$

dla każdego $\tilde{\lambda}_1 \geq 0$

$$d\tilde{\lambda}_1\Phi_1[(\hat{U}^*, \hat{F}_\Omega^{\Gamma *}, \hat{F}_\Omega^{v*}, \tilde{\lambda}_1^*); \tilde{\lambda}_1] \leq 0, \tag{16}$$

to funkcjonał $\beta[\hat{U}^*, \hat{F}_\Omega^{\Gamma *}, \hat{F}_\Omega^{v*}]$ osiąga swoje minimum przy warunku $\varphi[\hat{U}^*, \hat{F}_\Omega^{\Gamma *}] \leq 0$.

Dowód tego twierdzenia jest podobny do podanego w [6].

5.3. Warunki konieczne optymalnego rozwiązania danego zadania można otrzymać z warunków wystarczających po rozważeniu regularności problemu (rezygnując wtedy z założenia o wypukłości β i φ).

Analiza ta dotyczy sprawdzenia dwu założeń.

Pierwszym jest założenie o regularności operatora φ [7]. Wariacją dopuszczalną (w sensie Hurwicza) ze względu na ograniczenia (11) w punkcie $\{\hat{U}^*, \hat{F}_\Omega^{\Gamma *}\}$ będzie taki punkt $\{\hat{U}, \hat{F}_\Omega^{\Gamma}\}$, który spełnia te ograniczenia w liniowym przybliżeniu, to jest dla którego zachodzą zależności

$$\varphi[\hat{U}^*, \hat{F}_\Omega^{\Gamma *}] + d_{\hat{U}}\varphi[(\hat{U}^*, \hat{F}_\Omega^{\Gamma *}); \hat{U}] + d_{\hat{F}_\Omega^{\Gamma}}\varphi[(\hat{U}^*, \hat{F}_\Omega^{\Gamma *}); \hat{F}_\Omega^{\Gamma}] \leq 0. \tag{17}$$

Jeżeli dla każdej wariacji dopuszczalnej $\{\hat{U}, \hat{F}_\Omega^{\Gamma}\}$ w punkcie $\{\hat{U}^*, \hat{F}_\Omega^{\Gamma *}\}$ istnieje krzywa wychodząca z tego punktu, styczna do niej i leżąca w zbiorze rozwiązań dopuszczalnych, to punkt $\{\hat{U}^*, \hat{F}_\Omega^{\Gamma *}\}$ nazywany jest punktem regularnym operatora φ. Operator będzie regularny, jeśli każdy punkt zbioru rozwiązań dopuszczalnych będzie punktem regularnym tego operatora. Analitycznie wyraża się to istnieniem takiej funkcji zmiennej rzeczywistej s (gdzie $0 \leq s \leq s_0$, $s_0 > 0$) działającej z $[0, s_0] \to \hat{\Gamma} \times \hat{\Gamma}$ aby $\psi(s)$ należała do zbioru rozwiązań dopuszczalnych oraz:

$$\psi(0) = \left\{ \underset{\sim}{\hat{U}}^*,\ \hat{F}_\Omega^{\Gamma *} \right\},$$

$$d_{\underset{\sim}{\hat{U}}}\psi(0;1) + d_{\hat{F}_\Omega^\Gamma}\psi(0;1) = \left\{ \underset{\sim}{\hat{U}},\ \hat{F}_\Omega^\Gamma \right\}. \tag{18}$$

Jak można wykazać [7] warunek regularności jest spełniony dla operatora φ_0 postaci (11).

Drugim jest założenie o słabym domknięciu pewnego zbioru Q_L, który jest zbiorem wszystkich w pewien sposób zdefiniowanych funkcjonałów W [7]. Dla danego zadania są one określone następująco

$$W[\underset{\sim}{\hat{U}},\ \hat{F}_\Omega^\Gamma,\ s] = V\left[L\left\{ \left\{ \underset{\sim}{\hat{U}}, \hat{F}_\Omega^\Gamma \right\}, s \right\}\right] \qquad V \geqslant 0, \tag{19}$$

gdzie:

V – funkcjonał liniowy nieujemny, określony w przestrzeni wartości operatora L, to jest $R \times \hat{\Gamma} \times \hat{\Gamma}_\Gamma$, gdzie R przestrzeń liczb rzeczywistych s,

L – operator działający z $R \times \hat{\Gamma} \times \hat{\Gamma}_\Gamma \longrightarrow R \times Z$, określający pewne przekształcenie liniowe i mający następującą postać

$$L\left\{ \left\{ \underset{\sim}{\hat{U}}, \hat{F}_\Omega^\Gamma \right\}, s \right\} = \left\{ s, s\varphi\left[\underset{\sim}{\hat{U}}^*,\ \hat{F}_\Omega^{\Gamma *}\right] + d_{\underset{\sim}{\hat{U}}}\varphi\left[(\underset{\sim}{\hat{U}}^*, \hat{F}_\Omega^{\Gamma *}); \underset{\sim}{\hat{U}}\right] + d_{\hat{F}_\Omega^\Gamma}\varphi\left[(\underset{\sim}{\hat{U}}^*, \hat{F}_\Omega^{\Gamma *}); \hat{F}_\Omega^\Gamma\right] \right\} \tag{20}$$

Jeżeli przestrzeń Z wartości operatora φ jest przestrzenią funkcji ciągłych C[0,1] lub ograniczonych mierzalnych lub całkowalnych w kwadracie – co można założyć dla danego zadania estymacji na podstawie interpretacji fizycznej zagadnienia – to sprawdzenie słabego domknięcia zbioru Q_L można zastąpić sprawdzeniem warunków, podanych w [7].

Sprawdzenie założenia o regularności operatora φ i słabym domknięciu zbioru Q_L pozwala stosować warunki konieczne przy wyznaczaniu rozwiązania optymalnego.

Warunki te podaje poniższe twierdzenie.

T w i e r d z e n i e 2

Niech:

a) w punkcie $\left\{\hat{U}^*,\ \hat{F}_\Omega^{\Gamma *}, \hat{F}_\Omega^{V*}\right\}$ zachodzi minimum warunkowe funkcjonału $\beta\left[\underset{\sim}{\hat{U}}, \hat{F}_\Omega^\Gamma,\ \hat{F}_\Omega^V\right]$ przy ograniczeniach $\varphi\left[\underset{\sim}{\hat{U}},\ \hat{F}_\Omega^\Gamma\right] \leqslant 0$,

b) punkt $\{\hat{U}^*, \hat{F}_{\Omega}^{\Gamma *}\}$ będzie punktem regularnym operatora φ,

c) zbiór Q_L będzie słabo domknięty, przy czym przekształcenie liniowe określone jest wzorem (20).

Wówczas istnieje taki funkcjonał Lagrange'a $\lambda_1^* \geq 0$, że spełnione są warunki (13) - (16).

Dowód tego twierdzenia jest podobny do dowodu podanego w [6].

5.4. Charakteryzując ogólnie metodę funkcjonałów Lagrange'a można powiedzieć, że zakres wykorzystania w praktyce powyżej wyprowadzonych warunków jest ograniczony zwłaszcza wymaganiem mocnej różniczkowalności β i φ. Ponadto w niektórych przypadkach sprawdzenie założeń o regularności problemu może nastręczać trudności. Jednakże obliczenie różniczek Frecheta jest stosunkowo łatwe, co stanowi niewątpliwą zaletę metody w porównaniu z innymi metodami uogólnionego rachunku wariacyjnego [8].

6. Technika przybliżonego numerycznego rozwiązania danego zadania optymalnej estymacji

6.1. Do efektywnego numerycznego rozwiązania danego zadania można dojść dwiema drogami. Albo rozwiązywać (na drodze analitycznej lub w sposób przybliżony) uzyskane z warunku koniecznego optymalnego rozwiązania zadania estymacji zależności (chociaż np. ze względu na stopień ogólności rozważanego zagadnienia wariacyjnego nie można na tym etapie podać ogólnej metody rozwiązania wyprowadzonych w poprzednim punkcie równań), albo posłużyć się jedną z metod przybliżonych optymalizacji dynamicznej.

Obecnie zostanie zaproponowana pewna technika przybliżonego rozwiązania danego zadania polegająca na:

a) dyskretyzacji zmiennej przestrzennej, tj. przez aproksymację problemu czasowo-przestrzennego problemem czasowym,

b) przekształcenie zadania z ograniczeniami nierównościowymi w zadanie z ograniczeniami równościowymi (poprzez wykorzystanie metody funkcji kary),

c) rozwiązanie tak przedstawionego zadania przy użyciu jednej z metod wielopoziomowych optymalizacji dynamicznej.

6.2. W celu uproszczenia zapisu w dalszym ciągu wprowadzono następujące oznaczenia:

$$\int_{t_o}^{T}\int_{\Omega} P(\hat{U},\hat{E}_{\Omega}^{r},\hat{E}_{\Omega}^{v})d\Omega dt \triangleq \int_{t_o}^{T}\int_{\Omega}\left[(\hat{E}_{\Omega}^{r})^{Tr}\hat{E}_{\Omega}^{r}+(\hat{E}_{\Omega}^{v})^{Tr}D(X)\hat{E}_{\Omega}^{v}\right]d\Omega dt + \\ +\int_{t_o}^{T}\left[Z(t) - \int_{\Omega} D(X)\left[S(t)\hat{U}(t,X) + \hat{E}_{\Omega}^{v}\right]d\bar{\Omega}\right]^{Tr}\left[(\cdot)\right] dt \tag{21}$$

oraz

$$G[\hat{U},\hat{E}_{\Omega}^{r}] \triangleq \mathcal{L}(X)\hat{U}(t,X) + \zeta(t,X) + \hat{E}_{\Omega}^{r}(t,X). \tag{22}$$

Wówczas zadanie (I) optymalnej estymacji rozważanej klasy procesów reaktorowych przedstawić można w równoważnej mu postaci:

(III) należy znaleźć takie funkcje $\hat{U}^*$, $\hat{E}_{\Omega}^{r*}$, $\hat{E}_{\Omega}^{v*}$, które minimalizują następujący funkcjonał

$$(1)' \qquad \beta[\hat{U},\hat{E}_{\Omega}^{r},\hat{E}_{\Omega}^{v}] = \int_{t_o}^{T}\int_{\bar{\Omega}} P(\hat{U},\hat{E}_{\Omega}^{r},\hat{E}_{\Omega}^{v})d\bar{\Omega}dt,$$

przy ograniczeniach równościowych:

$$(2)' \qquad \begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\hat{U} = G[\hat{U},\hat{E}_{\Omega}^{r}] && \text{dla } X\in\Omega, \\ &\hat{U} = 0 && \text{dla } X\in\partial\Omega, \\ &\hat{U}(t_o,X) = 0 && \text{dla } X\in\bar{\Omega}, \end{aligned}$$

i ograniczeniu nierównościowym

$$(3)' \qquad \hat{U} + U_p \geqslant 0.$$

6.3. Zdefiniowano następujący wektor, który wynika z dyskretyzacji zmiennej przestrzennej X_i w całym obszarze

$$X_i \triangleq [\, i_1(\Delta x_1),\ i_2(\Delta x_2),\ i_3(\Delta x_3)], \tag{23}$$

gdzie:

i_1, i_2, i_3 są liczbami całkowitymi, składowymi wektora

$$i = [\, i_1,\ i_2,\ i_3 \,]$$

określonymi jako

$$i_j = 0, 1, 2, \ldots N_j,$$

gdzie:

$$N_j = \frac{(x_j)_{max} - (x_j)_{min}}{(\Delta x_j)}, \quad \text{dla } j = 1,2,3, \tag{24}$$

$(x_j)_{max}$ - maksymalna wartość j-tej współrzędnej przestrzennej,

$(x_j)_{min}$ - minimalna wartość j-tej współrzędnej przestrzennej,

(Δx_j) - krok dyskretyzacji j-tej współrzędnej przestrzennej.

Ponieważ operator G, występujący po prawej stronie równania (2)' opisującego model dynamiki rozważanej klasy procesów reaktorowych, jest rzędu drugiego, można go aproksymować następującym wyrażeniem (porównaj [10]).

$$G[\hat{U}(X_i,t), \hat{F}^{\Gamma}_{\Omega}(X_i,t)] \cong G_i[\hat{U}_i(t), \hat{U}_{i\pm J_1}(t), \hat{U}_{i\pm J_2}(t), \hat{U}_{i\pm J_3}(t), \hat{F}^{\Gamma}_{\Omega i}(t)], \tag{25}$$

gdzie:

$I_k = \{\, i \mid i = 0$ za wyjątkiem k-tej składowej, równej $1\}$, przy czym "i" przebiega wszystkie wewnętrzne punkty dyskretyzacji,

G_i - pewne funkcje wektorowe klasy C^2,

$\hat{U}(t, X_i) \triangleq \hat{U}_i$,

$\hat{F}^{\Gamma}_{\Omega}(t, X_i) = \hat{F}^{\Gamma}_{\Omega i}$.

Dyskretyzując (1)', (2)' i (3)' otrzymuje się następujący układ równań opisujący aproksymujący problem czasowy:

$$(\mathrm{IV})\qquad \beta[\hat{U}_i,\ \hat{F}^{\Gamma}_{\Omega i},\ \hat{F}^{V}_{\Omega i}] = \sum_{i\in\Omega}\int_{t_0}^{T} P_i(\hat{U}_i,\ \hat{F}^{\Gamma}_{\Omega i},\ \hat{F}^{V}_{\Omega i})dt, \tag{26}$$

$$\frac{d}{dt}\hat{U}_i = G_i[\hat{U}_i, \hat{U}_{i\pm J_1},\ \hat{U}_{i\pm J_2}, \hat{U}_{i\pm J_3},\ \hat{F}^{\Gamma}_{\Omega i}] \quad \text{dla } X_i\in\Omega, t\geq t_0,$$

$$\hat{U}_i = 0 \qquad \text{dla } X_i\in\partial\Omega, \tag{27}$$

$$\hat{U}_i(t_0) = 0 \qquad \text{dla } X_i\in\bar{\Omega},$$

$$\hat{U}_i + (U_p)_i \geq 0 \qquad \text{dla } X_i\in\bar{\Omega}, \tag{28}$$

gdzie:

$\hat{F}^{V}_{\Omega}(t,X_i) \triangleq \hat{F}^{V}_{\Omega i}$, $U_p(t,X_i) \triangleq (U_p)_i$, $P \triangleq \sum_{i\in\bar{\Omega}} P_i$, oraz indeks "i" przebiega wszystkie wewnętrzne i zewnętrzne punkty dyskretyzacji.

6.4. Następnym etapem w proponowanym schemacie przybliżonego rozwiązania danego zadania jest przekształcenie go w zadanie bez ograniczeń nierównowościowych (28) przez zastosowanie metody funkcji kary [3], [9].

Zdefiniowano dla zadania (IV) następujące funkcje kary (przesunięte) dla i-tego ograniczenia nierównowościowego (28):

$$\Lambda_i[U_i+(U_p)_i,\varepsilon_i] = \begin{cases} \left[[\hat{U}_i+(U_p)_i][E\varepsilon_i]^{-1}\right]^{Tr}[(\cdot)] \ \text{dla } \hat{U}_i+(U_p)_i < -\varepsilon_i, \\ 0 \quad \text{dla } \hat{U}_i+(U_p)_i \geq -\varepsilon_i, \end{cases} \tag{29}$$

gdzie:

ε_i - wektor o składowych dodatnich,

E - macierz jednostkowa.

Dodając funkcję kary Λ_i do funkcji podcałkowej w (26) otrzymuje się z (IV) układ równań opisujący zadanie bez ograniczeń nierównowościowych, równoważne zadaniu pierwotnemu dla dostatecznie składowych wektora ε_i [9]

$$(V)\ \beta[\hat{U}_i, \hat{F}^r_{\Omega i}, \hat{F}^v_{\bar{\Omega} i}] = \sum_{i\in\bar{\Omega}} \int_{t_0}^{T} [P_i(\hat{U}_i, \hat{F}^r_{\Omega i}, \hat{F}^v_{\bar{\Omega} i}) + \Lambda_i] dt = \\ = \sum_{i\in\bar{\Omega}} \int_{t_0}^{T} \tilde{P}_i(\hat{U}_i, \hat{F}^r_{\Omega i}, \hat{F}^v_{\bar{\Omega} i}) dt, \tag{30}$$

gdzie

$$P_i + \Lambda_i \triangleq \tilde{P}_i,$$

przy ograniczeniach (27).

6.5. Ze względu na dużą liczbę punktów dyskretyzacji "i" zadanie (V) należy do typu zadań wielowymiarowych optymalizacji dynamicznej. Do jego rozwiązania wykorzystano schemat jednej z metod optymalizacji [10], którą można zaliczyć do grupy metod wielopoziomowych, stosowanych w przypadku interakcji w równaniach ograniczeń.

Niech wektor W zawiera wszystkie składowe $\hat{U}_{i_j}$ wektora $\hat{u}_i$, a wektor M zawiera wszystkie składowe $\hat{F}^r_{\Omega i_j}$ i $\hat{F}^v_{\bar{\Omega} i_j}$ wektorów $\hat{F}^r_{\Omega i}$ oraz $\hat{F}^v_{\bar{\Omega} i}$.

Dokonując następnie podziału wektorów W i M na N podwektorów o mniejszych wymiarach otrzymuje się:

$$W = [W_1, W_2, \dots W_j, \dots\dots W_n]^{Tr}, \\ M = [M_1, M_2, \dots M_j, \dots\dots M_n]^{Tr}, \tag{31}$$

gdzie:

W_j - jest n_j wymiarowym podwektorem wektora W,
M_j - jest p_j wymiarowym podwektorem wektora M,
j - 1,2 ... N.

Zadanie (V) można sformułować teraz następująco:

(VI) należy wyznaczyć:

$$\min_{W_j, M_j} \sum_{j=1}^{N} \int_{t_0}^{T} \tilde{P}_j(W_j, M_j) dt, \tag{32}$$

przy ograniczeniach

$$\frac{d}{dt} W_j = G_j [W_j, M_j, S_j], \quad j = 1,2 \dots N, \qquad W_j(t_o) = 0, \tag{33}$$

gdzie występujący w (33) wektor S, jest zdefiniowany jako:

$$S_j = [S_{1j}, S_{2j}, \dots S_{ij}, S_{mj}]^{Tr}.$$

Wektor ten został wprowadzony do (33) w celu eliminacji sprzężeń pomiędzy równaniami (27). Wtedy każdy j-ty układ równań (33) staje się niezależny od pozostałych.

Składowa S_{1j} wektora S_j wyraża sprzężenie pomiędzy wektorem W_j a $W_{k\neq j}$. Jest ona wprowadzana do równania (27) na miejsce $U_{i\pm j_k}$ (lub ich funkcji) o ile nie zawiera jej wektor W_j.

Ten związek wektora interakcji S_j z wektorami W_j można przedstawić za pomocą ogólnego równania interakcji, które będzie dodatkowym ograniczeniem dla zadania (VI)

$$S_j' = F_j (W_1, W_2, \dots W_k, \dots W_N) \quad k \neq j, \tag{34}$$

gdzie

F_j - m_j wymiarowa funkcja wektorowa.

Do wyprowadzenia warunków koniecznych optymalnego rozwiązania zadania (VI) zastosowano w [10] zasadę maksimum 3 .

Hamiltonian tego zadania ma postać:

$$H = \sum_{j=1}^{N} \left[\tilde{P}_j(W_j, M_j) + \lambda_j^{Tr} G_j[W_j, M_j, S_j] + \rho^{Tr}(F_j - S_j) \right], \tag{35}$$

gdzie:

λ_j - n_j - wymiarowe wektory zmiennych sprzężonych,
ρ_j - m_j - wymiarowe wektory mnożników Lagrange'a.

Warunki konieczne osiągnięcia minimum funkcjonału wyrażają się (przy założeniu ciągłości i różniczkowalności funkcji G_j, F_j, P_j) następująco:

$$\frac{d}{dt} W_j = \frac{\partial H}{\partial \lambda_j} = G_j[W_j, M_j, S_j], \tag{36}$$

$$\frac{d}{dt} \lambda_j = -\frac{\partial H}{\partial W_j} = -\frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial W_j} - \left(\frac{\partial G_j}{\partial W_j}\right)^{Tr} \lambda_j - \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} \left(\frac{\partial F_k}{\partial W_j}\right)^{Tr} \varrho_k, \tag{37}$$

$$\frac{\partial H}{\partial M_j} = \frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial W_j} + \left(\frac{\partial G_j}{\partial M_j}\right)^{Tr} \lambda_j = 0, \tag{38}$$

$$\frac{\partial H}{\partial S_j} = \left(\frac{\partial G_j}{\partial S_j}\right)^{Tr} \lambda_j - \varrho_j = 0, \tag{39}$$

$$\frac{\partial H}{\partial \varrho_j} = F_j - S_j = 0, \tag{40}$$

gdzie wektorowe pochodne cząstkowe są definiowane następująco:

$$\frac{\partial G_j}{\partial W_j} \triangleq \begin{bmatrix} \frac{g_{1j}}{w_{1j}}, & \frac{g_{1j}}{w_{2j}}, & \ldots\ldots & \frac{g_{1j}}{w_{nj}} \\ \frac{g_{2j}}{w_{1j}}, & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \frac{g_{2j}}{w_{nj}} \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \cdot & & & \cdot \\ \frac{g_{nj}}{w_{1j}}, & \ldots\ldots\ldots\ldots & & \frac{g_{nj}}{w_{nj}} \end{bmatrix}$$

oraz

$$\frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial W_j} = \left[\frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial w_{1j}}, \frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial w_{2j}}, \ldots \frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial w_{nj}}\right]^{Tr}$$

gdzie:

$G_j = [g_{1j}, g_{2j}, \dots g_{nj}],$

$W_j = [w_{1j}, w_{2j}, \dots w_{nj}]$ dla $j = 1,2, \dots N.$

Pochodne

$$\frac{\partial G_j}{\partial N_j}, \quad \frac{\partial G_j}{\partial S_j}, \quad \frac{\partial F_k}{\partial W_j} \quad \text{i} \quad \frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial M_j}$$

definiowane są podobnie.

Jak można zauważyć, przy pewnym wyborze funkcji F_j i przyjęciu ρ_k za ustalony parametr, cztery pierwsze równania warunków koniecznych (36)-(40) dla j-tego podproblemu będą niezależne od warunków dla pozostałych podproblemów. Dla przykładu można przyjąć następujący związek S_j z W_j

$$S_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} C_{jk} W_k, \tag{41}$$

gdzie:

C_{jk} - macierz $(m_j \times n_k)$ wymiarowa, której wyrazami są 0 lub 1.

Zależność (41) oznacza przyporządkowanie każdej składowej S_j jednego elementu wektora W_k.

Wówczas człon sprzężenia w wyrażeniu (35) określającym hamiltonian zadania, może być zapisany jako

$$\sum_{j=1}^{N} \rho_j^{Tr} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} C_{jk} W_k = \sum_{k=1}^{N} W_k^{Tr} \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq k}}^{N} C_{jk}^{Tr} \rho_j . \tag{42}$$

Obecnie hamiltonian (35) przedstawić można w postaci sumy (zamieniając w (42) indeks j na k, a k na j)

$$H = \sum_{j=1}^{N} H_j = \sum_{j=1}^{N} \Big[\tilde{P}_j(W_j, M_j) + \lambda_j^{Tr} G_j[W_j, M_j, S_j] + \tag{35}$$

$$+ W_j^{Tr} \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} C_{kj}^{Tr} \rho_k - \rho_j^{Tr} S_j \Big],$$

gdzie

H_j - hamiltoniany podproblemów.

Zatem równania (37) i (40) warunków koniecznych (36) - (40) optymalnego rozwiązania problemu całościowego przyjmą obecnie postać następującą:

$$(37)\quad \frac{d}{dt}\lambda_j = -\frac{\partial H'}{\partial W_j} = -\frac{\partial \tilde{P}_j}{\partial W_j} - \left(\frac{\partial G_j}{\partial W_j}\right)^{Tr} \lambda_j - \frac{\partial}{\partial W_j}\Big[W_j \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}} C_{kj}^{Tr} \varrho_k\Big]$$

$$(40)\quad \frac{\partial H}{\partial \varrho_j} = \sum_{\substack{k=1\\k\neq j}}^{N} C_{jk} W_k - S_j = 0.$$

Minimalizując niezależnie poszczególne hamiltoniany H_j, dla wszystkich j, a następnie koordynując otrzymane rozwiązania przez wybór wektora ϱ_k, uzyskuje się,w wyniku powtarzania takich cykli iteracyjnych, optymalne rozwiązanie ogólnego zadania (VI) z żądaną dokładnością pod warunkiem, że będzie to procedura zbieżna.

W tym celu zastosowano w [10] metodę, nazwaną metodą GSC ('Gauss-Seidel Controller).

W metodzie GSC wyróżnia się dwa etapy, które identyfikować można z pierwszym i drugim poziomem rozwiązania zadania (VI):

a. Pierwszy poziom to rozwiązanie równań (36),(37), (38), dla każdego j, przy założonych wstępnie ϱ_k i S_j. Podstawową trudnością tu występującą jest rozwiązanie tzw. problemu dwugranicznego, związanego z dwugranicznym charakterem warunków dla W_j (t_0) oraz końcowych wartości zmiennych sprzężonych λ_j (T), wynikających z warunków transwersalności [3]. Istnieje szereg metod rozwiązywania problemów dwugranicznych, [3], [11]. Prawidłowy wybór jednej z nich będzie zależny w dużym stopniu od szczegółowej postaci zadania. Dlatego też na obecnym etapie prezentacji proponowanego schematu obliczeń numerycznych nie będzie ta kwestia rozstrzygana. W wyniku minimalizacji H_j dla każdego z j podproblemów wyznacza się λ_k i W_k.

b. Drugi poziom to wyznaczenie nowych ϱ_k i S_j. Ich wyliczenie zależy od uzyskanych uprzednio rozwiązań częściowych, co wynika z (39) i (40). Równania te spełniają rolę równań koordynujących rozwiązania pierwszego poziomu. Wektor zmiennych koordynujących ρ_k dla kolejnego cyklu iteracyjnego wylicza się z zależności [10]:

$$\rho_k = \left(\frac{\partial G_k}{\partial S_k}\right)^{Tr} \lambda_k, \qquad (43)$$

gdzie

$$S_j = \sum_{\substack{k=1 \\ k \neq j}}^{N} C_{jk} W_k \qquad \text{dla } j,k = 1,2 \ldots N.$$

6.6. Ważnym zadaniem, pozostającym zawsze do rozstrzygnięcia przy stosowaniu przybliżonych metod obliczeniowych, jest problem zgodności przyjętej metody aproksymacji z ścisłym rozwiązaniem analitycznym. W przypadku proponowanej techniki liczenia odnosi się to do zbadania:

(A) jak wpływa liczba punktów dyskretyzacji zmiennej przestrzennej na korelację rozwiązania zadania aproksymującego (VI) z rozwiązaniem zadania podstawowego estymacji (III),

(B) jak wpływa funkcja kary określona zależnością (29) na uzyskiwane rozwiązanie zadania aproksymującego (IV),

(C) jak zależy rozwiązanie zadania (V) od ilości przyjętych w metodzie GSC pierwszych poziomów i zastosowanej metody koordynacji rozwiązań częściowych oraz jaka jest zbieżność iteracji tej metody.

Przeprowadzenie szczegółowej analizy tych zagadnień jest bardzo trudne na rozważanym poziomie ogólności danego zadania estymacji interesującej klasy zjawisk reaktorowych. Obecnie można tylko podać ogólne wskazania i wnioski pomocne przy jej przeprowadzeniu.

ad - (A). Do chwili obecnej nie ma w literaturze wyników obliczeń (wykonywanych na szeroką skalę), aby móc przeprowadzić taką analizę porównawczą. Ogólnie wiadomo, że im większa liczba punktów dyskretyzacji, tym lepsza powinna być korelacja z ścisłym rozwiązaniem analitycznym. Pewne wyniki aproksymacji, przez dyskretyzację zmiennej przestrzennej, kilku prostych zadań z interesującej klasy zadań optymalizacji dynamicznej są podane i omówione w [12]. Należy zaznaczyć, że do wykonania tego rodzaju analizy wymagana jest znajomość ścisłego rozwiązania estymacji, co nie zawsze jest możliwe do osiągnięcia. Reasumując, jedynym sprawdzianem praktycznym (ilościowym) wpływu liczby punktów dyskretyzacji na korelację rozwiązań przybliżonego i ścisłego danego zadania pozostaje eksperyment numeryczny.

Trzeba tu jednak zaznaczyć, że w danym przypadku na ostateczny wynik liczenia wpływają także kwestie poruszone w (B) i (C).

Niekiedy wnioski z takiego eksperymentu udaje się uogólnić na pewne grupy zadań z rozważanej klasy zadań estymacji.

ad - (B). Jak już zaznaczono w p. 5.4, a wykazano w [9], rozwiązanie optymalne zadania zastępczego (V) jest zbieżne do rozwiązania optymalnego zadania aproksymującego (IV) z ograniczeniami nierównościowymi, przy czym zbieżność ta rozumiana jest w sensie zbieżności wartości funkcjonałów (16) i (30).

Zachodzi to, gdy wektor $\varepsilon_j \to 0$. Dobierając zatem odpowiednio małe składowe wektora ε_j zapewni się odpowiednią zgodność zadań (IV) i (V). Z tego wynika, że w sposób pośredni postać funkcji kary wpływa również na wynik ostateczny aproksymacji zadania (III) zadaniem (IV).

ad - (C). Jak dla każdego procesu iteracyjnego tak i dla metody GSC zasadnicze jest pytanie o zbieżności cykli iteracyjnych. W [10] stwierdzono, że metoda GSC wykazuje dobrą zbieżność dla szerokiej klasy zadań, włączając w nie również nieliniowe. Jest ona dwukrotnie szybciej zbieżna od metody Jacobiego oraz konkuruje pod względem szybkości realizacji z metodą relaksacyjną. Zwykle jako kryterium dokładności uzyskiwanego rozwiązania optymalnego zadania ogólnego (VI), przyjmuje się pewne, odpowiednio zdefiniowane, normy $\|e_j\|_i$, gdzie i-numer iteracji, j-numer zadania częściowego.

7. Podsumowanie

W niniejszym artykule przedstawiono metodę estymacji optymalnej pewnej klasy przestrzenno-czasowych procesów fizycznych, na przykładzie modelu zjawisk zachodzących w reaktorze jądrowym. Po analizie możliwości estymacji optymalnej rozważanej klasy zjawisk reaktorowych, przedstawiono pierwotne zadanie estymacji optymalnej jako zadanie optymalizacji dynamicznej. Podano warunki wystarczające i konieczne optymalnego rozwiązania danego zadania, wykorzystując pojęcie funkcjonałów Lagrange'a. Zaproponowano technikę przybliżonego numerycznego rozwiązania danego zadania optymalnej estymacji polegającą na dyskretyzacji zmiennej przestrzennej, następnie przekształceniu otrzymanego zadania w zadanie z ograniczeniami tylko równościowymi i z kolei rozwiązanie tak przedstawionego zadania przy użyciu jednej z metod wielopoziomowych, tzw. metody GSC. Omówiono także pokrótce pewne zagadnienia związane z analizą zgodności przybliżonego rozwiązania (wg przyjętej metody aproksymacji) z ścisłym rozwiązaniem danego zadania estymacji optymalnej.

BIBLIOGRAFIA

[1] M a s ł o w s k i A.: "O optymalnej estymacji niektórych przestrzenno-czasowych procesów zachodzących w reaktorze jądrowym". Biuletyn Informacyjny ITC PW nr 32/2. Warszawa 1971.

[2] M a s ł o w s k i A.: "O optymalnej estymacji pewnej klasy przestrzenno-czasowych procesów fizycznych". Biuletyn Informacyjny ITC PW nr 32/1. Warszawa 1971.

[3] P i e r r e D. A.: Optimazation theory with applications. John Wiley. 1969.

[4] W a n g P. K. C.: Control of Distributed Parameter Systems, Advances in Control Systems, vol. 1, Academie Press, 1964.

[5] P r a c a z b i o r o w a : Integralnyje urawnienija. Izdatielstwo Nauka, 1968.

[6] K u l i k o w s k i R.: Sterowanie w wielkich systemach, WNT, Warszawa 1970.

[7] M a j e r c z y k - G ó m u ł k a J., M a k o w s k i K.: "Wyznaczenie optymalnego sterowania procesami dynamicznymi metodą funkcjonałów Lagrange'a". Arch. Aut. i Telem., tom XIII, zeszyt 2 i 3. 1968.

[8] M a k o w s k i K.: "Współczesne metody uogólnionego rachunku wariacyjnego i warunki regularności". Prace IAPAN, zeszyt 72, Warszawa, 1968.

[9] W i e r z b i c k i A.: "Zasada maksimum a synteza regulatorów optymalnych", cz. II, Arch. Aut. i Telem. tom XIII,zeszyt 3, 1968.

[10] W i s m e r D. A.: "An Efficient Computational Procedure for the Optimazation of a Class of Distributed Parameter Systems". Trans. of the ASME, Journal of Basic Eng., June 1969.

[11] B e l l m a n R. E., K a l a b a R. E., W i n g G.: "Invariant Imbedding and the Reduction of Two-Point Boundary Value Problems to Initial - Value Problems". Proc. Nat. Acad. of Sci. U.S.A. Vol. 46, 1960, pp 1646-1649.

[12] B u t k o w s k i A. G.: Tieorija optimalnowo uprawlienija sistiemami s rozpriedielonnymi parametrami. Izd. Nauka, Moskwa, 1965.

МЕТОД ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКИ НЕКОТОРЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ УКАЗАН НА ПРИМЕРЕ МОДЕЛИ ПРОЦЕССОВ ВОЗНИКАЮЩИХ В ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРАХ

К р а т к о е с о д е р ж а н и е

В статии представлено метод оптимальной оценки некоторых пространственно - временных процессов на примере модели процессов возникающих в ядерных реакторах.

После краткого анализа возможности оптимальной оценки рассуждаемых реакторных процессов, представлено первоначальную задачу оптимальной оценки, как задачу динамической оптимализации. Сформулировано достаточные и необходимые условия для оптимального решения этой задачи,используя метод функционалов Лагранге'а.

Предложено приближенный метод решения, который состоится из следующих етапов: дискретизации переменной пространственной, затем преобразования полученной задачи в задачу только с равенственными ограничениями и последовательно решения так представленной проблемы методом децентрализации ГСЦ.

Наконец обсуждено некоторые вопросы анализа соответствия приближенного и верного метода решения данной задачи оптимальной оценки.

OPTIMAL ESTIMATION METHOD FOR CERTAIN PHYSICAL PROCESSES - ON THE EXAMPLE OF PHENOMENA OCCURRING IN A NUCLEAR REACTOR

S u m m a r y

The method of an optimal estimation of a certain class of space-time physical processes, on the example of a model of phenomena occurring in a nuclear reactor, has been presented in this paper. The analysis of possibilities of an optimal estimation of the reactor phenomena class under consideration has been followed by the presentation of the primary task of an optimal estimation as that of a dynamic optimization. Sufficient and necessary conditions have been quoted for the solution of the task given, under the employment of Lagrange functionals theory. The technique has been proposed, of an approximate numeric solution of the optimal estimation problem given that involves first the space variable having been discretized, then the transformation of the problem given into that involving equality limitations only, and ultimately the solution of the problem thus presented with the use of one of multilevel methods, the so called GSC method. Certain problems involved in the analysis of approximate compatibility of the solution according to the approximation method adopted with an exact solution of the optimal estimation problem given have also been discussed in brief.

Rękopis dostarczono w lipcu 1972 r.