BIULETYN INFORMACYJNY
INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

WARSZAWA TEL. 215021 w. 32 i 48 NOWOWIEJSKA 25

Nr 5/K.T.M.C.5 maj 1966

Dr inż. Wiesław Gogół
Katedra Teorii Maszyn Cieplnych
Politechniki Warszawskiej

PRZEWODZENIE CIEPŁA W PRZYPADKU DUŻYCH GRADIENTÓW TEMPERATURY

Przedmiotem rozważań jest przewodzenie ciepła w ośrodku ciągłym, jednorodnym, izotropowym, o własnościach cieplnych (λ, c, ϱ) niezmiennych z temperaturą i pozbawionym wewnętrznych źródeł, przy czym dla uproszczenia rozpatrywane jest tylko zagadnienie jednowymiarowe w stanie ustalonym.

Prawo Fouriera

$$q = - \lambda \operatorname{grad} t \tag{1}$$

wiążące strumień cieplny q z gradientem temperatury t może być stwierdzone na drodze obserwacji rzeczywistego procesu przewodzenia ciepła, lub też wyprowadzone na drodze teoretycznej z zachowania się (kinetyki) odpowiedniego modelu ośrodka przewodzącego - modelem takim może być na przykład gaz molekularny o rozkładzie prędkości Maxwella, gaz elektronowy, gaz fononowy itp.

Uzasadnienie teoretyczne równania (1) wymaga na ogół założenia, że ośrodek znajduje się w stanie niezbyt odległym od stanu równowagi termodynamicznej, przy czym stopień odchylenia od stanu równowagi nie jest wyraźnie precyzowany; w związku z tym powstaje niejasność w określaniu stanów wyraźnie odbiegających od stanu równowagi i procesów przewodzenia ciepła związanych z takimi stanami.

Wydaje się, że jednym z mierników odchylenia od stanu równowagi ośrodka przewodzącego może być wielkość przestrzennego gradientu temperatury grad t (natężenia pola termicznego) jako siły termodynamicznej, wywołującej strumień q; procesy przewodzenia ciepła w ośrodku, którego stan nie może być uznany za bliski stanowi równowagi termodynamicznej, a zatem przy dużych gradientach temperatury proponuje się nazywać <u>intensywnymi</u> procesami przewodzenia ciepła*).

Zakłada się, że dla takich procesów temperatura posiada sens fizyczny i może być definiowana podobnie jak inne parametry intensywne w termodynamice procesów nieodwracalnych. Przez temperaturę danego elementu objętości ośrodka w danej chwili rozumie się wartość temperatury, jaka ustaliłaby się po wyizolowaniu w danej chwili danego elementu objętości i ustaleniu w nim stanu równowagi termodynamicznej; rozpatrywany element objętości ośrodka powinien być jak najmniejszy, jednakże na tyle duży, aby ośrodek można było uznać za ciągły.

Prawdopodobnie można założyć tak wielkie gradienty temperatury, że samo pojęcie temperatury może stać się trudne do zdefiniowania, jednakże takie zagadnienia przewodzenia pozostają poza zakresem niniejszych rozważań.

Należy również podkreślić, że empiryczne potwierdzenie słuszności liniowej zależności (1) zarówno w zagadnieniach przewodzenia ciepła w technice, jak też przede wszystkim przy doświadczalnym wyznaczaniu przewodności cieplnej i dyfuzyjności cieplnej odbywa się na ogół przy stosunkowo niewielkich gradientach temperatury. W niektórych jednak przypadkach przewodzenia ciepła, związanych ze współczesną techniką oraz pew-

---

*) Niniejszym komunikat stanowi fragment referatu o granicach stosowalności równania Fouriera, wygłoszonego przez autora na Zebraniu Naukowym Instytutu Techniki Cieplnej w W-wie w dn. 19.4.1966 r.

nych metodach wyznaczania własności cieplnych mogą występować tak duże gradienty temperatury, że wydaje się, iż dokładność równania Fouriera może stać się przedmiotem dyskusji.

W związku z powyższymi uwagami poszukiwana jest zależność opisująca przewodzenie ciepła i będąca dalszym i lepszym przybliżeniem do rzeczywistego procesu niż równanie (1) w oparciu o trzy następujące założenia:

1. Rozpatrywany jest proces przewodzenia ciepła bez efektów sprzężonych, dla którego strumień cieplny q zależy tylko od gradientu temperatury

$$q = q\,(\mathrm{grad}\ t)\,. \tag{2}$$

2. Dla $\mathrm{grad}\ t = 0$ również i $q = 0$.

3. Zgodnie z drugą zasadą termodynamiki strumień cieplny skierowany jest zawsze od obszarów o wyższej temperaturze do obszarów o niższej temperaturze.

Rozwijając funkcję $q\,(\mathrm{grad}\ t)$ na szereg potęgowy Maclaurina otrzymuje się

$$q = q(0) + \frac{1}{1!}\,\frac{dq(0)}{d(\mathrm{grad}\ t)}\,\mathrm{grad}\ t + \frac{1}{2!}\,\frac{d^2\,q(0)}{d(\mathrm{grad}\ t)^2}\,(\mathrm{grad}\ t)^2 + {} + \frac{1}{3!}\,\frac{d^3\,q(0)}{d(\mathrm{grad}\ t)^3}\,(\mathrm{grad}\ t)^3 + \ldots \tag{3}$$

W szeregu tym z założenia 2 pierwszy wyraz

$$q(0) = 0, \tag{4}$$

a z założenia 3 współczynnik przy $\mathrm{grad}\ t^2$ również musi mieć wartość zerową

$$\frac{d^2\,q(0)}{d(\mathrm{grad}\ t)^2} = 0, \tag{5}$$

w przeciwnym przypadku przy zmianie kierunku gradientu temperatury kierunek strumienia mógłby pozostać bez zmiany.

Pomijając pozostałe wyrazy szeregu (3) jako prawdopodobnie odgrywające coraz to mniejszą rolę otrzymuje się

$$q = \frac{dq(0)}{d(\mathrm{grad}\ t)}\ \mathrm{grad}\ t + \frac{1}{6}\ \frac{d^3q(0)}{d(\mathrm{grad}\ t)^3}\ (\mathrm{grad}\ t)^3\ . \tag{6}$$

Oznaczając

$$\frac{dq(0)}{d(\mathrm{grad}\ t)} = -\lambda \quad \text{i} \quad \frac{1}{6}\ \frac{d^3q(0)}{d(\mathrm{grad}\ t)^3} = -\lambda' \tag{7}$$

otrzymuje się

$$q = -\lambda\ \mathrm{grad}\ t - \lambda'(\mathrm{grad}\ t)^3\ , \tag{8}$$

albo

$$q = -\lambda\ \mathrm{grad}\ t\left[1 + \frac{\lambda'}{\lambda}(\mathrm{grad}\ t)^2\right]. \tag{9}$$

Równanie (8) mogłoby opisywać proces przewodzenia ciepła w przypadku dużych gradientów temperatury. Prawo Fouriera (1) jest więc tylko szczególnym przypadkiem ($\lambda' = 0$) bardziej ogólnej zależności wyrażonej równaniem (8).

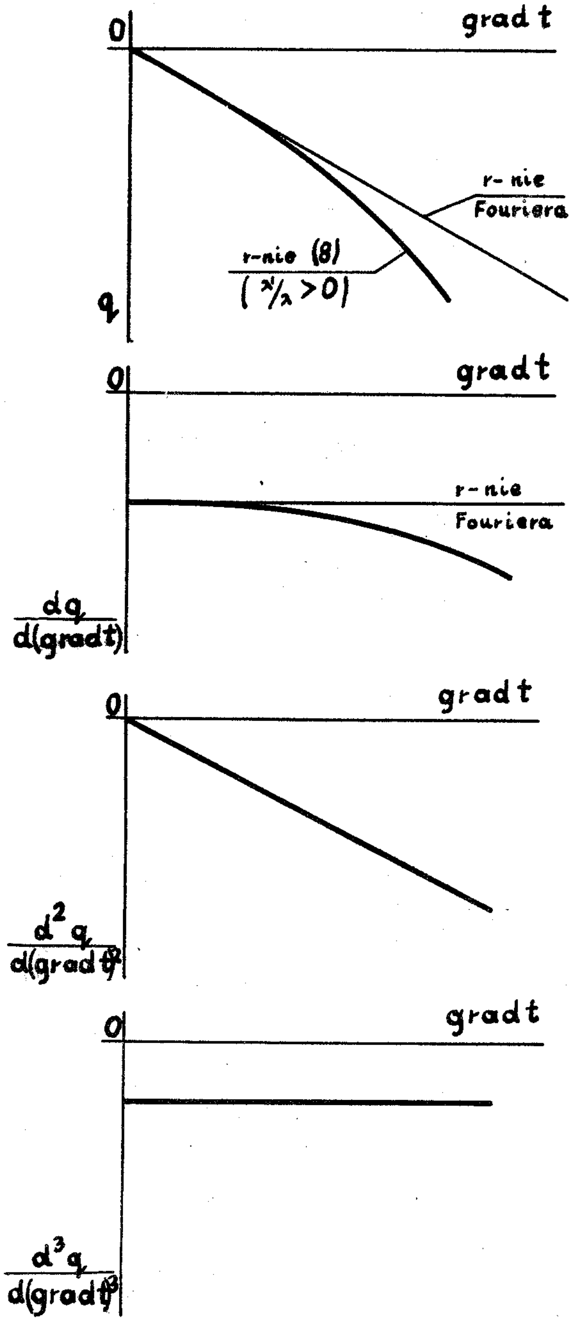
Na rys.1 pokazano przypuszczalną zależność odpowiednich pochodnych strumienia q względem grad t w funkcji gradientu temperatury, stanowiących współczynniki szeregu (3).

Wartość współczynnika $\lambda'\left[\frac{\mathrm{kcal\ m}}{\mathrm{h^oK^3}}\right]$ jest prawdopodobnie bardzo mała i dlatego przy umiarkowanych wielkościach gradientów temperatury równanie Fouriera opisuje z dużą dokładnością przewodzenie ciepła w zagadnieniach technicznych i fizycznych.

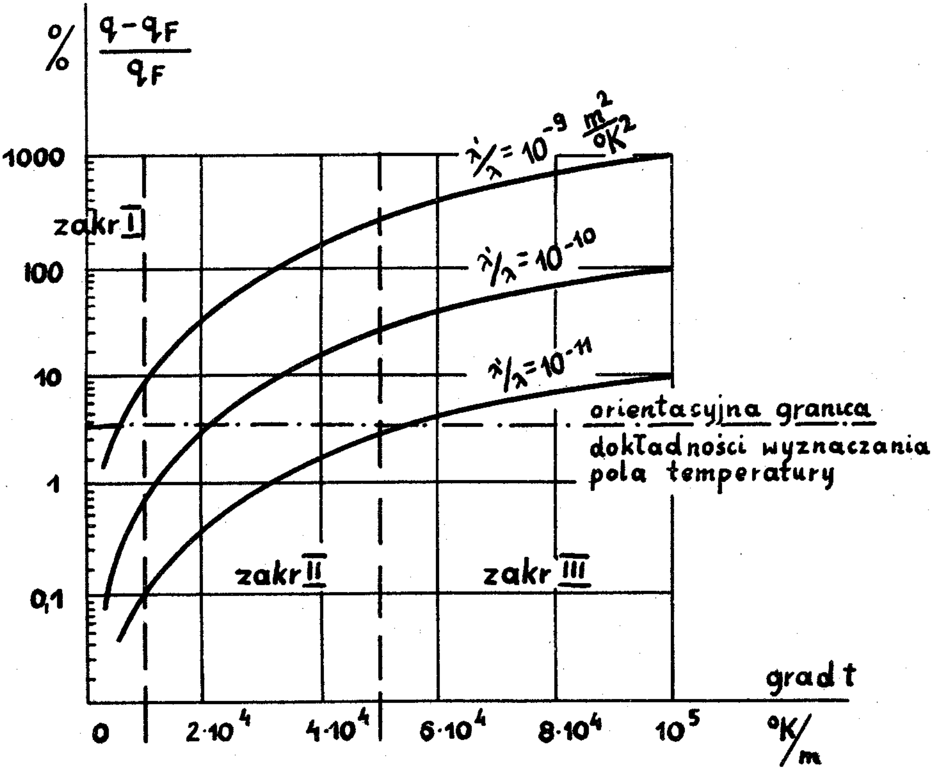
Wielkość λ' może być prawdopodobnie rozmaita dla różnych ciał (gazów, cieczy, metali, dielektryków i ich rodzajów), a jej określenie może nastąpić tylko na drodze doświadczalnej.

Jednakże można oszacować (na przykład dla dielektryków) maksymalną wartość stosunku $\frac{\lambda'}{\lambda}$, która nie powinna być większa od 10^{-9} $[\mathrm{m^2/^oK^2}]$, w przeciwnym przypadku bowiem wpływ wyrazu z trzecią potęgą gradientu temperatury byłby obserwowany dość często.

Na rys.2 pokazano wielkości błędu, jakie mogłyby być spowodowane stosowaniem równania Fouriera przy dużych gradientach temperatury w zależności od przypuszczalnych wartości stosunków $\frac{\lambda'}{\lambda}$. Na wykresie zaznaczono orientacyjnie trzy



Rys.1. Przypuszczalna zależność współczynników szeregu(3) od gradientów temperatury (szereg ograniczony do 4 wyrazów)



Rys.2. Wielkość błędu w % w określaniu strumienia cieplnego q_F według prawa Fouriera i q według równania (8) w zależności od gradientu temperatury i przypuszczalnych wartości $\frac{\lambda'}{\lambda}$ (dla dielektryków)

zakresy (granice ich są tylko bardzo przybliżone i zależą od różnych czynników):

- zakres I gradientów temperatury często występujących w technice, w którym obserwuje się zgodność w granicach błędu z prawem Fouriera;
- zakres II, w którym mogłoby wystąpić wyraźne odchylenie od prawa Fouriera zgodnie z zależnością (8)(przy założonych wartościach $\frac{\lambda'}{\lambda}$),
- zakres III gradientów na ogół nie spotykanych w badaniach doświadczalnych.

Zatem przez intensywne procesy przewodzenia ciepła można rozumieć takie procesy, w których nie wystarcza w granicach błędów pomiarowych lub obliczeniowych liniowa zależność strumienia od gradientu temperatury, zgodna z prawem Fouriera, a konieczne staje się uwzględnienie efektu opisywanego równaniem (8).

Należy z całym naciskiem podkreślić, że przedstawione tutaj rozważania są tylko hipotezą, która wymaga potwierdzenia doświadczalnego. Badania doświadczalne pozwoliłyby albo wyznaczyć dla określonych materiałów wartości λ' albo też stwierdzić dla tych materiałów przy odpowiednich gradientach temperatury zaniedbywalnie małą wartość stosunku $\frac{\lambda'}{\lambda}$ (na przykład przy 500 $^{o}K/cm$ $\frac{\lambda'}{\lambda} < 10^{-12}$ $m^2/{}^{o}K^2$), co pozwoliłoby uściślić i jasno zdefiniować granice stosowalności równania Fouriera.

Badania doświadczalne w tym zakresie prowadzone są od pewnego czasu w Pracowni Parametrów Cieplnych Instytutu Techniki Cieplnej w Warszawie.