BIULETYN INFORMACYJNY INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Nr 51 1978

mgr inż. Jerzy Banaszek

Instytut Techniki Cieplnej
Politechniki Warszawskiej

O PEWNYM SPOSOBIE ZBIERANIA SYMETRYCZNYCH MACIERZY RZADKICH W METODZIE ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH

W pracy przedstawiono efektywność zastosowania pewnej techniki zbierania symetrycznych macierzy rzadkich w rozwiązaniach chwilowych pól temperatur metodą elementów skończonych. Macierze "przewodności" i "pojemności cieplnej" pamiętane są w trzech jednowymiarowych tablicach: w dwóch całkowitych generowanych bezpośrednio z powiązań węzłowych elementów oraz w jednej rzeczywistej. Atrakcyjność proponowanej techniki zbierania macierzy rzadkich polega na znacznej oszczędności wymaganego pola pamięci oraz istotnym zmniejszeniu liczby komunikacji między centralną i zewnętrzną pamięcią komputera. Zastosowanie iteracyjnej metody Gaussa-Siedela do rozwiązania liniowego układu równań algebraicznych znacznie upraszcza proces przygotowania danych, ze względu na dowolność sposobu numeracji węzłów.

1. WSTĘP

Zastosowanie metod różnicowych lub elementów skończonych do problemów przewodnictwa prowadzi do układów równań algebraicznych, których macierze mają charakter pasmowy, co oznacza, iż zawierają znaczną liczbę elementów zerowych usytuowanych następująco:

$$a_{ij} = 0.0 \quad \text{dla} \quad \left.\begin{matrix} j > i+m \\ i > j+m \end{matrix}\right\}, \qquad (1)$$

gdzie: $i,j = 1,2,\ldots,n$ - liczba punktów siatki,
m - szerokość półpasma macierzy, równa liczbie nadprzekątnych.

Użycie metody różnic skończonych w geometrii jedno lub dwuwymiarowej jest szczególnie wygodne, gdyż prowadzi do zwartych macierzy trójdiagonalnych lub pięciodiagonalnych, dla których opracowano bardzo efektywne schematy eliminacji [1]. Są one jednak nieprzydatne w metodzie elementów skończonych, która daje w ogólnym przypadku znacznie szersze półpasmo. Wewnątrz pasma pojawiają się elementy zerowe, a ich ilość oraz szerokość wstęgi "m" zależne są tylko od powiązań węzłowych i od sposobu globalnej numeracji stopni swobody elementów.

Ponieważ szerokość półpasma "m" można określić jako maksymalną różnicę pomiędzy największym i najmniejszym numerem stopnia swobody w elemencie (w przypadku skalarnego pola temperatur - numerem węzła), właściwy dobór sposobu numeracji daje znacznie mniejsze "m", mniejszą liczbę elementów zerowych, a więc oszczędność pamięci i ograniczoną liczbę operacji komputera na elementach zerowych.

W ogólnym jednak przypadku dla nieregularnej geometrii obszaru nie można podać uniwersalnej metody właściwej numeracji, stąd proces optymalnego przygotowania danych jest żmudny i czasochłonny.

W ostatnich latach opracowano efektywne procedury dla zwartych schematów eliminacji Gaussa przy macierzach symetrycznych i pasmowych. Dopuszcza się w nich znaczne wielkości "m", co jest możliwe dzięki blokowemu zapisowi tablic w pamięci zewnętrznej [2], bądź jednoczesnemu procesowi generacji i eliminacji określonych wierszy macierzy [3].

Nie narzucają one w istocie żadnych ograniczeń na wielkość tablic, wymagają jednak znacznych czasów komputera ze względu na dużą liczbę komunikacji między pamięcią centralną a zewnętrzną. Jest to szczególnie istotne w problemach niestacjonarnych lub nieliniowych, gdzie układy równań są rozwiązywane wielokrotnie.

W zagadnieniach przewodzenia w ciałach stałych, gdzie poszukuje się wartości węzłowych pola skalarnego, rzadko liczba niewiadomych osiąga wartość kilku tysięcy, a w geometrii płaskiej czy osiowo-symetrycznej na ogół nie przekracza tysiąca. Dla takich przypadków przedstawiono sposób zbierania rzadkiej macierzy "przewodności" (w problemach niestacjonarnych także "pojemności cieplnej") przy użyciu techniki zbliżonej do zastosowanej przez Gustavsona dla dużych niesymetrycznych tablic [4]. Choć metoda eliminacji Gaussa jest szczególnie atrakcyjna dla dodatnio określonych macierzy symetrycznych, gdyż nie wymaga wyboru elementu głównego i zachowuje symetrię, to jednak zmiana charakteru rzadkiego tablicy przez wzrost elementów niezerowych w pasmie, preferuje metody iteracyjne, zwłaszcza przy bardziej wyrafinowanej technice zbierania tylko wyrazów niezerowych.

2. OPIS METODY

Zastosowanie dyskretyzacji przestrzennej i czasowej dla przybliżonego rozwiązania równania Fouriera prowadzi do algebraicznego układu równań liniowych

$$[A]\left\{\varphi\right\} = \left\{R\right\}, \tag{2}$$

gdzie: $\{\varphi\}$, $\{R\}$ – odpowiednio wektory węzłowych wartości temperatur i prawych stron równań.

W przypadku różnicowego przybliżenia pochodnych czasowych

$$\left\{\varphi(t+\Delta t)\right\} = \left\{\varphi(t)\right\} + \theta\Delta t\left\{\dot{\varphi}(t+\Delta t)\right\} + (1-\theta)\Delta t\left\{\dot{\varphi}(t)\right\}, \tag{3}$$

gdzie:

θ – parametr schematu niejawnego,

Δt – krok czasowy,

$\{\dot{\varphi}\}$ – wektor węzłowych wartości pochodnych czasowych temperatury,

a także w problemach ustalonych opisywanych równaniem Poissona macierz $[A]$ jest symetryczna, a nadto ma charakter pasmowy

$$A(I,J) = 0{,}0 \quad \text{dla} \quad |I-J| > m, \tag{4}$$

będący efektem wysoce zlokalizowanego udziału poszczególnych elementów w tablicach globalnych. W zestawieniu z pełną macierzą daje to redukcję liczby pamiętanych wyrazów z n^2 do $n(m+1)$ oraz liczby operacji komputera w procesie eliminacji Gaussa z $(\frac{n^3}{3} + n^2)$ do $(nm(m + 1) + 1(2m + 1)$.

Wewnątrz wstęgi "m" może jednak występować znaczna liczba zer, która zależną jest od charakteru powiązań węzłowych, a więc od sposobu numeracji stopni swobody układu.

Dla eliminacji tych zbędnych wyrazów zerowych dwuwymiarowa macierz symetryczna

$$A(I,J),$$

gdzie: $I = 1,2,\ldots,n$ – liczby stopni swobody układu,
$J = 1,2,\ldots,(m+1)$,

pamiętana jest przy użyciu trzech jednowymiarowych tablic.

Niezerowe wartości górnej części macierzy wraz z przekątną zbierane są wierszami do tablicy S(K), a bieżącą wartość indeksu K dla równania I wyraża wzór

$$K_I = \sum_{i=1}^{I-1} n_i + k , \tag{5}$$

gdzie:

n_i – powiększona o jeden liczba sąsiadów węzła "i" o globalnych numerach wyższych od "i", $k = 1,2,\ldots,n_I$.

Numery kolumn kolejnych wyrazów w S(K) gromadzone są w tablicy wskaźnikowej NWS(K), a położenie w niej wyrazów z głównej przekątnej określone przez

$$N_I = \sum_{i=1}^{I-1} n_i + 1 , \tag{6}$$

zapisuje się w ILE(I).

Technikę zapisu ilustruje przykład przedstawiony na rysunku 1.

	1	2	3	4	5	6	7	8
1	X		X		X			
2		X		X			X	
3	S		X	X	X			X
4		Y		X		X	X	
5			M		X	X	X	
6				E		X	X	
7					T		X	X
8						R.		X

NWS(K): 1,3,5,2,4,7,3,4,5,8,4,6,
7,5,6,7,6,7,7,8,8

ILE(N): 1,4,7,11,14,17,19,21

Rys. 1

Wymiary macierzy S(K) oraz NWS(K) są jednakowe i równe liczbie niezerowych wyrazów w górnej trójkątnej części macierzy A(I,J) wraz z przekątną, a więc

$$K_n = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} n_i \,, \tag{7}$$

zaś tablica ILE(N) zawiera tyle elementów, ile jest równań.

Tablice wskaźnikowe określające szkielet macierzy generowane są bezpośrednio z powiązań węzłowych elementów, które w omawianej metodzie numerycznej stanowią dane do programu. Opracowana procedura tworzy najpierw lokalną dwuwymiarową tablicę określającą elementy, do których należą kolejne węzły o numerze n, co pozwala uniknąć zbędnego, wielokrotnego sprawdzania powiązań węzłowych wszystkich podobszarów, na które podzielono przestrzeń.

Numery stopni swobody tych elementów są przeszukiwane, a do NWS(K) zapisywane te, które są większe lub równe aktualnemu n, i które nie były uprzednio wprowadzone.

Jeśli w rozważanym problemie występują warunki brzegowe Dirichleta (nieruchome stopnie swobody), to w momencie tworzenia szkieletu macierzy eliminowane są zbędne wiersze i kolumny (zapisywane w innych tablicach), a numery niewiadomych węzłowych ulegają przesunięciu.

Prezentowana metoda daje istotne zalety w postaci znacznych oszczędności pola pamięci, eliminacji operacji na elementach zerowych oraz dowolnego sposobu numeracji węzłów (tylko w przypadku iteracyjnego rozwiązania układu równań).

Dla oceny pierwszej z nich przedstawiono w tablicy 1 porównanie wielkości dwuwymiarowej macierzy pasmowej z optymalnie dobranym pasmem, z rozmiarami tablic w proponowanej metodzie.

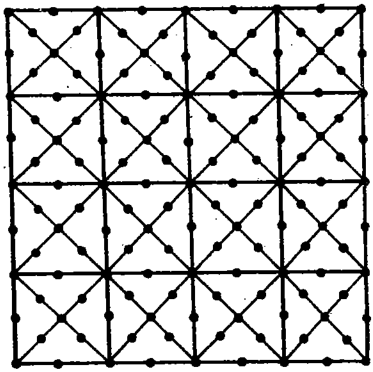
Tablica 1

Lp.	LICZBA RÓWNAŃ	PASMO	LICZBA ELEM. MACIERZY PASM.	LICZBA EL.RZECZ. S(K) ORAZ CAŁK. NWS(K) + ILE(N)	KROTNOŚĆ ZMNIEJSZENIA POLA PAMIĘCI
1	356	20	6480	1514 (R) 1838 (C)	2.143
2	1225	37	45325	5917 (R) 7142 (C)	3.471
3	2500	51	127500	12202 (R) 14698 (C)	4.739
4*)	145	33	4785	841 (R) 986 (C)	2.62

*) Dotyczy przykładu z rys. 2.

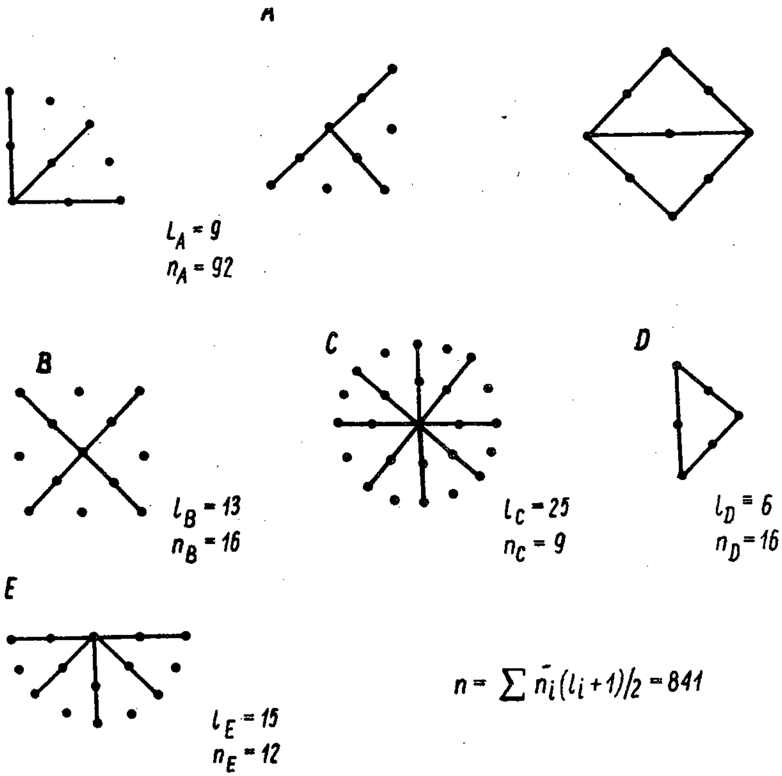
Użyto tu prostej siatki czterowęzłowych prostokątów w obszarze $\{(0.0 \leq x \leq L) \cap (0.0 \leq y \leq L)\}$ przy zmiennej liczbie podziałów wzdłuż obu osi, które determinowały określoną liczbę równań.

Relacje te będą inne, jeśli przy tej samej liczbie węzłów i tym samym obszarze użyje się innych elementów. Zależne też będą od liczby wymiarów geometrycznych, liczby stopni swobody i elementów schodzących się w węźle.



Liczba równań	145
Pasmo	33
Liczba elementów macierzy pasmowej	4785

KONFIGURACJE:



$$n = \sum n_i(l_i+1)/2 = 841$$

Rys. 2

Odpowiedź na pytanie jak duże rezerwować tablice S(K) oraz NWS(K) nie jest wcale oczywista, choć bardzo istotna, zwłaszcza gdy znajdujemy się na granicy możliwości pamięci operacyjnej komputera.

Wymiary ich bowiem zależą od konfiguracji elementów, do których należy dany węzeł, liczby węzłów o tym ustawieniu, liczby stopni swobody w elementach i obszarze, od jego brzegów (w sensie ile podobszarów schodzi się w punkcie brzegowym). Pod pojęciem konfiguracji rozumie się liczbę sąsiadów danego stopnia swobody w określonej siatce. Wielkości tablicy S(K) oraz NWS(K) można znaleźć przez prostą analizę siatki. Wygenerować z niej trzeba różne ustawienia sąsiadów węzła i skorzystać ze wzoru

$$K_n = \frac{1}{2}\sum_i n_i(l_i+1) , \tag{8}$$

gdzie

n_i oznacza liczbę punktów mających tę samą ilość sąsiadów, równą l_i.

Rysunek 2 pokazuje sposób wyselekcjonowania wzorców powiązań węzłowych na przykładzie elementów trójkątnych wyższego rzędu.

Na podstawie przedstawionych tu rozważań w Instytucie Techniki Cieplnej Politechniki Warszawskiej opracowano program COMES rozwiązujący liniowe równanie Fouriera w geometrii płaskiej i osiowo-symetrycznej metodą elementów skończonych z wykorzystaniem techniki macierzy rzadkich i iteracyjnej metody Gaussa-Siedela z nadrelaksacją (5).

BIBLIOGRAFIA

[1] Potter D.: "Computational Physics", John Wiley and Sons, London 1973.

[2] Wilson E.L.; Bathe K.J.; Doherty W.P.: "Direct Solution of Large Systems of Linear Equations", Computer and Structures, vol.4, pp 363-372, 1974.

[3] Irons B.M.; "A Frontal Solution Program for Finite Element Analysis", Int.J.Num.Meth.Eng. vol.2, pp 5-32,1970.

[4] Dahlquist G., Björk A.: "Numerical Methods", Prentice Hall Inc. New Yersey, 1969.

[5] Staniszewski B., Banaszek J.: "Zastosowanie elementów skończonych do rozwiązania równania Fouriera półdyskretną metodą Galerkina" (do publikacji).

О НЕКОТОРОЙ ТЕХНИКЕ СОСТАВЛЕНИЯ РЕДКИХ СИММЕТРИЧНЫХ МАТРИЦ ПО МЕТОДУ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ

Краткое содержание

Работа посвящается вопросу исследования эффективности применения некоторой техники составления симметричных редких матриц при решении задач, связанных с определением полей температур по методу конечных элементов. Матрицы "проводимости" и "теплоемкости" запоминаются в трех одномерных таблицах: двух полностью генерируемых непосредственно на основании узловых связей элементов и одной действительной. Привлекательность предлагаемой техники составления редких матриц заключается в значительной экономии требуемого поля памяти и в значительном сокращении числа коммуникаций между оперативной и внешней памятью электронно-вычислительной машины. Использование итерационного метода Гаусса-Зиделя для решения линейной системы алгебраических уравнений значительно упрощает процесс приготовления данных, что связано с произвольностью способа нумерования узлов.

ON CERTAIN TECHNIQUE OF THE STORING SPARSE SYMMETRIC MATRICES IN FINITE ELEMENT METHOD

Summary

An example of the application of the sparse matrix technique in the investigation of field problems using the finite element method is presented. This technique is very useful because of the considerable saving of computer storage and significant reducing of communication time between central and auxiliary memory units. In the case, when Gauss-Seidel iterative method is used the process of data preparation becomes very simple due to the fact, that the node numbering can be made in an arbitrary way.

Rękopis dostarczono w lutym 1978.