

mgr inż. Piotr Furmański
doc. dr Wiesław Gogół

Instytut Techniki Ciepłej
Politechniki Warszawskiej

PODSTAWY PRZEWODZENIA CIEPŁA W OŚRODKACH ANIZOTROPOWYCH

W pracy przedstawiono matematyczne i fizyczne podstawy przewodzenia ciepła w ośrodkach anizotropowych; między innymi omówiono prawo Fouriera, zagadnienia związane z symetrią tensora przewodności cieplnej, wzajemnymi geometrycznymi relacjami między kierunkami wektora strumienia cieplnego i gradientu temperatury, a także termicznym oporem kontaktowym w ciałach anizotropowych. Przedstawiono różniczkowe równanie przewodzenia ciepła łączące z odpowiednią transformacją osi współrzędnych umożliwiającą sprowadzenie problemów anizotropowych do izotropowych. Podano również krótki przegląd metod doświadczalnych używanych do określenia składowych tensora przewodności cieplnej oraz metod analitycznych i numerycznych stosowanych dla znalezienia rozwiązań problemów anizotropowego przewodzenia ciepła.

1. ZJAWISKO ANIZOTROPII PRZEWODZENIA CIEPŁA

Zjawiska anizotropowe właściwości fizycznych występują bardzo często w przyrodzie i technice. Przez **a n i z o t r o p i ę** rozumie się zależność właściwości makroskopowo jednorodnego ciała od kierunku względem osi współrzędnych związanych z danym ciałem. Anizotropia obejmuje szereg rodzajów zjawisk mechanicznych, cieplnych, magnetycznych, elektrycznych i świetlnych. Do właściwości cieplnych wykazujących

charakter anizotropowy należą zjawiska rozszerzalności i przewodności cieplnej.

Anizotropię przewodności cieplnej zaobserwowano początkowo w takich ciałach jak k r y s z t a ł y [4], [7], [26], [40], [41], [42]. Z powodu zwiększonego zainteresowania techniki właściwościami kryształów, badania anizotropii przewodności cieplnej nierozzerwalnie związane były z postępem w badaniach tego rodzaju ciał, a głównie z możliwościami technologicznymi uzyskiwania dostatecznie dużych monokryształów.

Mimo, że c i a ł a p o l i k r y s t a l i c z n e wykazują właściwości izotropowe, specjalna obróbka mechaniczna (dla metali - walcowanie, przeciąganie i ciągnięcie) powoduje wytwarzanie się tzw. tekstury spowodowanej uporządkowaniem ziaren krystalicznych. Ciała tego typu tworzą drugą grupę ośrodków wykazujących pewną anizotropię właściwości cieplnych. Do trzeciej grupy należą różnego rodzaju drewna posiadające odmienne wartości właściwości cieplnych w kierunku prostopadłym i równoległym do włókien.

Do innych materiałów anizotropowych zaliczyć można materiały pochodzenia organicznego, np. s k a ł y o s a d o w e (różnego rodzaju łupki) [5], [8]. Niekiedy pewne elementy urządzeń, wskutek ich specjalnej konstrukcji, nabierają cech ciał anizotropowych, np. rdzenie transformatorowe [12], [21].

Rozwój techniki w zakresie niskich i wysokich temperatur oraz wysokich ciśnień, przyczynił się do zwiększenia użycia specjalnych warstwowych izolacji, materiałów konstrukcyjnych laminowanych oraz wzmacnianych włóknami tzw. k o m p o z y t ó w [2], [3], [14], [18], [22], [23], [24], [27], [35].

Zaobserwowane stosunkowo niedawno zjawisko uporządkowania w fazie ciekłej, w pewnych granicach temperatur, dla niektórych substancji (c i e k ł e - k r y s z t a ł y wykazuje charakter anizotropowy. Ciekłe kryształy znajdują szerokie zastosowanie w technice elektronicznej, pomiarowej oraz powszechnie występują w żywych tkankach [7].

Właściwości fizyczne ciał, związane nierozzerwalnie z ich wewnętrzną strukturą, wyraźnie są czułe na wszelkiego rodzaju

odkształcenia tych struktur. Odkształcenia te niejednokrotnie powodują powstanie anizotropii właściwości fizycznych tych substancji. Zjawisko anizotropii przewodzenia ciepła zaobserwowano więc, również, przy odkształceniach pewnych ciał stałych oraz w cieczach poddanych ciągłej deformacji [5], [25].

2. PODSTAWY TEORETYCZNE PRZEWODZENIA CIEPŁA W CIAŁACH ANIZOTROPOWYCH

2.1. PRAWO FOURIÉRA PRZEWODZENIA CIEPŁA W CIAŁACH ANIZOTROPOWYCH

Analogicznie jak dla ciał izotropowych prawo przewodzenia ciepła dla ciał anizotropowych można zapisać w postaci [2], [8], [16], [21], [27], [40]

$$\bar{q} = -\bar{\lambda} \text{ grad } T, \quad (1)$$

gdzie:

\bar{q} - wektor strumienia cieplnego,

T - temperatura,

$\bar{\lambda}$ - tensor przewodności cieplnej,

lub inaczej we współrzędnych kartezjańskich:

$$-q_x = \lambda_{xx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{xy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{xz} \frac{\partial T}{\partial z},$$

$$-q_y = \lambda_{yx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{yy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{yz} \frac{\partial T}{\partial z}, \quad (1')$$

$$-q_z = \lambda_{zx} \frac{\partial T}{\partial x} + \lambda_{zy} \frac{\partial T}{\partial y} + \lambda_{zz} \frac{\partial T}{\partial z}.$$

Prawo to przedstawia podstawowe założenie o liniowej zależności każdej ze składowych strumienia ciepłego \bar{q} w dowol-

nym punkcie rozpatrywanego ośrodka anizotropowego od składowych gradientu temperatury w tym punkcie.

Może być ono uzasadnione przez rozwinięcie w uogólniony szereg Taylora, w dowolnym układzie współrzędnych kartezjańskich lub krzywoliniowych, funkcji wektorowej strumienia ciepłego w zależności od gradientu temperatury, a następnie ograniczenie rozważań tylko do pierwszych dwóch członów rozwinięcia (dodatek 1).

Z równania tego wynika również wniosek, że na ogół wektory strumienia ciepłego i gradientu temperatury nie pokrywają się. Wektor \bar{q} odchyła się zwykle w kierunku większej przewodności cieplnej ciała. Fakt ten powoduje zatem wystąpienie w ciałach anizotropowych strumienia ciepłego, zarówno prostopadłego, jak i równoległego do istniejącej różnicy temperatur.

W wielu zagadnieniach obliczeniowych wygodniej jest operować pojęciem oporu ciepłego. Wtedy prawo przewodzenia ciepła może być wyrażone jako

$$\text{grad } T = - \bar{R} \bar{q}, \quad (2)$$

gdzie

\bar{R} - jest tensorem oporności cieplnej [8], [26], [4b]

lub we współrzędnych kartezjańskich:

$$\begin{aligned} - \frac{\partial T}{\partial x} &= r_{xx} q_x + r_{xy} q_y + r_{xz} q_z, \\ - \frac{\partial T}{\partial y} &= r_{yx} q_x + r_{yy} q_y + r_{yz} q_z, \\ - \frac{\partial T}{\partial z} &= r_{zx} q_x + r_{zy} q_y + r_{zz} q_z. \end{aligned} \quad (2')$$

Należy zwrócić uwagę na zjawisko sprzężenia między gradientem temperatury w danym kierunku, a strumieniami ciepłymi w pozostałych kierunkach. Zjawisko to nie występuje w ciałach izotropowych.

2.2. TENSOR PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ

2.2.1. POSTAĆ TENSORA PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ DLA KRYSZTAŁÓW I CIAŁ NIEKRYSZTAŁICZNYCH

Tensor przewodności cieplnej $\bar{\lambda}$ występujący w równaniu (1) jest tensorem drugiego rzędu. Składowe jego nazywane są składowymi przewodności cieplnej λ_{ij} .

Zmiana znaku gradientu temperatury w równaniu (1), powoduje zmianę znaku strumienia cieplnego [8], co oznacza, że przewodność cieplna ciała w przeciwnych kierunkach jest taka sama. Zależność ta, słuszna dla ciał niekryształicznych w przypadku kryształów, prawdziwa jest dla 21 spośród 32 klas kryształów posiadających środek symetrii. Dla pozostałych jedenastu klas krystalograficznych postać związku (1) uważana jest za poprawną, ponieważ wykonane eksperymenty potwierdziły niezależność tensora przewodności cieplnej od kierunku przepływu ciepła.

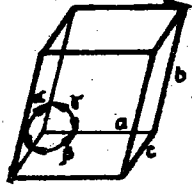
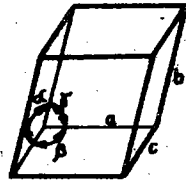
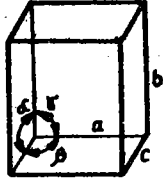
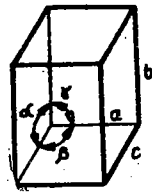
Symetria struktury materiału wywiera istotny wpływ na postać tensora $\bar{\lambda}$ powodując pewne jego uproszczenie w przypadku odpowiedniego wyboru osi układu współrzędnych w stosunku do osi krystalograficznych kryształu lub osi charakterystycznych struktury materiału [40].

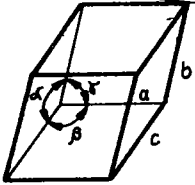
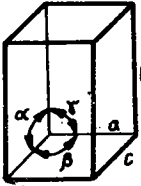
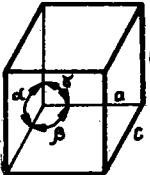
Dla k r y s t a ł ó w niezależność postaci tensora od kierunku przepływu ciepła równoważna jest z wprowadzeniem środka symetrii, co powoduje redukcję 32 klas symetrii kryształów do jedenastu.

Dalszą redukcję ilości klas, które muszą być rozważane, powoduje ograniczenie wprowadzone na tensor przewodności cieplnej $\bar{\lambda}$ przez wszystkie klasy symetrii, posiadające osie symetrii rzędu wyższego niż rząd tensora. W ten sposób rozpatrywane 11 klas może być zastąpione 5 klasami.

Dla poszczególnych układów krystalograficznych, przy odpowiednim wyborze kierunków osi układu współrzędnych w stosunku do głównych osi krystalograficznych uwzględniających występowanie elementów symetrii w odpowiednich układach, postać tensora $\bar{\lambda}$ podano w tablicy 1 [8], [26], [27], [41].

Postacie tensora przewodności cieplnej w różnych układach krystalograficznych

Układ krystalograficzny i elementy symetrii	Postać komórki elementarnej	Postać tensora $\bar{\lambda}$
trójskośny, środek symetrii - $\bar{1}$	 <p>$a \neq b \neq c, \alpha \neq \beta \neq \gamma \neq 90^\circ$</p>	$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix}$
jednoskośny, oś dwukrotna $\bar{2}$ do osi z, płaszczyzna symetrii \perp do osi z	 <p>$a \neq b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ, \gamma \neq 90^\circ$</p>	$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix}$
ortorombowy, dwie osie $\bar{2}$ do osi y i z, płaszczyzna symetrii \perp do osi z	 <p>$a \neq b \neq c, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$</p>	$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix}$
tetragonalny, oś czterokrotna symetrii - $\bar{4}$ do osi z	 <p>$a = c \neq b, \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$</p>	$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 \\ -\lambda_{12} & \lambda_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix}$

Układ krystalograficzny i elementy symetrii	Postać komórki elementarnej	Postać tensora $\bar{\lambda}$
trygonalny, oś trzykrotna symetrii - $\bar{3}$ do osi z	 <p style="text-align: center;">$a = b = c \quad \alpha = \beta = \gamma \neq 90^\circ$</p>	$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix}$
heksagonalny, oś sześciokrotna symetrii - $\bar{6}$ do osi z	 <p style="text-align: center;">$a = c \neq b, \quad \alpha = \gamma = 90^\circ, \beta = 120^\circ$</p>	$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & 0 \\ \lambda_{12} & \lambda_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix}$
regularny, cztery osie $\bar{3}$ i trzy osie $\bar{2}$ wzajemnie \perp	 <p style="text-align: center;">$a = b = c, \quad \alpha = \beta = \gamma = 90^\circ$</p>	$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{11} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{11} \end{bmatrix}$

Dla materiałów anizotropowych niekryształicznych, przy odpowiednim doborze osi układu równoległe do osi głównych struktury, postać tensora przewodności cieplnej ma zwykle tę samą postać jak dla kryształów układu ortorombowego, czyli:

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_{33} \end{bmatrix}. \quad (3)$$

Przy tym często $\lambda_{11} = \lambda_{22}$ dla ciał o dwóch charakterystycznych osiach. Ciała, których tensor wyraża się w postaci (3), a płaszczyzny ograniczające ciało są prostopadłe do osi charakterystycznych struktury nazywane są ciałami ortotropowymi.

Dla ciał kompozytowych laminowanych lub wzmacnianych włóknami istnieje wiele metod obliczania w sposób mniej lub bardziej dokładny składowych $\lambda_{11}, \lambda_{22}, \lambda_{33}$ tensora przewodności cieplnej przy znajomości struktury materiału, przewodności cieplnych oraz udziałów objętościowych poszczególnych jego składników [3], [14], [22], [35].

Dla cieczy poddanych ciągłemu odkształceniu przy ich przepływie tensor przewodności cieplnej ma postać [25]

$$\bar{\lambda} = \lambda_0 \bar{1} - \beta_I \bar{d}, \quad (4)$$

gdzie:

λ_0 - przewodność cieplna dla cieczy nieodkształconej, izotropowej,

$\bar{1}$ - tensor jednostkowy,

β_I - stały współczynnik zależny od struktury ruchu cieczy,

\bar{d} - tensor prędkości deformacji.

Tensor prędkości deformacji ma następującą postać

$$\bar{d} = \begin{bmatrix} \frac{\partial v_x}{\partial x} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial x} + \frac{\partial v_x}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_y}{\partial y} & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) \\ \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_x}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial x} \right) & \frac{1}{2} \left(\frac{\partial v_y}{\partial z} + \frac{\partial v_z}{\partial y} \right) & \frac{\partial v_z}{\partial z} \end{bmatrix},$$

gdzie:

v_x, v_y, v_z - składowe wektora prędkości płynu.

Składowe tensora $\bar{\lambda}$ dają się łatwo wyrazić w nowym układzie współrzędnych prostokątnych o cosinuszach kierunkowych C'_{ij} względem starego układu współrzędnych prostokątnych jako

$$\lambda'_{ik} = C'_{ir} C_{ks} \lambda_{rs}. \quad (5)$$

To samo prawo transformacji stosuje się do tensora oporności cieplnej [8], [26], [27], [40].

2.2.2. ZAGADNIENIE SYMETRYCZNOŚCI TENSORA $\bar{\lambda}$

W wielu gałęziach fizyki kryształów, gdzie pojawia się prawo (1) składowe λ_{ij} są symetryczne

$$\lambda_{ij} = \lambda_{ji}. \quad (6)$$

Z powyższego związku wynika, że jeżeli pod wpływem określonego gradientu temperatury, np. w kierunku osi Ox_1 , pewna ilość ciepła przepłynie w kierunku osi Ox_2 , to pod wpływem tego samego gradientu temperatury w kierunku Ox_2 powinien wystąpić przepływ dokładnie tej samej ilości ciepła w kierunku Ox_1 .

Niespełnienie związku symetryczności (6) pociąga za sobą pewne konsekwencje. Między innymi wywołuje zjawisko spiralnego przepływu ciepła [8], [40].

W celu wykazania możliwości występowania części rotacyjnej strumienia cieplnego, należy rozłożyć tensor na składową symetryczną i antysymetryczną

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_{11}^s & \lambda_{12}^s & \lambda_{13}^s \\ \lambda_{12}^s & \lambda_{22}^s & \lambda_{23}^s \\ \lambda_{13}^s & \lambda_{23}^s & \lambda_{33}^s \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \lambda_{12}^a - \lambda_{13}^a \\ -\lambda_{12}^a & 0 & \lambda_{23}^a \\ \lambda_{13}^a & -\lambda_{23}^a & 0 \end{bmatrix}, \quad (7)$$

gdzie:

$$\lambda_{ij}^s = \frac{\lambda_{ij} + \lambda_{ji}}{2}, \quad \lambda_{ij}^a = \frac{\lambda_{ij} - \lambda_{ji}}{2}.$$

Część symetryczną tensora przez odpowiedni obrót osi współrzędnych można sprowadzić do postaci

$$\begin{bmatrix} \wedge_1 & 0 & 0 \\ 0 & \wedge_2 & 0 \\ 0 & 0 & \wedge_3 \end{bmatrix}. \quad (8)$$

Osie po takim obrocie nazywają się osiami głównymi części symetrycznej tensora $\bar{\lambda}$, a składowe $\wedge_1, \wedge_2, \wedge_3$ odpowiednio składowymi głównymi przewodności cieplnej w kierunkach osi głównych ξ, η, ζ .

Wyznaczenie osi głównych części symetrycznej tensora $\bar{\lambda}$ oraz jego składowych sprowadza się do znalezienia wartości własnych części symetrycznej tensora $\bar{\lambda}$, czyli rozwiązania równania

$$\left(\begin{bmatrix} \lambda_{ij}^s \end{bmatrix} - k E \right) \bar{a} = 0, \quad (9)$$

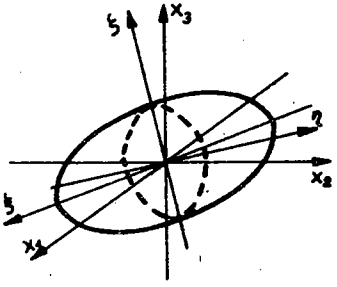
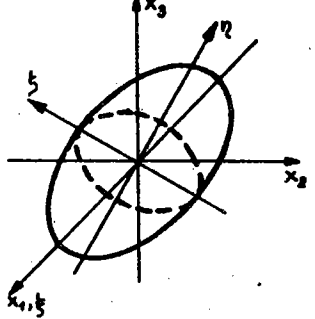
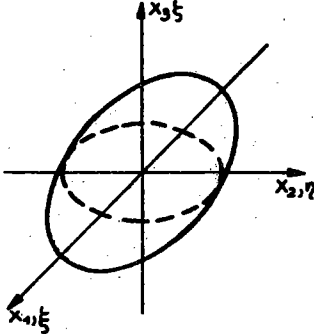
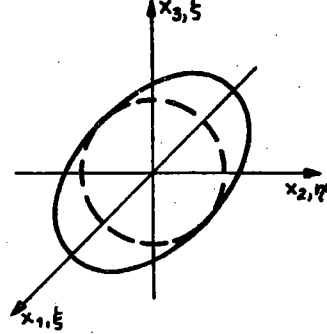
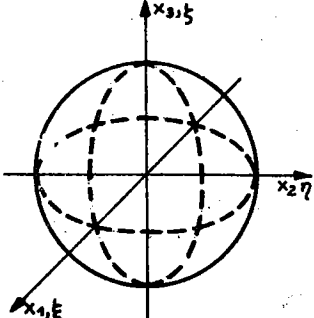
gdzie:

- $\begin{bmatrix} \lambda_{ij}^s \end{bmatrix}$ - macierz składowych λ_{ij} części symetrycznej tensora $\bar{\lambda}$,
- k - stała,
- E - macierz jednostkowa,
- \bar{a} - wektor równoległy do osi głównych części symetrycznej tensora.

Powyższe równanie wektorowe, równoważne układowi równań liniowych jednorodnych, można rozwiązać wyznaczając trzy wartości k_1, k_2, k_3 odpowiednio równe $\wedge_1, \wedge_2, \wedge_3$ oraz określić składowe wektora \bar{a} [21], [27].

Położenie głównych osi przewodności cieplnej w stosunku do osi krystalograficznych kryształu lub osi charakterystycznych

Położenie elipsoidy przewodności cieplnej
względem osi krystalograficznych dla różnych
układów symetrii kryształów

<p>układ trójskośny</p> 	<p>układ jednoskośny</p> 
<p>układ ortorombowy</p> 	<p>układ tetra-, try- lub heksagonalny</p> 
<p>układ regularny</p> 	<p>x_1, x_2, x_3 - osie krystalograficzne ξ, η, ζ - osie główne tenzora przewodności cieplnej</p>

struktury niekryształicznej materiału anizotropowego dla poszczególnych układów podano w tablicy 2.

Po sprowadzeniu osi układu współrzędnych do osi głównych części symetrycznej tensora rozkład $\bar{\lambda}$ będzie wyrażony następująco

$$\begin{bmatrix} \lambda_{11} & \lambda_{12} & \lambda_{13} \\ \lambda_{21} & \lambda_{22} & \lambda_{23} \\ \lambda_{31} & \lambda_{32} & \lambda_{33} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \wedge_1 & 0 & 0 \\ 0 & \wedge_2 & 0 \\ 0 & 0 & \wedge_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & \wedge_{12}^a & -\wedge_{13}^a \\ -\wedge_{12}^a & 0 & \wedge_{23}^a \\ \wedge_{13}^a & -\wedge_{23}^a & 0 \end{bmatrix}. \quad (10)$$

Podobnie strumień cieplny można rozłożyć na strumień cieplny związany odpowiednio z symetryczną \bar{q}^s i antysymetryczną \bar{q}^a częścią tensora $\bar{\lambda}$. Dla ośrodków anizotropowych jednorodnych w układzie osi głównych przy skierowaniu grad T wzdłuż jednej z nich i zmienności funkcyjnej gradientu jedynie w zależności od współrzędnej związanej z tą osią

$$\text{rot } \bar{q} = \text{rot } \bar{q}^a \neq 0, \quad (11)$$

zatem część antysymetryczna tensora spowoduje w tym przypadku pojawienie się wirowego strumienia ciepła (przepływ ciepła w płaskiej anizotropowej płycie ze źródła punktowego). Ciepło płynie wtedy wzdłuż linii spiralnych. W celu wykrycia spiralnego przepływu ciepła podejmowano wiele badań eksperymentalnych. Wszystkie zakończyły się niepowodzeniem (Soret 1893, 1894, Voigt 1902). Zgodnie z wynikami doświadczeń część antysymetryczna tensora, jeśli istnieje, jest niezwykle mała i przepływ ciepła ze źródła punktowego można uznać za zachodzący wzdłuż linii prostych [8], [26], [40].

Stosunkowo niedawno symetryczność tensora $\bar{\lambda}$ uzależniono od ogólniejszej zasady Onsagera [16], dotyczącej mikroskopowej odwracalności zjawisk w termodynamice procesów nieodwracalnych.

W roku 1945 Casimir zwrócił uwagę na pewne trudności w stosowaniu zasady Onsagera, do równań typu (1) oraz na fakt, że w doświadczeniu mierzy się właściwie dywergencję wektora q . Wynika stąd, że aby dodanie antysymetrycznego tensora do syme-

trycznej części tensora $\bar{\lambda}$ zgodnie z (6) nie było obserwowalne zamiast

$$\lambda_{ij} - \lambda_{ji} = 0 \quad (12)$$

wystarczy by zachodziła zależność

$$\frac{\partial (\lambda_{ij} - \lambda_{ji})}{\partial x_i} = 0, \quad (12')$$

składowe λ_{ij} są tutaj funkcjami położenia. Przy przejściu z próżni, gdzie przyjmuje się, że tensor $\bar{\lambda}$ jest symetryczny i równy tożsamościowo zeru (nie można stwierdzić przepływu ciepła w próżni), do kryształu musi być spełniona zależność (12'), a zatem i wewnątrz kryształu tensor ten powinien być symetryczny.

W 1955 roku Crandall wykazał, że dla pewnego rodzaju ciał można dowieść symetryczności tensora [13].

2.2.3. ZALĘŻNOŚĆ MIĘDZY SKŁADOWYMI TENSORA OPORNOŚCI CIEPLNEJ A SKŁADOWYMI TENSORA PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ [8], [40], [41]

Macierz składowych tensora oporności cieplnej jest macierzą odwrotną względem macierzy $[\lambda_{ij}]$, co wynika z postaci związków (1) i (2), a współczynniki r_{ij} tej macierzy wyrażają się przez współczynniki macierzy $[\lambda_{ij}]$ jako

$$r_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \Delta \lambda_{ij}}{|\det [\lambda_{ij}]|}, \quad (13)$$

gdzie:

$\Delta \lambda_{ij}$ - minor macierzy $[\lambda_{ij}]$ odpowiadający jej elementowi λ_{ij} ,

$\det [\lambda_{ij}]$ - wyznacznik macierzy.

Podobnie współczynniki macierzy $[\lambda_{ij}]$ można wyrazić przez współczynniki macierzy oporności cieplnej $[r_{ij}]$ jako

$$\lambda_{ij} = \frac{(-1)^{i+j} \Delta r_{ij}}{\det [r_{ij}]}, \quad (14)$$

gdzie:

Δr_{ij} - minor macierzy $[r_{ij}]$ odpowiadający jej elementowi r_{ij} ,

$\det [r_{ij}]$ - wyznacznik macierzy.

Współczynniki λ_{ij} stosowane są w zagadnieniach, w których dany jest kierunek gradientu temperatury, a r_{ij} , gdy określony jest kierunek strumienia cieplnego.

Dla układu osi głównych tensora

$$\Lambda_1 = \frac{1}{R_1}, \quad \Lambda_2 = \frac{1}{R_2}, \quad \Lambda_3 = \frac{1}{R_3}. \quad (15)$$

2.3 KIERUNKI WEKTORÓW GRADIENTU TEMPERATURY I STRUMIENIA CIEPLNEGO W CIAŁACH ANIZOTROPOWYCH

Składowe tensora przewodności cieplnej λ_{ij} dają się wyrazić przez transformację (5) w nowym układzie osi współrzędnych, a więc zachowują się jak współczynniki pewnej formy dwuliniowej

$$\sum_{i,j} \lambda_{ij} x_i x_j = 1. \quad (16)$$

Funkcja ta przedstawia powierzchnię zwaną kwadryką tensora $\bar{\lambda}$. Osie symetrii tej powierzchni są osiami głównymi tensora symetrycznego $\bar{\lambda}$.

W układzie osi głównych kwadryka tensora ma postać

$$\Lambda_1 \xi^2 + \Lambda_2 \eta^2 + \Lambda_3 \zeta^2 = 1 \quad (17)$$

i ponieważ eksperymentalnie wyznaczone współczynniki Λ_i są dodatnie, przedstawia powierzchnię elipsoidy.

Długości osi symetrii tej elipsoidy, zwanej elipsoidą przewodności cieplnej, wynoszą odpowiednio $\Lambda_1^{-1/2}$, $\Lambda_2^{-1/2}$, $\Lambda_3^{-1/2}$.

Położenie elipsoidy przewodności cieplnej względem osi krystalograficznych lub osi charakterystycznych materiału ani-

zotropowego przedstawione jest w tablicy 2 dla poszczególnych układów symetrii.

Długość dowolnego promienia elipsoidy łączącego początek osi układu współrzędnych z punktem na jej powierzchni jest co do wartości równa odwrotności z pierwiastka kwadratowego składowej przewodności cieplnej tensora w tym kierunku.

Podobnie jak dla tensora $\bar{\lambda}$ można utworzyć powierzchnię charakterystyczną dla tensora \bar{R} . Jest to elipsoida zwana elipsoidą oporności cieplnej. Równanie tej elipsoidy ma w układzie osi głównych postać

$$R_1 \xi^2 + R_2 \eta^2 + R_3 \zeta^2 = 1. \quad (18)$$

Długości jej osi symetrii są odwrotnie proporcjonalne do długości osi elipsoidy przewodności cieplnej, co wynika z zależności (15).

Długość dowolnego promienia wodzącego elipsoidy oporności cieplnej łączącej początek układu współrzędnych z punktem na jej powierzchni jest, co do wartości, równa odwrotności z pierwiastka kwadratowego oporności cieplnej w tym kierunku.

Osie symetrii elipsoidy przewodności cieplnej pokrywają się z osiami symetrii elipsoidy oporności cieplnej.

W ciałach izotropowych powierzchnie izotermiczne (w przypadku wypływu ciepła ze źródła punktowego w ośrodku nieskończonym) mają postać powierzchni kuli, w ciałach anizotropowych tego typu są one elipsoidami o postaci

$$\frac{x_1^2}{\Lambda_1} + \frac{x_2^2}{\Lambda_2} + \frac{x_3^2}{\Lambda_3} = \text{const.} \quad (19)$$

Wiele geometrycznych własności wektora strumienia cieplnego oraz gradientu temperatury wynika z rozważań elipsoidy typu (19) [8], [40].

Między innymi wartość przewodności cieplnej w kierunku gradientu temperatury (grad T) wynosi

$$\lambda_{\text{grad T}} = \sigma_1^2 \Lambda_1 + \sigma_2^2 \Lambda_2 + \sigma_3^2 \Lambda_3, \quad (20)$$

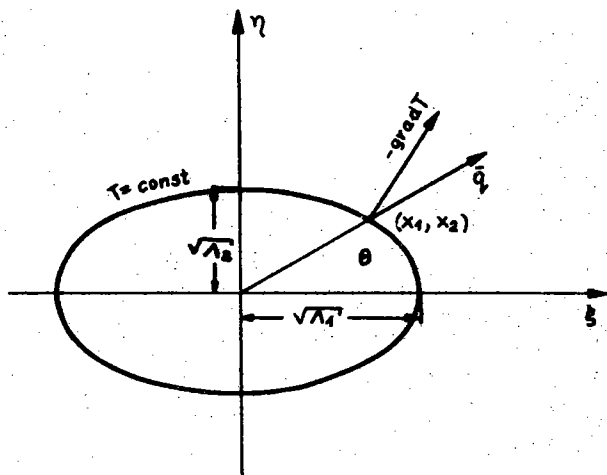
gdzie

σ_{i1} - oznaczają cosinusy kierunkowe wektora grad T względem głównych osi elipsoidy przewodności cieplnej.

Podobnie wartość przewodności cieplnej w kierunku strumienia cieplnego jest określona jako [8]

$$\lambda_{\bar{q}} = \frac{\sigma_{11}^2}{\Lambda_1} + \frac{\sigma_{22}^2}{\Lambda_2} + \frac{\sigma_{33}^2}{\Lambda_3} \quad (21)$$

Położenie wzajemne wektorów \bar{q} i - grad T względem izoterm przedstawia rys. 1.



Rys. 1

Z własności elipsoid (17) i (18) wynika, że jeśli kierunek grad T w punkcie (x_1, x_2, x_3) jest znany, to kierunek wektora \bar{q} w tym punkcie jest prostopadły do płaszczyzny stycznej do elipsoidy przewodności cieplnej. Podobnie, jeśli kierunek wektora \bar{q} w punkcie (x_1, x_2, x_3) jest znany, to kierunek gradientu temperatury grad T w tym punkcie jest prostopadły do płaszczyzny stycznej do elipsoidy oporności cieplnej [8], [41].

2.4. RÓWNANIE FOURIERA PRZEWODZENIA CIEPŁA W CIAŁACH ANIZOTROPOWYCH

Dla ciał anizotropowych, zgodnie z analogią ciał izotropowych, napisać można równanie Fouriera przewodzenia ciepła jako [2], [8], [21], [26], [27]

$$\operatorname{div} (\bar{\lambda} \operatorname{grad} T) + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (22)$$

gdzie:

- Q - gęstość źródeł ciepła,
- ρ - gęstość ciała anizotropowego,
- c - ciepło właściwe ciała anizotropowego,
- t - czas.

Warunek początkowy, związany z równaniem (22), ma postać

$$t = 0, T(\bar{x}, 0) = F(\bar{x}), \quad (23)$$

gdzie

\bar{x} - oznacza (x_1, x_2, x_3) , natomiast warunki brzegowe na powierzchni S ograniczającej ciało dla $t \geq 0$ określone są następująco

$$\sum_{i=1}^3 q_{x_i} n_{x_i} + \alpha(T - T_{\infty}) = -q, \quad (24)$$

gdzie:

- n_{x_i} - składowe wektora normalnego do powierzchni S,
- α - współczynnik przejmowania ciepła.

Zależnie od wyboru współczynników n_{x_i} i α otrzymuje się odpowiednio warunki brzegowe typu Dirichleta, Neumanna lub mieszane.

Równanie (22) nie ma postaci kanonicznej i w związku z tym występują duże trudności ze znalezieniem jego rozwiązania.

Dla współrzędnych kartezjańskich, przy założeniu jednorodności ośrodka anizotropowego i niezależności tensora $\bar{\lambda}$ od temperatury, postać tego równania jest następująca

$$\lambda_{11} \frac{\partial^2 T}{\partial x^2} + \lambda_{22} \frac{\partial^2 T}{\partial y^2} + \lambda_{33} \frac{\partial^2 T}{\partial z^2} + 2\lambda_{12} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial y} + 2\lambda_{13} \frac{\partial^2 T}{\partial x \partial z} +$$

$$+ 2\lambda_{23} \frac{\partial^2 T}{\partial y \partial z} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}. \quad (25)$$

Po sprowadzeniu równania (25) do postaci kanonicznej

$$\Lambda_1 \frac{\partial^2 T}{\partial \xi^2} + \Lambda_2 \frac{\partial^2 T}{\partial \eta^2} + \Lambda_3 \frac{\partial^2 T}{\partial \zeta^2} = \rho c \frac{\partial T}{\partial t} \quad (26)$$

i zastosowaniu prostej reguły transformacyjnej można zredukować zagadnienia związane z ciałem anizotropowym do odpowiednich problemów dla ciała izotropowego (wyprowadzenie tej reguły dla kartezjańskiego układu współrzędnych podano w dodatku 2).

Transformacja ta jest następującym przekształceniem liniowym [8], [10], [26]:

$$\xi = (\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3)^{-1/6} (\Lambda_1)^{1/2} x_1,$$

$$\eta = (\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3)^{-1/6} (\Lambda_2)^{1/2} x_2, \quad (27)$$

$$\zeta = (\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3)^{-1/6} (\Lambda_3)^{1/2} x_3.$$

Powyższą transformację można wyobrazić sobie jako jednorodne odkształcenie, przy którym objętość elementu ciała anizotropowego pozostaje stała, bowiem

$$dX_1 dX_2 dX_3 = d\xi d\eta d\zeta, \quad (28)$$

a zatem ilość ciepła Q wydzielającego się w jednostce czasu na jednostkę objętości pozostaje niezmienną. Po zastosowaniu przedstawionego przekształcenia równanie (26) przybiera formę następującą

$$K \left(\frac{\partial^2 T}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_2^2} + \frac{\partial^2 T}{\partial x_3^2} \right) = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (29)$$

czyli postać równania dla ciała izotropowego o przewodności cieplnej

$$K = (\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3)^{1/3}. \quad (30)$$

Znając rozwiązanie równania dla ciała izotropowego tworzy się jego obraz łącznie ze źródłami ciepła, warunkami brzegowymi, izotermami oraz liniami przepływu ciepła, następnie zniekształcając ten obraz, zgodnie z transformacją (27), otrzymuje się obraz źródeł, warunków brzegowych, izoterm i linii przepływu ciepła, który będzie odpowiadał rozwiązaniu zagadnienia dla ośrodka anizotropowego o wartościach głównych przewodności cieplnych $\Lambda_1, \Lambda_2, \Lambda_3$. Podczas takiej transformacji źródła ciepła zachowują swoją wydajność, a poszczególnym izotermom odpowiadają poprzednio określone temperatury. Składowe wektora strumienia cieplnego q transformują się podobnie jak współrzędne

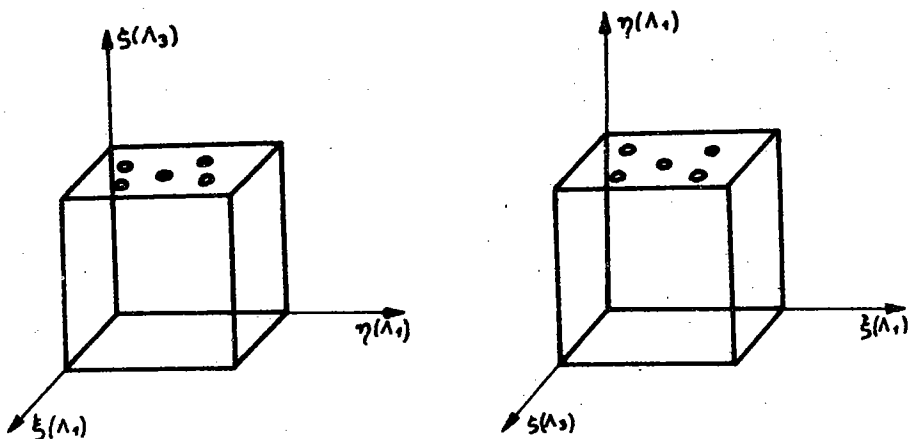
$$\frac{q_i}{q_{x_1}} = \frac{x_i}{x_1}, \quad (31)$$

natomiast nie występuje taka transformacja wektora gradientu temperatury, który w obu przypadkach jest prostopadły do izoterm.

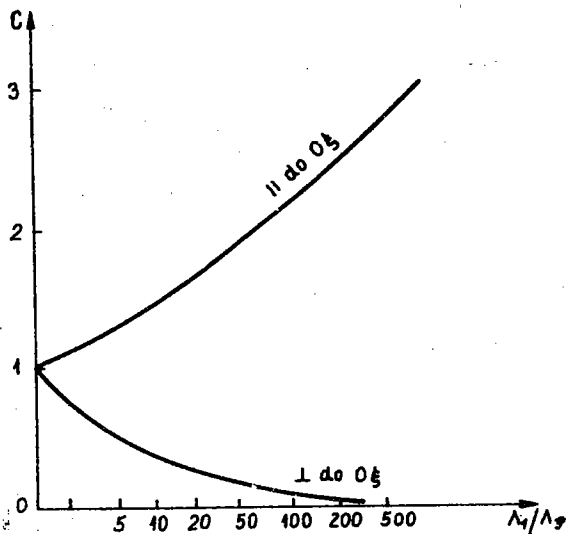
Przedstawiona transformacja posiada jednak pewne wady. Zastosowana wspólnie z obrotem układu współrzędnych powoduje deformację granic rozpatrywanego obszaru i zwykle znacznie komplikuje warunki brzegowe. W związku z tym stosowana jest tylko w przypadku, gdy obszar anizotropowy jest nieskończony, lub gdy rozpatrywane ciało ograniczone jest płaszczyznami prostopadłymi do głównych osi przewodności cieplnej. Zatem transformacja (27) znajduje praktyczne zastosowanie tylko dla ciał o charakterze ortotropowym [8], [26].

2.5. TERMICZNY OPÓR KONTAKTOWY DLA CIAŁ ANIZOTROPOWYCH

Termiczny opór kontaktowy (TOK) w przypadku ciał anizotropowych został opracowany jedynie dla ciał ortotropowych [38], tzn. dla ciał, których główne osie przewodności cieplnej



Rys. 2



Rys. 3

pokrywają się z osiami struktury przy $\Lambda_1 = \Lambda_2$, odpowiednio dla powierzchni kontaktu dwóciah ciał prostopadłej do osi $O\xi$ i równoległej do niej (rys. 2 [38]).

Przyjęto przy tym następujące założenia:

a) transport energii w kontinuum (kwantowe i atomowe efekty są pomijalne),

b) rzeczywiste miejsca kontaktu dwóciah ciał są pod względem cieplnym dobrze sprzężone,

c) miejsca kontaktu dwóch ciał mają kształt kół i są izolowane (odległości między miejscami kontaktu duże w porównaniu z ich średnicą).

Analizę wpływu anizotropii na TOK przeprowadzono w oparciu o transformację (27) przy uwzględnieniu wyników otrzymanych dla ciał izotropowych. Stwierdzono, że oprócz czynników uwzględnianych dla ciał izotropowych (chropowatość powierzchni, twardość powierzchni materiału, obciążenie) na TOK wpływa położenie głównych osi przewodności cieplnej $O\xi$, $O\eta$, $O\xi$ względem powierzchni kontaktu oraz stosunek wartości przewodności cieplnych.

Na rys.3 [38] została przedstawiona zależność współczynnika korekcyjnego C , przez który należy pomnożyć TOK występujący na styku ciał izotropowych w celu otrzymania wartości TOK dla styku ciał anizotropowych o takich samych wartościach przewodności cieplnych w kierunku prostopadłym do powierzchni kontaktu.

Dla potwierdzenia doświadczalnego opisanego zjawiska brak w literaturze dowodów.

3. METODY DOŚWIADCZALNE OKREŚLANIA SKŁADOWYCH TENSORA PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ

3.1. LICZBA KONIECZNYCH POMIARÓW DLA POSZCZEGÓLNYCH UKŁADÓW KRYSALOGRAFICZNYCH [40]

Jeśli w doświadczeniu można dokonać pomiaru pojedynczej składowej λ_{ij} tensora λ , to ilość wymaganych pomiarów, przy założeniu symetryczności tensora wynosi odpowiednio:

dla układu: trójskośnego	- 6,
jednoskośnego	- 4,
ortorombowego	- 3,
trygonalnego	- 2,
tetragonalnego	- 2,
heksagonalnego	- 2,
regularnego	- 1.

W przypadku kryształów układu ortorombowego, tetra-, try-, heksagonalnego oraz regularnego, a także dla innych niekryształicznych ciał anizotropowych osie główne elipsoidy przewodności cieplnej pokrywają się z osiami kryształograficznymi lub charakterystycznymi osiami struktury; wówczas, w celu uproszczenia doświadczenia dobiera się próbki o płaszczyznach przekroju odpowiednio prostopadłych do głównych osi przewodności cieplnej. Z wykonaniem odpowiednich próbek nie ma więc specjalnych trudności.

Dla kryształów układu jednoskośnego płaszczyznę przekroju wykonuje się prostopadle do dwukrotnej osi symetrii lub równolegle do płaszczyzny symetrii kryształu (jedna oś główna tensora jest równoległa do osi symetrii, lub prostopadła do płaszczyzny symetrii). Pozostałe przekroje dokonuje się w sposób dowolny prostopadle do poprzedniego przekroju.

Dla kryształów układu trójskośnego wybór położenia przekroju próbki jest dowolny.

3.2. NIEKTÓRE METODY POMIARU SKŁADOWYCH TENSORA $\bar{\lambda}$

Do eksperymentalnego wyznaczenia składowych tensora przewodności cieplnej stosowane są głównie tradycyjne metody stacjonarne pomiaru $\bar{\lambda}$ dla ciał izotropowych. Różnicę stanowi jedynie liczba pomiarów potrzebnych do znalezienia składowych tensora, konieczność zapewnienia minimalnych strat oraz uwzględnienie zniekształceń pola temperatury na brzegach próbek. W doświadczeniach mierzy się gradient temperatury oraz wartość strumienia cieplnego. Źródło ciepła stanowi zwykle grzejnik elektryczny. W celu oceny strat bocznych dokonuje się pomiaru ilości ciepła, które przepłynęło do chłodnicy albo przez pomiar wzrostu temperatury znanej objętości cieczy lub przez ilość pary wytworzonej przy wrzeniu cieczy pod określonym ciśnieniem na skutek dopływu ciepła. W celu zmniejszenia strat próbkę umieszcza się w komorze próżniowej. Sposób powyższy stosowany jest zwykle dla kryształów metali oraz dla

materialów laminowanych lub wzmocnionych włóknami [18], [22], [40].

Dla ciał niemetalicznych dokonuje się zwykle pomiaru λ_{ij} lub r_{ij} przez pomiar gradientu temperatury w dwóch ciałach: jednym izotropowym o znanej przewodności cieplnej, drugim anizotropowym. Dąży się przy tym do zapewnienia dobrego kontaktu cieplnego obu materiałów [40].

Wśród metod niestacjonarnych pomiaru $\bar{\lambda}$ stosowanych do ciał anizotropowych należy wymienić pomiary przy użyciu lasera tzw. "flash method" [33].

Istnieją również specjalne metody pomiaru przewodności cieplnej dla ciał anizotropowych. W wyniku zastosowania tych metod otrzymuje się wartości ilorazu przewodności cieplnych wzdłuż głównych osi elipsoidy przewodności cieplnej $\wedge_1, \wedge_2, \wedge_3$.

Do metod powyższych należą:

a. Metoda de Senarmonta [40], [41]

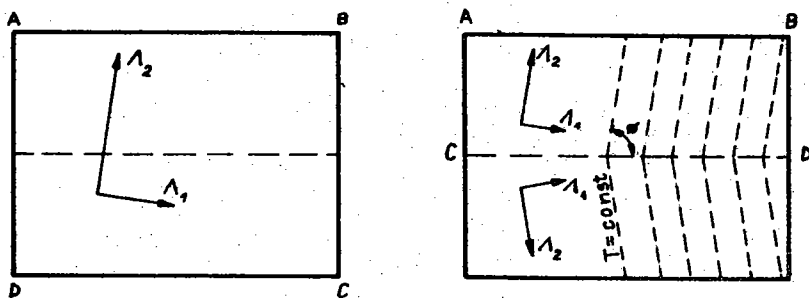
Płytkę z materiału anizotropowego, wyciętą prostopadle do głównych osi przewodności, pokrywa się cienką warstwą wosku lub alkoholowanym roztworem kwasu elaidowego. Po zastygnięciu wosku lub kwasu na powierzchni próbki w jej środek wprowadza się źródło ciepła (np. przy użyciu sondy metalowej ogrzewanej elektrycznie).

Granica roztopionego wosku lub kwasu elaidowego ma kształt elipsy. Po usunięciu źródła ciepła i zastygnięciu cieczy dokonuje się pomiaru osi tej elipsy otrzymując w wyniku względne wartości przewodności w dwóch prostopadłych kierunkach (zgodnie ze wzorem (19) główne osie elipsy są proporcjonalne do $\wedge_i^{1/2}$ $i = 1, 2, 3$).

b. Metoda płytek bliźniaczych [40], [41]

Metoda ta jest rozwinięciem metody poprzedniej. Przed przystąpieniem do doświadczenia sporządza się płaską płytkę, której dwie ściany są równoległe do płaszczyzny głównych osi elipsoidy przewodności cieplnej. Płytkę przecina się na dwie równe części, równoległe do boku AB, a potem, po obróceniu, łączy obie płytki wzdłuż boku CD (rys.4).

Następnie płytki umieszcza się, po uprzednim pokryciu warstwą roztworu kwasu elaidowego, między źródłem ciepła, a chłod-



Rys.4

nicą. Dopływ ciepła do elementu grzejnego regulowany jest w ten sposób, aby zastygła warstwa kwasu topiła się powoli. Po dotarciu granicy stopionego obszaru do środka płytki wyłącza się ogrzewanie i pozostawia się ją do ostygnięcia. Topnienie kwasu zachodzi równoległe do izoterm, po zastygnięciu zachowany jest ich kształt (rys.4, [40]). Na specjalnym urządzeniu obrotowym dokonuje się pomiaru kąta w środku płytki między izotermami.

Usytuowanie linii połączenia dwóch części płytki w stosunku do głównych osi przewodności oznacza się przez kąt θ . Pomiar kąta θ może być wykonany przy użyciu mikroskopu polaryzacyjnego lub refraktometru całkowitego wewnętrzznego odbicia.

Wartość ilorazu λ_1/λ_2 wyznacza się z zależności

$$\operatorname{tg} \theta = \frac{1}{2} \sin 2\theta \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right), \quad (32)$$

otrzymanej z rozważań geometrycznych (dodatek 3).

Dokładność z jaką mogą być wyznaczone oba kąty wynosi jeden do dwóch stopni; prowadzi to do kilkuprocentowego błędu przy wyznaczaniu wartości stosunku λ_1/λ_2 .

Wycinając w inny sposób płytkę z tego samego materiału można pomierzyć podobnie λ_1/λ_3 .

Przedstawione metody pomiaru składowych tensora przewodności cieplnej $\bar{\lambda}$ pozwalają jedynie na wyznaczenie względnego stosunku składowych głównych tensora i muszą być uzupełnione przynajmniej jednym pomiarem bezwzględnej wartości λ_1 w jednym z kierunków csi głównych.

Powyższe metody opierają się na znajomości kierunków położenia osi głównych elipsoidy przewodności lub możliwości ich niezależnego wyznaczenia (pomiar kąta θ) a zatem stosowanie ich ogranicza się do ciał anizotropowych niekryształicznych lub kryształicznych układów ortorombowego, heksa-, try-, i tetragonalnego.

Przykładowe wartości składowych tensora przewodności cieplnej wyznaczonych eksperymentalnie dla wybranych ośrodków anizotropowych podano w tabelicy 3.

Tabela 3

Wartości składowych tensora przewodności cieplnej dla wybranych typów ośrodków anizotropowych

Typ ośrodka	Nazwa	T [K]	$\hat{\lambda}_1$ $\left[\frac{W}{mK}\right]$	$\hat{\lambda}_2$ $\left[\frac{W}{mK}\right]$	$\hat{\lambda}_3$ $\left[\frac{W}{mK}\right]$	Pozycja literatury
Kryształ	grafit	303	355 ¹⁾	355 ¹⁾	89	[26]
	kwarc	303	6,5	6,5 ¹⁾	11,3	[11]
Drewno	sosna biała	333	0,1	0,1	0,25 ¹⁾	[19]
	jodła	293	0,14	0,14	0,35 ¹⁾	[19]
Skała osadowa	żupek	368	1,51	2,30 ¹⁾	2,30 ¹⁾	[19]
Ciecze poddane ciągłej deformacji	smar (szybkość deformacji $\omega = 300 \text{ s}^{-1}$)	293	0,21 ¹⁾	0,15	0,15	[25]
Kompozyt	włókna: Nb-Ti osnowa: żywica epoksydowa	276	1,28	1,28	169 ¹⁾	[18]
	włókna: szkło osnowa: żywica epoksydowa (laminat)	293	0,42	0,57 ¹⁾	0,57 ¹⁾	[22]

1) || do warstw, włókien lub kierunku ruchu (dla cieczy).

4. METODY ANALITYCZNE I NUMERYCZNE ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIENI PRZEWODZENIA CIEPŁA W OŚRODKACH ANIZOTROPOWYCH

Rozwiązania analityczne i numeryczne zagadnień przewodzenia ciepła w ośrodkach anizotropowych pojawiają się sporadycznie w literaturze. Przeważająca część opublikowanych rozwiązań analitycznych dotyczy przypadku ciał ortotropowych, dla których równanie Fouriera ma postać kanoniczną (brak pochodnych mieszanych w równaniu przewodzenia ciepła). Do tych przypadków stosuje się często transformację opisaną w § 2, a następnie znajduje się znanymi metodami rozwiązanie powracając przez transformację odwrotną do zagadnień dla ciał ortotropowych [10], [17], [21], [24], [26], [27], [34], [36].

W przypadku ośrodków ściśle anizotropowych o postaci tensora przewodności cieplnej charakterystycznej dla struktur krystalicznych typu jednoskośnego lub trójskośnego rozwiązanie równania przewodzenia ciepła jest trudniejsze z powodu niekanonicznej jego postaci.

Przedstawione w literaturze rozwiązania obejmują jedynie niektóre typy ciał anizotropowych, jednorodnych i nieograniczonych. Stosowanymi metodami rozwiązywania są metoda zespolonej lub sinusowej i cosinusowej transformaty Fouriera dla obszarów nieograniczonych [28], [29] (prowadzi ona do równań różniczkowych zwyczajnych o współczynnikach zespolonych) oraz metoda sprowadzenia równania różniczkowego cząstkowego przez wprowadzenie odpowiednio przekształconego argumentu do równania różniczkowego zwyczajnego (zagadnienie Dirichleta dla nieograniczonego, anizotropowego klina [12]).

Wśród metod numerycznych stosowanych do znajdowania rozwiązań zagadnień anizotropowego przewodzenia ciepła wymienić należy metodę elementu skończonego [1], [6], [15], [31], [32], [39]. Przykłady zastosowań tej metody do problemów anizotropowych znaleźć można w pozycjach literaturowych [30], [31], natomiast półanalityczną metodę elementu skończonego, wykorzystującą specyficzny charakter ciał o geometrii obrotowej, w pozycji [28].

Metoda różnic skończonych dla zagadnień anizotropowych stosowana może być bezpośrednio do równania różniczkowego Fouriera [20] lub do równania całkowego odpowiednio sformułowanego, przy użyciu zmodyfikowanej metody potencjału dla ośrodków anizotropowych [9].

Do innych metod numerycznych zaliczyć ponadto trzeba metodę probabilistyczną Monte Carlo, w której przy rozwiązywaniu zagadnień anizotropowych, następuje kierunkowa preferencja ruchu wędrującej cząstki próbnej zarówno w procedurze stałego jak i zmiennego kroku.

Zastosowanie tej metody do zagadnienia Dirichleta podaje artykuł [29].

W powyższych metodach numerycznych użytkownik często spotyka się z problemami zbieżności, związanymi zarówno ze specyficzną postacią układu równań bilansowych dla ośrodków anizotropowych, jak również z odpowiednią wielkością wymiarów elementów siatki, liczbą elementów oraz ograniczonymi możliwościami obliczeniowymi maszyn cyfrowych.

Część z tych trudności daje się częściowo usunąć przez zastosowanie odpowiedniego przekształcenia układu współrzędnych [20] lub użycie metod półanalitycznych [31].

Uzasadnienie prawa Fouriera

Przyjmując, że $\bar{q} = \bar{q}(\text{grad } T)$ oraz rozwijając \bar{q} w uogólniony szereg Taylora w otoczeniu punktu M zależności funkcyjnej, dla którego $\text{grad } T = 0$ otrzymuje się

$$\bar{q}_M(\text{grad } T) = \bar{q}_M(0) + \Delta \bar{q}_M(0) + \frac{1}{2!} \Delta^2 \bar{q}_M(0) + \dots, \quad (1)$$

gdzie:

Δ oznacza uogólniony przyrost funkcji wektorowej \bar{q} ,

M jest punktem należącym do otoczenia punktu M.

Po ograniczeniu się do pierwszych dwóch wyrazów rozwinięcia oraz założeniu, że $\bar{q}(0) = 0$

$$\bar{q}(\text{grad } T) \approx \Delta \bar{q}(0). \quad (2)$$

Stąd dla krzywoliniowego, ortogonalnego układu współrzędnych poszczególne współrzędne wektora \bar{q} wyrażone są wzorem

$$q^j(\text{grad } T) \approx \nabla_k q^j(0) (\text{grad } T)^k, \quad (3)$$

gdzie

$\nabla_k q^j(0)$ - pochodna kowariantna wektora \bar{q} w punkcie $\text{grad } T = 0$.

Wprowadzając oznaczenie

$$\lambda_k^j = -\nabla_k q^j(0) \quad (4)$$

do równania (3) oraz uwzględniając, że

$$(\text{grad } T)^k = g^{ki} \frac{\partial T}{\partial u_i}, \quad (5)$$

gdzie:

g^{ki} - współrzędne tensora metrycznego kontrawariantnego,

u_i - współrzędne układu krzywoliniowego,

otrzymano postać prawa Fouriera w ośrodkach anizotropowych

$$q^j = -\lambda_k^j g^{ki} \frac{\partial T}{\partial u_i}. \quad (6)$$

Aby znaleźć postać tego prawa we współrzędnych fizycznych należy we wzorze (6) uwzględnić współczynniki Lamego.

We wzorach (3), (5), (6) stosowano umowę sumacyjną Einsteina.

Reguła transformacyjna sprowadzająca
ośrodek ortotropowy do izotropowego

Równanie Fouriera dla ośrodków anizotropowych w kartezjańskim układzie współrzędnych ma postać

$$\sum_{j,k} \lambda_{jk} \frac{\partial^2 T}{\partial x_j \partial x_k} + Q = \rho c \frac{\partial T}{\partial t}, \quad (1)$$

gdzie:

Q - objętościowa gęstość źródeł ciepła,

ρ - gęstość ośrodka anizotropowego,

c - ciepło właściwe,

T - temperatura,

x_j, x_k - współrzędne kartezjańskie $j = 1, 2, 3$

$k = 1, 2, 3,$

λ_{jk} - składowe tensora przewodności cieplnej (dla ośrodków ortotropowych $\lambda_{jk} (j \neq k) = 0$),

t - czas.

Równanie (1) ma pozostać niezmiennie względem dowolnego liniowego przekształcenia układu współrzędnych, a zatem zarówno pierwszy jego człon określający dywergencję strumienia (\bar{q}) jak i drugi przedstawiający objętościową gęstość źródeł ciepła (Q) powinien pozostać niezmienny. Przyjmując postać przekształcenia liniowego współrzędnych jako $u_j = \alpha_j x_j$ (brak sumowania po j) oraz przyrównując wyrazy określające dywergencję \bar{q} i objętość elementarną (Q niezmiennie) dla układu rozpatrywanego i przekształconego oraz żądając, aby ośrodek był w przetransformowanym układzie współrzędnych izotropowy otrzymuje się następujący układ równań:

$$\begin{cases} (\alpha_j)^{-2} K = \lambda_{jj} = \Lambda_j, & j = 1, 2, 3, \\ \alpha_1 \alpha_2 \alpha_3 = 1, \end{cases} \quad (2)$$

gdzie:

Λ_j - składowe tensora przewodności cieplnej dla ośrodka ortotropowego,

K - zastępcza przewodność cieplna ośrodka izotropowego.

Z rozwiązania układu równań (2) wyznaczono

$$\alpha_j = \left(\frac{K}{\Lambda_j} \right)^{1/2}, \quad K = (\Lambda_1 \Lambda_2 \Lambda_3)^{1/3}. \quad (3)$$

Uzasadnienie stosowania zależności (32) do wyznaczania stosunku przewodności cieplnych metodą płytek bliźniaczych

Korzystając z postaci równania powierzchni izotermicznych w nieograniczonym, płaskim ośrodku anizotropowym (wzór (19), rys. 1) kierunek normalnej do powierzchni izotermicznej $T = \text{const}$ wyznaczono jako

$$m = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \frac{x_2}{x_1}. \quad (1)$$

Kąt θ nachylenia osi układu płytki pomiarowej do osi głównych przewodności cieplnej związany jest ze współrzędnymi punktu na izotermie w sposób następujący

$$\text{tg } \theta = \frac{x_2}{x_1}, \quad (2)$$

zatem

$$m = \text{tg } (\theta + \varphi) = \frac{x_2}{x_1} \frac{\lambda_1}{\lambda_2} = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} \text{tg } \theta. \quad (3)$$

Po odjęciu stronami od równania (3) wyrażenia $\text{tg } \theta$ otrzymuje się

$$\text{tg } (\theta + \varphi) - \text{tg } \theta = \text{tg } \theta \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right). \quad (4)$$

Dla wartości λ_1 niewiele różniącej się od wartości λ_2 kąt φ dąży do zera i wówczas korzystając z przybliżeń

$$\sin \varphi \approx \varphi \quad \text{i} \quad \cos (\theta + \varphi) \approx \cos \theta$$

kąt nachylenia izoterm do osi układu współrzędnych, związanych z krawędziami płytki pomiarowej można wyznaczyć z zależności

$$\varphi = \frac{1}{2} \sin (2\theta) \left(\frac{\lambda_1}{\lambda_2} - 1 \right). \quad (5)$$

BIBLIOGRAFIA

- [1] Aquirre - Ramirez G., Oden J.T.: Finite Element Technique Applied to Heat Conduction in Solids with Temperature Dependent Thermal Conductivity. Int.J. for Num.Meth. in Engng, Vol 7, No 3, 1973.
- [2] Arpaci V.S.: Conduction Heat Transfer. Addison-Wesley, Reading Mass, 1966.
- [3] Ashton J.E., Halpin J.C., Petit P.A.: Primer on Composite Materials. Technomic, Stamford, Connecticut, 1969.
- [4] Bhagavantam S.: Crystal Symmetry & Physical Properties. Academic Press, London 1966.
- [5] Bosworth R.C.L.: Heat Transfer Phenomena. Associated General Publication, Sydney 1952.
- [6] Bruch J., Żyrodski G.: Transient Two-Dimensional Heat Conduction Problems Solved by the Finite Element Method. Int.J. for Num.Meth. in Engng, Vol. 8, No 3, 1974.
- [7] Buszmanow B.N., Chromow J.A.: Fizyka ciała stałego. WNT, Warszawa 1973.
- [8] Carslaw H.S., Jaeger J.C.: Conduction of Heat in Solids. Oxford Press, London 1959.
- [9] Chang Y.P., Kang C.S., Chen D.J.: The Use of Fundamental Green's Functions for the Solution of Problems of Heat Conduction in Anisotropic Media. Int.J. Heat Mass Trans., Vol. 16, 1973.
- [10] Chao B.T.: A Note on Conduction of Heat in Anisotropic Media. Appl.Sc.Research, Sec. A, Vol. 12, 1962.
- [11] Chojnacki J.: Elementy krystalografii chemicznej i fizycznej. PWN, Warszawa 1971.
- [12] Cobble M.H.: Nonlinear Anisotropic Temperature Distribution in a Wedge. Int. J. Heat Mass Trans., Vol. 17, 1974.
- [13] Crandall S.A.: Physica. Vol. 21, No 3, 1955.
- [14] Elrod H.G.: Two-Simple Theorems for Establishing Bounds on the Total Heat Flow in Steady-State Heat Conduction Problems with Convective Boundary Conditions. J.Heat Trans., Vol. 96, No 2, 1974.
- [15] Fraeijjs de Venbehe B.M., Hogge M.A.: Dual Analysis for Heat Conduction Problems by Finite Elements. Int. J. for Num. Meth. in Engng, Vol. 3, No 1, 1972.
- [16] De Groot S.R.: Thermodynamics of Irreversible Processes. North-Holland Publishing Company, Amsterdam 1961.

- [17] G i e d t W.H., H o r n b a k e r D.R.: Temperature Variations in a Thermally Orthotropic Plate. ARS J. 1962.
- [18] H u s t J.G.: Low Temperature Thermal Conductivity Measurements on Longitudinal Transverse Sections of a Superconductivity Coil. Cryogenics, Vol. 15, No 1, 1975.
- [19] International Critical Tables of Numerical Data Physics, Chemistry & Technology. Mc Graw-Hill Book Company, New York 1927.
- [20] K a t a y a m a K., S a i t o A., K o b a y a s h i N., K o d o m a Y.: Transient Heat Conduction in Anisotropic Solids. Bull. of JSME, Vol. 17, No 110, 1974.
- [21] K ą c k i E.: Termokinytyka. WNT, Warszawa 1967.
- [22] K n a p p e W., M a r t i n e z - F r e i r e P.: Messung und Berechnung der Wärmeleitfähigkeit von Glasfaser Kunststoff. Kunststoffe, Bd.55, Heft 10, 1965.
- [23] L e b i e d i e w P.P., Z l o b i n E.K., A l e k s i e j e w W.W.: Tiepłoprowodność-Ekranno-Wakuumnych Tiepkoizolacji. Inż.-Fiz.Żurnał, Vol. 5, 1971.
- [24] L e b i e d i e w P.P., L e b i e d i e w D.P., Z l o m b F.K.: Ocienka Tiepłozaszczitnych Swoistw Anizotropnych Izolacji. Inż.-Fiz.Żurnał, Vol. 24, No 1, 1973.
- [25] Ł y k o w A.W., K o l p a s z o n i k o w W.L.: Ob Effiektach Anizotropii Pierenosa Tiepła w Konwiektiwnych Potokach Żidkostiej. Inż.-Fiz. Żurnał, Vol. 25, No 4, 1973.
- [26] N y e J.E.: Własności fizyczne kryształów. PWN, Warszawa 1962.
- [27] Ö z i s k M.H.: Boundary Value Problems of Heat Conduction. International Textbook, Scranton 1968.
- [28] P a d o v a n J.: Temperature Distribution in Anisotropic Shells of Revolution. AIAA J., Vol. 10, No 1, 1972.
- [29] P a d o v a n J.: Transient Temperature Distributions in an Anisotropic Half Space. AIAA J., Vol. 11, No 4, 1973.
- [30] P a d o v a n J.: Steady Conduction of Heat in Linear & Nonlinear Fully Anisotropic Media by Finite Elements. J.Heat Trans., 1974.
- [31] P a d o v a n J.: Quasi - Analytical Finite Element Procedure for Conduction in Anisotropic Axisymmetric Solids. Int.J. for Num.Meth. in Engng., Vol.8, No 2, 1974.
- [32] P a d o v a n J.: Solution of Anisotropic Heat Conduction Problems by Monte Carlo Procedures. J.Heat Trans.. 1974.

- [33] Parker W.J., Jenkins R.J., Butler C.P., Abboldt G.C.: Flash Method of Determining Thermal Diffusivity, Heat Capacity & Thermal Conductivity. J. of Appl. Phys., Vol. 32, 1961.
- [34] Pfahl J.R.: Two - Dimensional Quasi - Stationary Temperature Distribution in a Moving Infinite Slab with Orthotropic Properties. Int. J. of Heat Mass Trans., Vol. 18, No 2, 1975.
- [35] Springer G.S., Tsai S.W.: Thermal Conductivity of Unidirectional Materials. J. of Composite Mat., Vol. 1, No 2, 1967.
- [36] Touryan J.K.: Transient Temperature Variation in a Thermally Orthotropic Cylindrical Shell. AIAA J., 1964.
- [37] Truesdell C.: Rational Thermodynamics. Appendix 1. Mc Graw-Hill Book Co., New York 1969.
- [38] Vultz N., Angrist S.W.: Thermal Contact Resistance of Anisotropic Materials. J. Heat Trans., Vol. 12, 1970.
- [39] Wilson L.E., Nickell R.E.: Application of Finite Element Method to Heat Conduction Analysis. Nuc. Engng. Design., Vol. 4, 1966.
- [40] Wooster W.A.: Textbook on Crystal Physics. Cambridge University Press. Cambridge 1949.
- [41] Wooster W.A.: Doświadczalna fizyka kryształów. PWN, Warszawa 1961.
- [42] Żdanow G.S.: Fizyka ciała stałego. MGA, Moskwa 1966.

ОСНОВЫ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

К р а т к о е с о д е р ж а н и е

В работе приводятся математические и физические основы теплопроводности анизотропных сред, а в частности закон Фурье, рассматриваются вопросы, связанные с симметрией тензора теплопроводности, взаимными соотношениями между направлениями вектора теплового потока и градиента температуры, а также с тепловым контактным сопротивлением в анизотропных телах. Приводится дифференциальное уравнение теплопроводности с учетом соответствующего преобразования системы координат, обеспечивающего сведение анизотропных задач к изотропным. Дается также краткий обзор экспериментальных методов, используемых для определения составляющих тензора теплопроводности, а кроме того также и аналитических и численных методов, используемых при решении проблем анизотропной теплопроводности.

FUNDAMENTALS OF HEAT CONDUCTION IN ANISOTROPIC MEDIA

S u m m a r y

This paper discusses mathematical and physical fundamentals of heat conduction in anisotropic media dealing with Fourier's constitutive law, symmetry of conductivity tensor, mutual geometrical relations between heat flux vector and temperature gradient directions as well as the thermal contact resistance in anisotropic bodies. It presents heat conduction differential equation with an appropriate coordinate axis transformation enabling to transform anisotropic problems to isotropic ones. It gives also a short survey of the experimental methods used to determine the conductivity tensor components together with the analytical and numerical methods applied for finding solutions of anisotropic heat conduction problems.

Rękopis dostarczono w grudniu 1976 r.