

BIULETYN INFORMACYJNY

INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ

POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

WARSZAWA

TEL. 215021 w. 32 i 48

NOWOWIEJSKA 25

Nr 2/K.T.M.C.2

październik 1965

Mgr inż. Stanisław Chróściel
Katedra Teorii Maszyn Ciepłych

NIEUSTALONE POLE TEMPERATURY W CIENKIM PRĘCIE UMIESZCZONYM
W OŚRODKU O ZMIENNEJ TEMPERATURZE, PRZY ZMIENNYM WSPÓŁCZYNNIKU
PRZEJMOWANIA CIEPŁA I PRZY OBECNOŚCI PROMIENIOWANIA

Przy pomiarach turbulencji prędkości oraz przy pomiarach szybkozmiennych temperatur stosuje się druty oporowe, lub termoelementy rozpięte pomiędzy sztywnymi podstawkami. W bardziej ogólnym przypadku wymiana ciepła pomiędzy takim przetwornikiem a badanym ośrodkiem odbywa się przy zmiennym współczynniku przejmowania ciepła i przy zmiennej temperaturze ośrodka.

W dostępnej literaturze nie ma rozwiązania równania nieustalonego przewodnictwa cieplnego przy zmiennym α i zmiennej temperaturze ośrodka.

W niniejszym artykule podano rozwiązanie tego problemu dla przetwornika o dużej smukłości, tzn. o dużym stosunku długości do wymiaru poprzecznego, co pozwoliło na przyjęcie braku gradientu temperatury na przekroju poprzecznym. Przyjęto także stałość własności fizycznych materiału przetwornika.

Zagadnienie rozwiązane poniżej można więc sformułować następująco:

Cienki, jednorodny pręt o długości $2l$, stałym przekroju s i obwodzie p , znajduje się w ograniczonym ścianami ośrodkiem gazowym o zmiennej w czasie temperaturze $T_p(t)$. Wymiana ciepła na powierzchni bocznej pręta odbywa się przez konwekcję i pro-

mieniowanie. Współczynnik przejmowania ciepła drogą konwekcji $\alpha(t)$ jest funkcją czasu. Końce pręta mają stałe temperatury T_0 , początkowy rozkład temperatury w pręcie jest $f(x)$. Gęstość materiału pręta ρ , jego ciepło właściwe c oraz współczynnik przewodnictwa cieplnego λ są znane i stałe.

Zakładając początek osi współrzędnych x , pokrywającej się z osią pręta, na połowie długości pręta, można zestawić bilans cieplny w jednostce czasu dla elementu pręta o długości dx .

Ciepło wymienione przez konwekcję

$$q = p \alpha(t) \left[T_f(t) - T_p(x, t) \right] dx, \quad (1)$$

$T_p(x, t)$ - temperatura pręta.

Ciepło przewodzone wzdłuż osi pręta

$$q = s \lambda \frac{\partial^2 T_p(x, t)}{\partial x^2} dx. \quad (2)$$

Ciepło wymieniane przez promieniowanie

$$q_r = \varepsilon \sigma p \left[(1 - A_f) T_w^4 + \varepsilon_f T_f(t)^4 - T_p(x, t)^4 \right], \quad (3)$$

gdzie ε - emisyjność powierzchni pręta,

σ - stała Stefana-Boltzmana,

A_f - współczynnik absorpcji promieniowania dla gazu,

T_w - temperatura ścian przy założeniu, że są one doskonałe czarne,

ε_f - emisyjność gazu.

Ciepło idące na zmianę energii wewnętrznej elementu pręta

$$q_u = s \rho c \frac{\partial T_p(x, t)}{\partial t} dx. \quad (4)$$

W zależnościach (1), (2), (3), (4) użyto od razu pochodne cząstkowe, zakładając a priori $T_p = T_p(x, t)$.

Zgodnie z przyjętymi powyżej znakami strumieni cieplnych bilans dla elementu pręta przedstawia się następująco

$$q_u = q_\alpha + q_\lambda + q_r. \quad (5)$$

Jeżeli założy się, że $[T_f(t) - T_p(x, t)]/T_f(t) \ll 1$ i uwzględniając (1), (2), (3), (4) i (5) otrzymuje się równanie

$$\frac{\partial T_p(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + f_1(t) [f_2(t) - T_p(x, t)], \quad (6)$$

gdzie

$$f_1(t) = \frac{p\alpha(t) + 4\varepsilon\sigma_p T_f(t)^3}{s\varphi c}, \quad (7)$$

$$f_2(t) = T_f(t) + \frac{\varepsilon\sigma T_f(t)^4}{\alpha(t) + 4\varepsilon\sigma T_f(t)^3} \left\{ (1 - A_f) \left[\frac{T_w}{T_f(t)} \right]^4 - (1 - \varepsilon_f) \right\}. \quad (8)$$

Wprowadzając nową zmienną

$$T(x, t) = T_p(x, t) - T_0 \quad (9)$$

można doprowadzić równanie (6) do postaci

$$\frac{\partial T(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 T(x, t)}{\partial x^2} + f_1(t) [f_2(t) - T_0 - T(x, t)], \quad (10)$$

przy warunkach brzegowych

$$T(1, t) = T(-1, t) = 0 \quad (11)$$

i warunku początkowym

$$T(x, 0) = f(x) - T_0. \quad (12)$$

Wprowadzając nową zmienną

$$U(x, t) = T(x, t) \exp \left[\int_0^t f_1(\theta) d\theta \right] \quad (13)$$

oraz przyjmując

$$z(t) = f_1(t) [f_2(t) - T_0] \exp \left[\int_0^t f_1(\theta) d\theta \right] \quad (14)$$

otrzymuje się równanie

$$\frac{\partial U(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 U(x, t)}{\partial x^2} + z(t), \quad (15)$$

$$U(1, t) = U(-1, t) = 0 \quad (16)$$

oraz

$$U(x, 0) = f(x) - T_0. \quad (17)$$

W celu rozwiązania zagadnienia brzegowego (15) można oprzeć się na następującym twierdzeniu: Rozwiązanie równania niejednorodnego (15) z warunkami (16) i (17) jest sumą rozwiązania równania niejednorodnego (15), przy zerowych warunkach i rozwiązania równania jednorodnego, przy warunkach (16) i (17).

W związku z tym rozpatrzone zostaje równanie

$$\frac{\partial W(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 W(x, t)}{\partial x^2} + x(t) \quad (18)$$

z warunkami

$$W(1, t) = W(-1, t) = W(x, 0) = 0. \quad (19)$$

Stosując do (18) przekształcenie Laplace'a, wg którego oryginał funkcji przedstawia się jako

$$f(\xi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\infty}^{\sigma+i\infty} F(s) \exp s \xi d\xi, \quad (20)$$

a transformata

$$F(s) = L[f(\xi)] = \int_0^{\infty} f(\xi) \exp(-s\xi) d\xi, \quad (21)$$

otrzymuje się

$$U''(x, s) - \frac{s}{a} [U(x, s) - \frac{K(s)}{s}] = 0, \quad (22)$$

tutaj

$$K(s) = L[x(t)], \quad a \quad U(x, s) = L[U(x, t)]$$

Po uwzględnieniu warunków brzegowych (19)

$$U(x, s) = \frac{K(s)}{s} - \frac{K(s)}{s} \frac{\cosh \sqrt{\frac{s}{a}} x}{\cosh \sqrt{\frac{s}{a}} 1}. \quad (23)$$

Stosując twierdzenie o splocie funkcji, tzn. jeżeli

$$F(s) = F_1(s) F_2(s) ,$$

$$L^{-1}[F_1(s)] = \varphi_1(t)$$

$$L^{-1}[F_2(s)] = \varphi_2(t) ,$$

to

$$L^{-1}[F(s)] = L^{-1}[F_1(s)F_2(s)] = \int_0^t \varphi_1(t - \theta) \varphi_2(\theta) d\theta \quad (24)$$

można dla wyrażenia

$$\frac{K(s) \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} x}{s \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} 1}$$

znaleźć oryginał, posługując się oryginałami wyrażen $K(s)$ i $\cosh \sqrt{\frac{s}{a}} x / s \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} 1$. Jeżeli

$$\frac{\cosh \sqrt{\frac{s}{a}} x}{s \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} 1} = \frac{\phi(s)}{\psi(s)} , \quad (25)$$

to można oprzeć się tu na znanym twierdzeniu rozkładu

$$L^{-1} \left[\frac{\phi(s)}{\psi(s)} \right] = \sum_{n=1}^k \left[\frac{\phi(s_n)}{\psi'(s_n)} \right] \exp s_n t , \quad (26)$$

gdzie s_n jest pierwiastkiem prostym $\psi(s) = 0$.

Równanie

$$s \cosh \sqrt{\frac{s}{a}} 1 = 0$$

ma pierwiastki

$$s = 0$$

oraz

$$s_n = -\mu_n^2 \frac{a}{1^2} ,$$

przy czym

$$\mu_n = (2n - 1) \frac{\pi}{2} .$$

Uwzględniając ponadto, że

$$L^{-1}\left[\frac{K(s)}{s}\right] = \int_0^t x(\theta) d\theta \quad (27)$$

otrzymuje się

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} (-1)^{n+1} \cos \mu_n \frac{x}{l} \int_0^t x(\theta) \exp\left[-\mu_n^2 \frac{a}{l^2} (t-\theta)\right] d\theta \quad (28)$$

Zagadnienie brzegowe

$$\frac{\partial V(x, t)}{\partial t} = a \frac{\partial^2 V(x, t)}{\partial x^2} \quad (29)$$

przy warunkach brzegowych

$$V(l, t) = V(-l, t) = 0 \quad (30)$$

oraz warunku początkowym

$$V(x, 0) = f(x) - T_0 \quad (31)$$

ma rozwiązanie [3]

$$V(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \mu_n \frac{x}{l} \exp\left[-\mu_n^2 \frac{at}{l^2}\right] \cdot \frac{2}{l} \int_0^l [f(x) - T_0] \cos \mu_n \frac{x}{l} dx \quad (32)$$

Rozwiązanie więc zagadnienia brzegowego (15) przy warunkach (16) i (17) ma postać

$$U(x, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \mu_n \frac{x}{l} \exp\left(-\mu_n^2 \frac{at}{l^2}\right) \left\{ \frac{2}{\mu_n} (-1)^{n+1} \int_0^t x(\theta) \exp\left(\mu_n^2 \frac{a}{l^2} \theta\right) d\theta + \frac{2}{l} \int_0^l [f(x) - T_0] \cos \mu_n \frac{x}{l} dx \right\} \quad (33)$$

Uwzględniając zależności (13) i (14) oraz (9) otrzymuje się równanie pola nieustalonej temperatury dla pręta w warunkach sformułowanych na wstępie

$$T_p(x, t) - T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \cos \mu_n \frac{x}{l} \exp \left[- \int_0^t f_1(\theta) d\theta - \mu_n^2 \frac{at}{l^2} \right] \cdot$$

$$\cdot \left\{ \frac{2}{\mu_n} (-1)^{n+1} \int_0^t f_1(\theta) \left[f_2(\theta) - T_0 \right] \exp \left[\int_0^\theta f_1(t') dt' + \mu_n^2 \frac{a\theta}{l^2} \right] d\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{2}{l} \int_0^l \left[f(x) - T_0 \right] \cos \mu_n \frac{x}{l} dx \right\}. \quad (34)$$

Jeżeli początkowy rozkład temperatury w przecie $f(x, 0) = T_0$, to

$$T_p(x, t) - T_0 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2}{\mu_n} (-1)^{n+1} \cos \mu_n \frac{x}{l} \exp \left[- \int_0^t f_1(\theta) d\theta - \mu_n^2 \frac{at}{l^2} \right] \cdot$$

$$\cdot \int_0^t f_1(\theta) \left[f_2(\theta) - T_0 \right] \exp \left[\int_0^\theta f_1(t') dt' + \mu_n^2 \frac{a\theta}{l^2} \right] d\theta. \quad (35)$$

Średnia temperatura pręta w ostatnim przypadku wyrazi się następująco

$$T_p(t) - T_0 = \frac{2}{\mu_n} \exp \left[- \int_0^t f_1(\theta) d\theta - \mu_n^2 \frac{at}{l^2} \right] \cdot$$

$$\cdot \int_0^t \left\{ f_1(\theta) \left[f_2(\theta) - T_0 \right] \exp \left[\int_0^\theta f_1(t') dt' + \mu_n^2 \frac{a\theta}{l^2} \right] \right\} d\theta.$$

W ogólnie dostępnej literaturze np. [3], [4] podawane są rozwiązania równania (15) przy różnych postaciach $x(t)$.

Uwzględniając fakt, że w omawianym przypadku

$$x(t) = f_1(t) \left[f_2(t) - T_0 \right] \exp \int_0^t f_1(\theta) d\theta$$

łatwo zauważyć, że rozwiązanie analityczne dla zależności (34) i (35) jest możliwe tylko przy pewnych, odpowiednio prostych postaciach $f_1(t)$, $f_2(t)$ i $x(t)$. Dla przykładu postaci $x(t)$,

dla których istnieją względnie proste rozwiązania analityczne są następujące [3], [4].

$$\chi(t) = \text{const.},$$

$$\chi(t) = W_0 t^{\frac{1}{2}n} \quad (n = -1, 0, 1, 2 \dots),$$

$$\chi(t) = W_0 \exp(-kt).$$

Zależności (34) i (35), poza nielicznymi jak widać postaciami $f_1(t)$ i $f_2(t)$, mogą być stosowane tylko do obliczeń numerycznych przy użyciu maszyn cyfrowych.

Zaznaczyć należy, że funkcje $f_1(t)$, $f_2(t)$ oraz $\chi(t)$ mają pewne ograniczenia; dyskusja ich postaci wykracza poza zakres niniejszej pracy.

BIBLIOGRAFIA

1. Smirnow W.J.: Matematyka wyższa. Tom II; Tom IV część 2. P.W.N. Warszawa 1962.
2. Tichonow A.N., Samarski A.A.: Równania fizyki matematycznej. P.W.N., Warszawa 1963.
3. Łykov A.W.: Teorija tieploпроводности. Gasudarstwiennoje Izdatielstwo Tiechniko-Tieoreticzeskoj Literatury. Moskwa 1952.
4. Carslaw H.S., Jaeger J.C.: Conduction of Heat in Solids. Oxford, 1962.