

doc. dr inż. Jerzy Malczewski

Instytut Techniki Ciepłej
Politechniki Warszawskiej

HYDRODYNAMIKA KRYSZTAŁU W KRYSZTAŁIZATORZE POZIOMYM Z MIESZADŁEM I JEJ WPŁYW NA PRZYROST MASY KRYSZTALICZNEJ

Opisano równaniami różniczkowymi ruch kryształu o zmiennej masie w polu wirującego roztworu w krystalizatorze poziomym. Znalaziono metodą numeryczną na maszynie cyfrowej, dla kilku przykładów średnią prędkość względną kryształu i roztworu, tor kryształu i przyrost jego masy. Wykazano, że w zakresie stosowanych parametrów, prędkości kryształu względem roztworu są równe prędkości opadania kryształu w roztworze.

WYKAZ OZNACZEŃ

a	- wymiar osiowy kryształu,	m
a	- funkcja sferyczności,	
A	- powierzchnia kryształu,	m^2
A_z	- zastępcza powierzchnia kuli o równoważnej masie,	m^2
A	- współczynnik,	$N \cdot s / m^2$
b	- wymiar osiowy kryształu,	m
c	- wymiar osiowy kryształu,	m
d_z	- zastępcza średnica kuli o równoważnej masie,	m
g	- przyspieszenie ziemskie,	m/s^2
g^*	- przyspieszenie ziemskie zmniejszone o wypór,	m/s^2
k	- współczynnik proporcjonalności,	$N \cdot s / m \cdot kg$
K	- ogólny czynnik kształtu,	m^6 / kg^2

K_S	- współczynnik,	
m	- masa kryształu,	kg
r	- współrzędna promieniowa,	m
R	- promień krystalizatora,	m
R	- opór ośrodka,	N
Re	- liczba Reynoldsa,	
S	- współczynnik przesylenia (wg def. Classena),	
t	- czas,	s
u	- wypadkowa prędkość kryształu względem roztworu,	m/s
u_{op}	- prędkość opadania,	m/s
w_φ	- obwodowa prędkość bezwzględna kryształu,	m/s
w_R	- promieniowa prędkość bezwzględna kryształu,	m/s
γ	- ciężar właściwy kryształu,	N/m ³
γ_R	- ciężar właściwy roztworu,	N/m ³
θ	- temperatura,	°K
λ	- współczynnik oporu,	
μ	- dynamiczna lepkość roztworu,	N·s/m ²
ν	- kinematyczna lepkość roztworu,	m ² /s
ρ_R	- gęstość roztworu,	kg/m ³
ρ	- gęstość kryształu,	kg/m ³
φ	- kąt,	rad
ψ	- sferyczność,	
ω	- prędkość kątowna roztworu,	rad/s

Oprócz temperatury i przesylenia, na szybkość przyrostu masy kryształu w roztworze może w sposób istotny wpływać prędkość względna ruchów kryształu i roztworu. Szczególnie w przypadku cieczy lepkiej, prędkość kryształu względem roztworu znajduje się w zakresie znacznych oddziaływań na szybkość wymiany masy. Przykładem lepkiego roztworu o dużym znaczeniu w technice jest wodny roztwór sacharozy. Np. kryształy o masie do 40 mg opadają w roztworze przesyconym o współczynniku przesylenia 1,12 (wg def. Classena) i temperaturze 70°C z prędkościami 0 - 10 mm/s. Przyrost masy kryształu w tych granicach prędkości może ulec zwiększeniu o 40%.

Do krystalizacji roztworów lepkich, między innymi cukru, są stosowane cylindryczne aparaty poziome z mieszadłem, wprowadzającym roztwór i kryształki w ruch obrotowy. Mieszadła wykonują małe liczby obrotów od 0,5 do 1 w ciągu minuty. Powstaje pytanie, jak prędkość ruchu obrotowego roztworu, wywołanego mieszadłem, wpływa na średnią prędkość względem niego kryształów, które transportuje i jak się ona różni od prędkości opadania kryształu w roztworze nieruchomym? Za optymalne, z punktu widzenia intensyfikacji przyrostu masy krystalicznej, można uważać te obroty roztworu (identyfikuje się je z obrotami mieszadła), przy których średnia prędkość względna kryształów jest największa.

Problem ten rozwiązano teoretycznie i na przykładach liczbowych dla pewnego uproszczonego i określonego geometrycznie modelu krystalizatora poziomego z mieszadłem, z użyciem jako medium roztworu sacharozy. W matematycznym opisie procesu operuje się następującymi zmiennymi parametrami: t , u , m , A , R , \mathcal{A} , d_z , r , φ , k , ω . Podstawowymi prawami opisującymi zjawisko są równania ruchu i przyrostu masy krystalicznej.

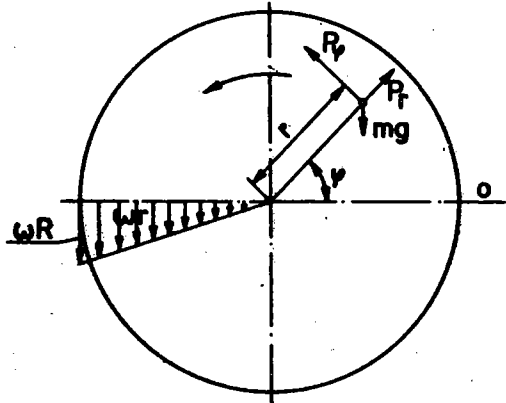
Celem określenia chwilowej prędkości kryształu względem roztworu $-u$, wyprowadzone zostaną równania ruchu kryształu o zmiennej masie, w polu wirującego roztworu. Przyjmuje się następujące założenia upraszczające:

1) ruch kryształu i roztworu jest płaski,

2) w polu prędkości Rys.1. Siły działające na kryształ ciecży występują jedynie prędkości obwodowe - ωR (rys.1),

3) kryształ jest punktem materialnym.

Gdy uwzględni się zmienność masy kryształu, należy zastosować równanie Newtona w postaci



$$\bar{P} = \frac{d}{dt} (m \bar{w}), \quad (1)$$

w którym: \bar{P} jest siłą wypadkową,

\bar{w} - prędkością bezwzględną kryształu.

Po zróżniczkowaniu i podzieleniu jego obu stron przez m , otrzymuje się równanie wektorowe

$$\frac{dm}{dt} \bar{w} + \frac{d\bar{w}}{dt} = \frac{\bar{P}}{m} \quad (2)$$

lub dwa równania skalarne:

$$\frac{dm}{dt} \frac{\dot{r}}{m} + \dot{w}_r = \sum \frac{P_r}{m}, \quad (3)$$

$$\frac{dm}{dt} \frac{\dot{\varphi} r}{m} + \dot{w}_\varphi = \sum \frac{P_\varphi}{m}.$$

W wyniku rzutowania przyspieszeń działających na punkt, na przyjęte osie współrzędnych otrzymuje się zależności:

$$\sum \frac{P_r}{m} = -k \dot{r} - g^* \sin \varphi, \quad (4)$$

$$\sum \frac{P_\varphi}{m} = k r (\omega - \dot{\varphi}) - g^* \cos \varphi,$$

gdzie g^* oznacza przyspieszenie ziemskie, zmniejszone przez wypór

$$g^* = g \left(1 - \frac{v_r}{\varphi} \right). \quad (5)$$

Po podstawieniu zależności (4) do równań (3) otrzymuje się:

$$\dot{w}_r = -k \dot{r} - g^* \sin \varphi - \frac{dm}{dt} \frac{\dot{r}}{m}, \quad (6)$$

$$\dot{w}_\varphi = k \dot{r} (\omega - \dot{\varphi}) - g^* \cos \varphi - \frac{dm}{dt} \frac{\dot{\varphi} r}{m}.$$

Składowe przyspieszenia punktu w biegunowym układzie współrzędnych są określane równaniami:

$$\dot{w}_r = \ddot{r} - r(\dot{\varphi})^2, \quad (7)$$

$$\dot{w}_\varphi = \frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left(r^2 \frac{d\varphi}{dt} \right) = r \ddot{\varphi} + 2\dot{\varphi} \dot{r}.$$

Równania (6) i (7) są słuszne we wszystkich ćwiartkach. Eliminując z nich \dot{w}_r i \dot{w}_φ , dochodzi się do ostatecznej postaci równań ruchu kryształu:

$$\ddot{r} + \dot{r} \left(k + \frac{dm}{dt} \frac{1}{m} \right) - r(\dot{\varphi})^2 + g^* \sin \varphi = 0, \quad (8)$$

$$2\dot{\varphi} \dot{r} + r(\ddot{\varphi} + k \dot{\varphi} - k \omega + \frac{dm}{dt} \frac{\dot{\varphi} r}{m}) + g^* \cos \varphi = 0.$$

Poszukiwaną prędkość kryształu względem roztworu oblicza się z zależności

$$u = \sqrt{(\omega - \dot{\varphi})^2 r^2 + (\dot{r})^2}. \quad (9)$$

Kolejnym zmiennym parametrem jest masa kryształu m . W tym przypadku wykorzystano wyniki własnych badań nad wzrostem kryształu w roztworze sacharozy. Przyjęto temperaturę 70°C i współczynnik przesycenia roztworu 1,12, jako najczęściej stosowane w procesie krystalizacji przemysłowej. Szybkość przyrostu masy kryształu przedstawiono w postaci wzoru

$$\frac{dm}{dt} = A \cdot 3,3 \cdot 10^{-4} \cdot u^{0,243} \left[\frac{\text{kg}}{\text{s}} \right], \quad (10)$$

gdzie $A = 4,22 \cdot 10^{-2} \sqrt[3]{m^2} \left[m^2 \right]. \quad (11)$

oznacza związek między powierzchnią a masą dla kryształów sacharozy.

Następną zmienną jest współczynnik oporu. Ruch kryształu w roztworze w rozpatrywanych warunkach technicznych, odbywa się w zakresie prawa Stokesa ($Re < 1$). Na współczynnik opo-

ru, bardzo zmienny w tym obszarze, ma także wpływ kształt kryształu. Kryształ sacharozy jest bryłą izometryczną. Jego kształt dobrze opisuje ogólny czynnik kształtu

$$K = 10^6 \frac{A^3}{m^2} \left[\frac{m^6}{kg^2} \right] \quad (12)$$

związany z dwoma stosunkami wymiarów osiowych b/a i c/a .

Ogólny czynnik kształtu K daje się wyrazić w prosty sposób przez sferyczność ψ będącą pojęciem podobnym. Jest ona stosowana we wzorach na opadanie ciał stałych. Wychodząc z definicji współczynnika ψ , dochodzi się do zależności

$$\psi = \frac{A_z}{A} = \frac{\pi d_z^2 \cdot 10^2}{K^{\frac{1}{3}} \cdot m^{\frac{2}{3}}} = \frac{\pi d_z^2 \cdot 10^2}{K^{\frac{1}{3}} \left(\frac{\pi \cdot d_z^3}{\rho \cdot 6} \right)^{\frac{2}{3}}} = \frac{4,84 \cdot 10^2}{\sqrt[3]{K \cdot \rho^2}} \quad (13)$$

Otrzymano w ten sposób prosty związek między ψ i K .

Dla kryształów sacharozy (refinady) o przeciętnym kształcie

$b/a = 1,8 - 2,2$ ($\rho = 1584 \text{ kg/m}^3$),

dla $c/a = 1,2$ $K = 75 \cdot 10^6$, $\psi = 0,845$,

dla $c/a = 1,4$ $K = 90 \cdot 10^6$, $\psi = 0,793$.

Współczynnik oporu λ można określić na drodze obliczeń dla dwóch zakresów:

1) gdy $Re < 0,05$, współczynnik oporu jest równy $\lambda = \frac{a}{Re}$, gdzie funkcja sferyczności

$$a = \frac{24}{0,843 \log \left(\frac{\psi}{0,065} \right)} \quad (14)$$

dla $\psi = 0,845$ wynosi 25,6,

2) gdy $0,05 \leq Re \leq 1$. W tym zakresie brak jest prostego wzoru, określającego współczynnik oporu λ . Dlatego też interpoluje się wyniki między dwoma skrajnymi wartościami $Re = 0,05$ i $Re = 1$, określonymi dokładnie [1]. Obliczenia przeprowadzono dla wybranego przesyconego roztworu sacharozy ($S = 1,12$, $\theta = 70^\circ\text{C}$, $\mu = 137 \text{ cP} = 0,137 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$, $\nu = 10^{-4} \frac{\text{m}^2}{\text{s}}$, $\rho_r = 1370 \text{ kg/m}^3$).

Obliczono, że gdy kryształ ma masę 5,2 mg i średnicę zastępczą 1,84 mm, liczba Reynoldsa jest równa 0,05 i jego prędkość opadania wynosi:

$$u_{\text{op}} = \frac{K_s d_z^2 (\gamma - \gamma_r)}{18\mu} = 27 \cdot 10^{-4} \quad \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right), \quad (15)$$

gdzie

$$K_s = 0,843 \log \frac{\psi}{0,065} = 0,94. \quad (16)$$

Opór ośrodka wynosi w tym przypadku

$$R = \frac{a}{\text{Re}} \frac{\pi d_z^2}{4} \frac{u^2 \gamma}{2g} = 3,2 \pi \mu d_z u. \quad (17)$$

Znaleziono również, że w tym samym roztworze i dla kryształu podobnego pokroju ($\psi = 0,845$), lecz o masie 105 mg i średnicy zastępczej 5,03 mm, liczba Reynoldsa wynosi 1, a prędkość opadania i opór ośrodka można obliczyć ze wzorów:

$$u_{\text{op}} = \sqrt{\frac{4d_z (\gamma - \gamma_r) g}{3 \lambda \gamma_r}} = 1,96 \cdot 10^{-2}, \quad \left(\frac{\text{m}}{\text{s}}\right), \quad (18)$$

$$R = \frac{27}{\text{Re}} \frac{\pi d_z^2}{4} \frac{u^2}{2g} \gamma_r = 3,37 \pi \mu d_z u. \quad (19)$$

Podstawiając do wzorów (17) i (19) lepkość roztworu równą $0,137 \frac{\text{N} \cdot \text{s}}{\text{m}^2}$, otrzymuje się wzory na opór ośrodka dla dwóch wymiarów kryształów:

dla masy 5,2 mg, $\psi = 0,845$, $\text{Re} = 0,05$,

$$R = 1,38 d_z u \quad (\text{N}),$$

dla masy 105 mg, $\psi = 0,845$, $\text{Re} = 1$ (20)

$$R = 1,45 d_z u \quad (\text{N}).$$

W technice najczęściej występują kryształy o masach od 5 do 40 mg.

Chcąc ująć zależności (20) jedną funkcją, opór ośrodka przedstawia się w postaci

$$R = \mathcal{A} d_z u, \quad (21)$$

interpolując w sposób liniowy wartości współczynnika \mathcal{A} między punktami ustalonymi dla $Re = 0,05$ i 1 (dla $\psi = 0,845$, $\nu = 0,137 \frac{N \cdot s}{m^2}$).

Ostatecznie $\mathcal{A} \left[\frac{N \cdot s}{m^2} \right]$ wyraża się funkcją

$$\mathcal{A} = 0,074 u d_z + 1,38, \quad (22)$$

przy czym \mathcal{A} jest związane ze współczynnikiem proporcjonalności z równań ruchu k prostą zależnością

$$k = \frac{\mathcal{A} d_z}{m}. \quad (23)$$

Odpowiednie współczynniki \mathcal{A} otrzymuje się dla $\psi = 0,793$ i innych wartości.

Średnicę zastępczą kryształu określa zależność

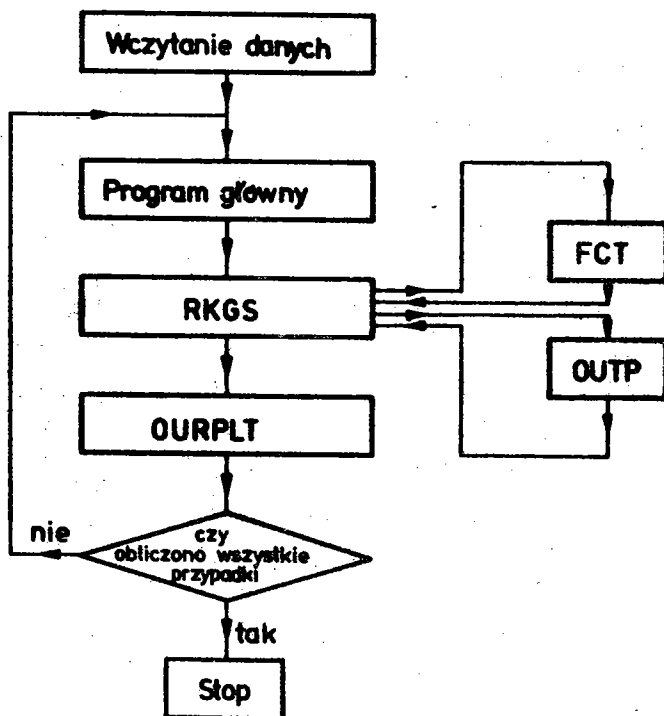
$$\frac{d_z^3 \pi}{6} \rho = m. \quad (24)$$

Otrzymano dziewięć równań (8+11), (21+24) opisujących ruch i przyrost masy kryształu w roztworze sacharozy, typowym dla procesu technologicznego ($\theta = 70^\circ C$, $S = 1,12$). Dziesięć zmiennych parametrów jest przy ruchu roztworu ze stałą prędkością kątową ($\omega = \text{const}$). Równania te nie dają się rozwiązać w postaci funkcji elementarnych. Wobec tego rozwiązano metodą numeryczną szereg przykładów liczbowych na maszynie cyfrowej. Na tej drodze znaleziono odpowiedź na pytanie, jak prędkość wirowania roztworu wpływa na średnią prędkość kryształu względem roztworu. Za pomocą tego programu znaleziono również tor kryształu i przyrost masy kryształu podczas jego krążenia w roztworze.

Dla przeprowadzenia obliczeń numerycznych układ równań został przekształcony na równoważny mu układ równań pierwszego rzędu. Uzyskuje się to, wprowadzając dodatkowe zmienne $z = \dot{r}$ i $x = \dot{\phi}$. Zastosowano metodę Runge-Kutta z modyfikacją Gillsa. Program obliczeniowy został napisany w języku Fortran IV G na maszynie cyfrową IBM 360, model 50. Do rozwiązania równania różniczkowego wykorzystano standardową procedurę RKGS, znajdującą się w pakiecie programów matematycznych systemu 360 Scientific Subroutine Package, Program Number 360 A-CM-03 X. Program składa się z czterech głównych segmentów: program główny, procedura RKGS, procedura FCT i procedura OUTF. Dodatkowo dołącza się do programu procedurę OURPLT, służącą do graficznego przedstawienia wyników. Schemat blokowy pokazano na rys.2.

Zadania poszczególnych segmentów są następujące:

1. Program główny - przygotowanie danych wejściowych dla podprogramu RKGS i wywołanie procedury RKGS.



Rys.2. Schemat blokowy

- 12 J. MARCZEWSKI
2. Procedura RKGS - obliczanie kolejnych punktów rozwiązania. Procedura korzysta z dwóch procedur FCT i OUTP.
 3. Procedura FCT - obliczanie wartości pochodnych.
 4. Procedura OUTP - wyprowadzenie wyników rozwiązania. Jest ona wywoływana po zakończeniu obliczeń związanych z kolejnym krokiem.

5. Procedura OURPLT - graficzne przedstawienie toru kryształu w krystalizatorze w rozpatrywanym przedziale czasu.

Do programu wprowadza się własności fizyczne kryształu i roztworu, obroty mieszadła, warunki początkowe, masę początkową, współrzędne położenia, prędkości, przedział całkowania, wielkość kroku. Z programu wyprowadza się numer kroku, czas, położenie kryształu, prędkość kryształu względem roztworu, a po przejściu założonego okresu czasu - średnią prędkość względną w tym przedziale.

Rozwiązano na maszynie cyfrowej dwanaście przykładów liczbowych dla trzech początkowych mas kryształów 5,2; 15; 25 mg oraz dla każdej z nich przyjmując obroty tarcz 1,41; 2,06; 2,72 i 3,4 obr/min. Obejmuje to zakres warunków przemysłowych, stosowanych w krystalizatorach cukrowniczych. Obliczenie przez maszynę wszystkich parametrów podczas jednego obrotu kryształu wokół aparatu trwało około 3 minut.

Wyniki obliczeń podane w tabelicy I nie ujawniły praktycznie różnic pomiędzy prędkością opadania kryształu w roztworze

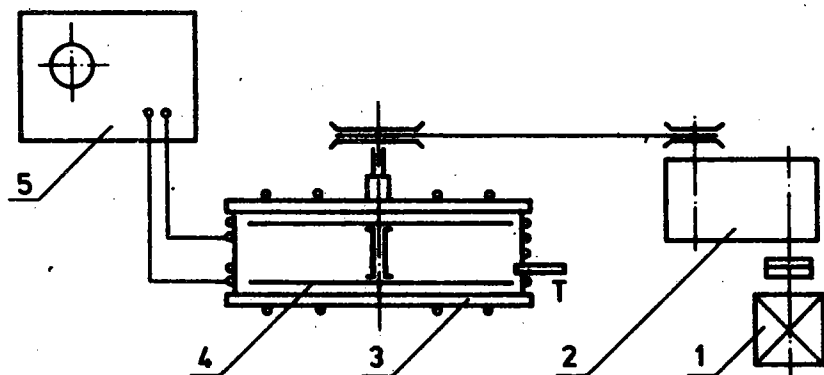
Tabela 1

Średnie wypadkowe prędkości względne kryształu
w obrotowym polu prędkości roztworu sacharozy
($S = 1,12$, $\theta = 70^{\circ}\text{C}$)

Masa kryształu [mg]	Prędkość unoszenia [mm/s]	Średnie wypadkowe prędkości względne kryształu mm/s			
		przy prędkości wirowania roztworu			
		1,41 [obr/min]	2,06 [obr/min]	2,72 [obr/min]	3,40 [obr/min]
5,2	2,69	2,70	2,70	2,70	2,69
15,0	5,45	5,48	5,48	5,47	5,46
25,0	7,66	7,71	7,70	7,70	7,68

a uśrednioną prędkością względną w rozważanym przedziale czasu. Największa zarejestrowana różnica dla kryształów najcięższych o masie 25 mg, w zakresie stosowanych obrotów, nie przekroczyła 0,5% prędkości opadania. Wynika stąd wniosek, że dla rozpatrywanych ruchów kryształu i roztworu, mieszczących się w obszarze laminarnym, obroty mieszadła nie wpływają na przyspieszenie wzrostu kryształów. Podobne spostrzeżenie, oparte na obserwacji z praktyki, znajduje się w monografii E.Hugot [2], który pisze, że zmiany obrotów mieszadła w zakresach stosowanych dla krystalizatorów poziomych, nie przynoszą istotnych efektów przyspieszenia wzrostu.

Wykonano również stanowisko badawcze z modelem krystalizatora (rys.3), w celu zaobserwowania ruchów kryształu w



Rys.3. Schemat stanowiska krystalizatora: 1 - silnik elektryczny, 2 - reduktor obrotów, 3 - krystalizator, 4 - mieszadło, 5 - ultratermostat

określonym polu prędkości roztworu i wyznaczania jego przyrostów masy w czasie. Krystalizator na stanowisku jest krótkim cylindrem długości 62,5 mm i średnicy wewnętrznej 345 mm. Pokrywy cylindra oraz tarcze mieszadła są wykonane ze szkła organicznego o grubości 20 mm, umożliwiające wizualizację ruchów kryształu w roztworze. Dla utrzymania stałej temperatury roztworu, pobocznica cylindra i pokrywy są termostatowane gorącą wodą, przepompowywaną z ultratermostatu. Między silnikiem elektrycznym a krystalizatorem znajduje się reduktor obrotów o przełożeniu 275:1. Obroty tarcz zmienia się przez

wymianę kół pasowych. Krystalizator wypełnia się gorącym, przesyconym roztworem w ilości 8-litrów.

W opisanym aparacie uzyskano między dwoma równoległymi, obracającymi się gładkimi tarczami, proste pole prędkości wirującego roztworu. Jego prędkość obwodowa wynosi ωr , przy braku składowej promieniowej i osiowej, normalnie występujących w krystalizatorze. Uzyskano to przez zbliżenie tarcz do odległości mniejszej od grubości warstwy przyściennej. Odległość 14 mm okazała się dla syropu o temp. 70°C i współczynnika przesylenia 1,12 wystarczająco małą, aby cała jego masa krążyła wraz z tarczami, nie wykazując innych składników prędkości oprócz obwodowych. Potwierdziły to pomiary termoanemometrem i wizualizacja prądów cieczy barwnikiem (oranżem metylu).

W krystalizatorach przemysłowych stosowanych w cukrowniach, mieszadła obracają się z prędkością obwodową w zakresie $2,6 + \div 5,2$ cm/s. Z podobnymi prędkościami obwodowymi $2,5 \div 4,9$ cm/s obracają się tarcze średnicy 343 mm na opisanym stanowisku, wykonując jeden obrót od 22 do 42,6 sekundy. Ruch roztworu wywołany obrotem tarcz w obudowie, mieścił się w zakresie ruchu laminarnego, spełniając zależność $Re = \frac{\omega R^2}{\nu} < 10^5$.

W przestrzeni między tarczami o szerokości 14 mm poruszały się swobodnie kryształki o wymiarach 2 do 3 mm. Tory pływających kryształków były zależne od ich masy i obrotów mieszadła. Współrzędna promieniowa toru zwiększała się pod wpływem siły odśrodkowej, przesuwającej kryształ w kierunku ściany, natomiast zmniejszała się pod wpływem siły ciężkości skrcającej tor w jego górnej części. Przy zastosowanych prędkościach kryształ nie spoczywał ani nie przetaczał się po dnie, lecz jeśli go nawet osiągnął, to się od niego odbijał.

Tory kryształków wydrukowała też maszyna dla przyjętych przykładów liczbowych w zakresie obrotów tarcz $1,41 \div 3,40$ na minutę. Tory, pomimo zniekształceń wynikających z opadania kryształku w polu grawitacyjnym, wykazywały małą zmienność współrzędnej promieniowej i obejmowały wszystkie ćwiartki koła.

Ważenie kryształków przy zastosowanych różnych obrotach tarcz, nie wykazało różnic między przyrostami masy, co zga-

działo się z wnioskiem uzyskanym w wyniku obliczeń na maszynie cyfrowej. Podczas jednego obrotu w kryształizatorze, masa kryształu zwiększała się o około 0,2%.

BIBLIOGRAFIA

- [1] C i b o r o w s k i J.: Podstawy inżynierii chemicznej. WNT. Warszawa 1965.
- [2] H u g o t E.: Handbook of Cane Sugar Engineering. Elsevier. Amsterdam 1960.

ДИНАМИКА КРИСТАЛЛИЗАЦИИ В ГОРИЗОНТАЛЬНОМ КРИСТАЛЛИЗАТОРЕ С МЕШАЛКОЙ И ЕЕ ВЛИЯНИЕ НА РОСТ КРИСТАЛЛА

К р а т к о е с о д е р ж а н и е

Выводятся дифференциальные уравнения, описывающие движение и рост одиночного кристалла в ротационном горизонтальном кристаллизаторе. Приводятся результаты вычислений, осуществленных на электронно-вычислительной машине, таких параметров процесса кристаллизации как: средняя относительная скорость кристалла и раствора, траектория кристалла и кинетика его роста. Показывается, что относительная скорость кристалла и раствора равна скорости свободного оседания кристалла в растворе.

CRYSTAL HYDRODYNAMICS IN A HORIZONTAL CRYSTALLIZER AND ITS EFFECT ON THE CRYSTAL GROWTH

S u m m a r y

A motion and crystal growth in a rotary horizontal crystallizer has been described by differential equations. A numerical method has been found out for solving several examples by means of computer. The crystal growth, crystal path and

mean relative velocity of crystal and liquid have been calculated. It has been pointed out that under considered conditions the average relative velocity of crystal was equal to free-settling velocity.

Rękopis dostarczono w maju 1975 r.