

# BIULETYN INFORMACYJNY

## INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ

### POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

WARSZAWA

TEL. 21007 w. 1232 i 1248

NOWOWIEJSKA 25

Nr 19/K.T.M.C. 16

kwiecień 1969

Dr inż. Wiesław Gogół  
Katedra Teorii Maszyn Ciepłych  
Politechniki Warszawskiej

#### OKREŚLANIE ROZKŁADU TEMPERATURY W CIĄGŁYCH OŚRODKACH ASYMETRYCZNOTROPOWYCH

##### 1 Wstęp

Rozważany jest ciągły jednowymiarowy ośrodek asymetrycznotropowy w stanie ustalonym; przewodność cieplna zależy od temperatury, przy czym współczynnik temperaturowy jest funkcją miejsca (niejednorodność ośrodka).

W ośrodku takim, jak wykazano w pracy [1], przy zmianie kierunku przepływu strumienia cieplnego występuje efekt asymetrii strumieni ciepłych. Zmiana kierunku strumienia może być dokonana przez odwrócenie płyty nieograniczonej w niezmiennym zewnętrznym polu termicznym, albo (co jest równoznaczne) przez zmianę kierunku zewnętrznego pola termicznego bez odwracania płyty.

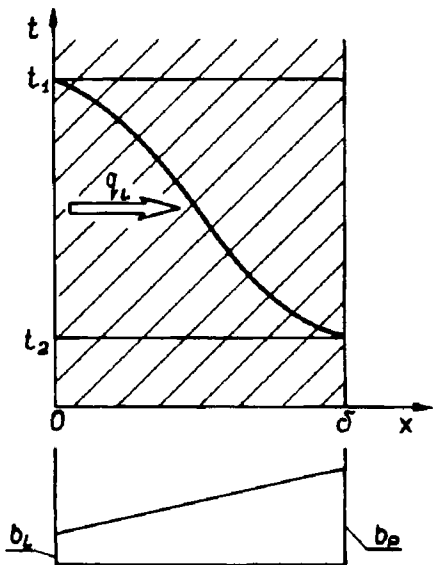
Wzory opisujące pole temperatury i strumienie ciepłe otrzymano analitycznie przez całkowanie równania Fouriera w pracy [1].

W przypadku przepływu ciepła od powierzchni L do powierzchni P ośrodka (rys.1) przewodność cieplna jest

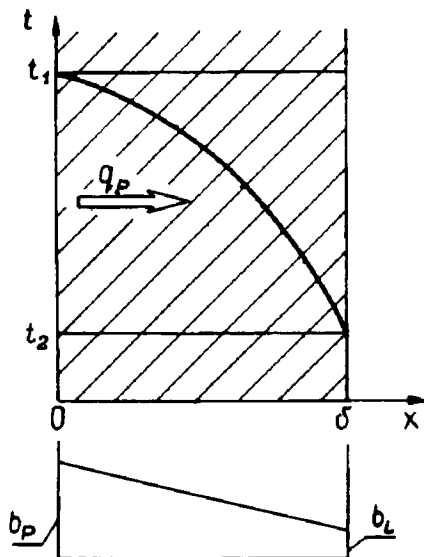
$$\lambda(x, t) = \lambda_L [1 + b_L (1 + \beta x) t]. \quad (1)$$

Pole temperatury [1]

$$1 + \beta x = e^{\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_L} (t_1^2 - t^2)} \left[ 1 - \frac{\lambda_L \beta}{q_L} e^{-\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_L} t_1^2} \int_{t_1}^t e^{-\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_L} u^2} du \right]. \quad (2)$$



Rys.1



Rys.2

Strumień ciepły  $q_L$

$$1 + \beta \delta = e^{\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_L} (t_1^2 - t_2^2)} \left[ 1 - \frac{\lambda_L \beta}{q_L} e^{-\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_L} t_1^2} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_L} u^2} du \right]. \quad (3)$$

Po odwróceniu płyty w zewnętrznym polu termicznym strumień ciepły  $q_P$  skierowany jest od powierzchni P do powierzchni L ośrodka (rys.2).

Przewodność cieplna

$$\lambda(x, t) = \lambda_L \left[ 1 + b_L (1 + \beta \delta) \left( 1 - \frac{\beta}{1 + \beta \delta} x \right) t \right]. \quad (4)$$

Pole temperatury [1]

$$1 - \frac{\beta}{1 + \beta\delta} x = e^{-\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_p} (t_1^2 - t^2)} \left[ 1 + \frac{\lambda_L}{q_p} \frac{\beta}{1 + \beta\delta} e^{\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_p} t_1^2} \int_{t_1}^t e^{-\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_p} u^2} du \right]. \quad (5)$$

Strumień ciepły  $q_p$

$$\frac{1}{1 + \beta\delta} = e^{-\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_p} (t_1^2 - t_2^2)} \left[ 1 + \frac{\lambda_L}{q_p} \frac{\beta}{1 + \beta\delta} e^{\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_p} t_1^2} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_p} u^2} du \right]. \quad (6)$$

Wyrażenia (3) i (6), opisujące strumienie ciepłne oraz wzory (2) i (5) na pole temperatury, są dość złożone; do obliczenia pola temperatury powinien być uprzednio wyznaczony strumień ciepły.

W niniejszej pracy przedstawiono metody obliczania rozkładu temperatury w ciągłym ośrodku asymetrycznotropowym. Poniżej zostaną omówione dwie metody: analityczna i numeryczna.

Z uwagi na konieczność porównywania wyników otrzymywanych tymi metodami oraz w celu jaśniejszej ilustracji sposobu obliczeń przyjęto pewien przykład obliczeniowy. Temperatury mogą być traktowane jako temperatury zredukowane (bezwymiarowe). Wszystkie wielkości są przyjęte w jednym (dowolnym) układzie wymiarowym, dzięki czemu mogą być podawane jako niemianowane.

Własności ciepłne ośrodka, a w szczególności współczynnik  $\beta$  charakteryzujący jego niejednorodność, przyjęto takie, aby pola temperatur przy zmianie kierunku strumienia różniły się wyraźnie.

Obliczenia przeprowadzono przy następujących założeniach:

$$t_1 = t_{x=0} = 1; \quad t_2 = t_{x=\delta} = t_{x=1} = 0; \quad \delta = 1; \quad (7)$$

$$\lambda_L = 1; \quad b_L = 1; \quad \beta = 9. \quad (8)$$

Przewodność ciepła  $\lambda_L = 1$  oznacza jednocześnie przewodność ciepłą w całym obszarze ośrodka (od  $x = 0$  do  $x = 1$ ) przy zerowej wartości temperatury (początek zakresu linearyzacji [1]).

## 2. Metoda analityczna obliczania rozkładów temperatury

### 2.1. Obliczanie strumieni $q_L$ i $q_p$

Strumienie  $q_L$  i  $q_p$  mogą być wyznaczone z równań (3) i (6), jednakże występują one w tych równaniach w postaci uwiłkanej. Równania zostaną rozwiązane metodą graficzną. Lewe strony równań mają wartości stałe, a prawe strony są funkcjami  $q_L$  lub  $q_p$ .

W celu określenia pierwszego przybliżenia wartości strumienia przyjęto rozkład temperatury zgodny z prawem Fouriera w jednorodnej płycie nieograniczonej o przewodności cieplnej niezależnej od temperatury, tzn. zgodnie z (7)

$$t(x) = 1 - x. \quad (9)$$

W przypadku strumienia  $q_L$  średnia wartość przewodności cieplnej przy powyższym założeniu

$$\begin{aligned} \bar{\lambda} &= \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \lambda(x, t) dt = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \lambda_L [1 + b_L (1 + \beta x) t] dt = \\ &= \int_0^1 \{1 + [1 + 9(1 - t)]t\} dt = 3,0. \end{aligned} \quad (10)$$

Pierwsze przybliżenie wartości  $q_L$

$$q_L^1 = \frac{\bar{\lambda}}{\delta} (t_1 - t_2) = 3,0. \quad (11)$$

Podobnie w przypadku strumienia  $q_p$

$$\bar{\lambda} = \frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} \lambda_L [1 + b_L (1 + \beta \delta) (1 - \frac{\beta}{1 + \beta \delta} x) t] dt = 4,5. \quad (12)$$

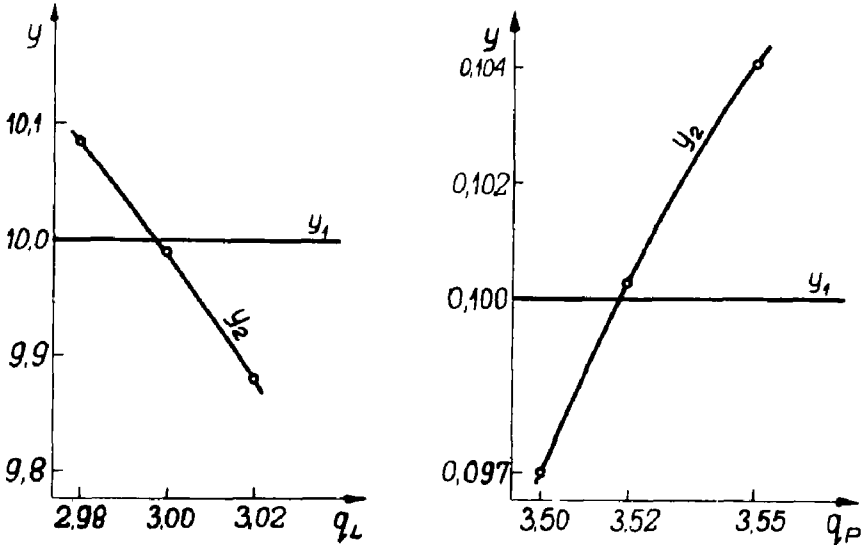
Pierwsze przybliżenie wartości  $q_p$

$$q_p^1 = \frac{\bar{\lambda}}{\delta} (t_1 - t_2) = 4,5. \quad (13)$$

Dokładniejsze wartości spełniające równania (3) i (6) otrzymano zakładając kolejno pewne wartości strumieni i rozwiązując te równania graficznie (rys.3).

Ostatecznie przyjęto

$$q_L = 3,00; \quad q_P = 3,52. \quad (14)$$



Rys.3. Wyznaczanie strumieni  $q_L$  i  $q_P$  przez graficzne rozwiązanie równań (3) i (6);  $y_1$  oznacza lewą stronę równania,  $y_2$  oznacza prawą stronę równania

## 2.2. Obliczanie rozkładu temperatury

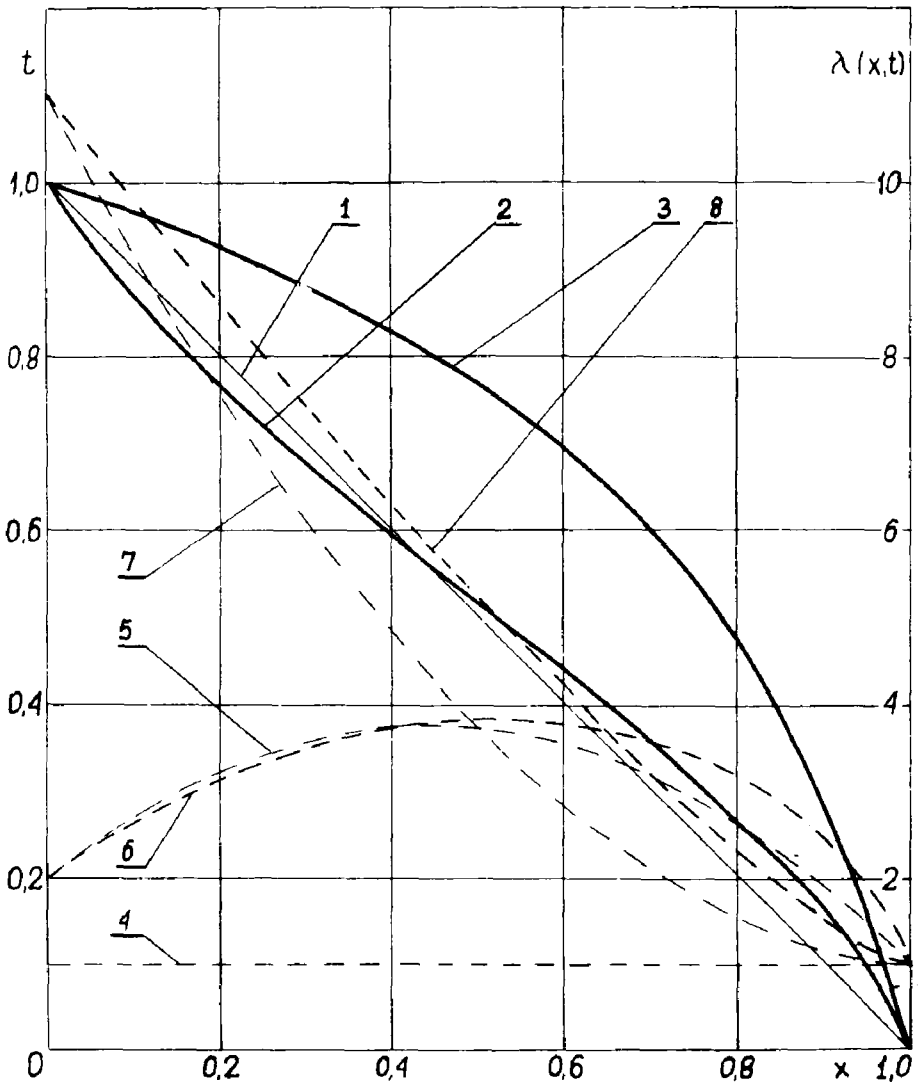
Rozkład temperatury obliczony był wg wzorów (2) i (5).

Do obliczenia całek  $\int_1^t e^{-au^2} du$  korzystano z tablic funkcji erf x [3].

Całki  $\int_1^t e^{au^2} du$  obliczano metodą przybliżoną wzorem Simpsona, dlatego dogodniej było wyznaczać funkcję odwrotną  $x(t)$ .

Niektóre wyniki obliczeń przedstawiono w tabelicy 1, a rozkłady temperatur na rys.4

Rozkład temperatury w płycie różni się zasadniczo przy zmianie kierunku strumienia ciepła. Na rys. 4 podano również wartości  $\lambda(x, t)$  przy wartościach  $t(x)$  według tabelicy 1 oraz przy założeniach (9), (10) i (12).



Rys.4. Rozkład temperatury w ośrodku asymetrycznotropowym obliczony analitycznie: 1 - rozkład temperatury w ośrodku jednorodnym o przewodności cieplnej niezależnej od temperatury według równania (9); 2 - rozkład temperatury w ośrodku asymetrycznotropowym przy strumieniu  $q_L = 3,00$ ; 3 - rozkład temperatury w ośrodku asymetrycznotropowym po odwróceniu płyty przy strumieniu  $q_p = 3,52$ ; 4 - przewodność cieplna niezależna od temperatury w płycie jednorodnej; 5 - przewodność cieplna w płycie przy strumieniu  $q_L$  według rozkładu temperatury określonego wzorem (9); 6 - przewodność cieplna w płycie przy strumieniu  $q_L$  według rozkładu temperatury 2; 7 - przewodność cieplna w płycie przy strumieniu  $q_p$  według rozkładu temperatury określonego wzorem (9); 8 - przewodność cieplna w płycie przy strumieniu  $q_p$  według rozkładu temperatury 3

Tablica 1

t	$q_L$	$q_P$
	x(t)	x(t)
1,0	0	0
0,9	0,075	0,2655
0,8	0,1666	0,457
0,7	0,2745	0,595
0,6	0,3945	0,702
0,5	0,522	0,790
0,4	0,649	0,844
0,3	0,767	0,895
0,2	0,871	0,936
0,1	0,950	0,970
0	1	1

### 3. Metoda numeryczna obliczania rozkładu temperatury

W celu sprawdzenia otrzymanych wyników (tabl. 1, rys.4) i prawidłowości wzorów (2), (3), (5), (6) oraz ułatwienia ewentualnych obliczeń przy użyciu maszyny cyfrowej opracowano metodę numeryczną obliczenia rozkładu temperatury w ośrodkach asymetrycznotropowych; metoda ta jest oparta na metodzie kolejnych przybliżeń Adamsa [2].

Metoda numeryczna może być łatwo stosowana, jeśli zostały uprzednio określone wartości strumieni  $q_L$  i  $q_P$  równaniami (3) i (6). W dalszym ciągu przyjęto zgodnie z (14) wartości  $q_L = 3,00$  i  $q_P = 3,52$ .

Płyta nieograniczona została podzielona na  $n$  równych przedziałów, przy czym w każdym przedziale funkcja  $t(x)$  jest aproksymowana za pomocą wielomianów stopnia drugiego. Jeśli znana jest temperatura w punkcie  $x = k$ , to temperatura w punkcie  $x = k + 1$  będzie

$$t_{x=k+1} = t_{x=k} + \left[ \left( \frac{dt}{dx} \right)_{x=k} + \frac{\left( \frac{dt}{dx} \right)_{x=k} - \left( \frac{dt}{dx} \right)_{x=k-1}}{2} \right] h, \quad (15)$$

gdzie krok siatki  $h = \frac{\zeta}{n}$ .

Wzór (15) może być stosowany dopiero od  $x = 2h$ .

Temperatura na granicy płyty jest znana

$$t_{x=0} = t_1 = 1. \quad (16)$$

W otoczeniu punktu  $x = 0$  funkcja  $t(x)$  może być rozwinięta na szereg Taylora

$$t(x) = t_{x=0} + \left( \frac{dt}{dx} \right)_{x=0} (x-0) + \frac{1}{2} \left( \frac{d^2t}{dx^2} \right)_{x=0} (x-0)^2 + \dots \quad (17)$$

Temperatura w punkcie  $x = h$  może być obliczona wg szeregu (17), a temperatura w punkcie  $x = 2h$  i w następnych punktach wzoru (15).

Gradient temperatury w każdym punkcie może być obliczony z równania Fouriera i wyrażenia (1) lub (4) określającego przewodność cieplną  $\lambda(x, t)$ .

Dla strumienia  $q_L = 3,00$  zgodnie z (1) gradient temperatury jest

$$\frac{dt}{dx} = - \frac{q_L}{\lambda_L \left[ 1 + b_L (1 + \beta x) t \right]}. \quad (18)$$

Dla strumienia  $q_P = 3,52$ , zgodnie z (4), gradient temperatury jest

$$\frac{dt}{dx} = - \frac{q_P}{\lambda_L \left[ 1 + b_L (1 + \beta \delta) \left( 1 - \frac{\beta}{1 + \beta \delta} x \right) t \right]}. \quad (19)$$

W celu zilustrowania sposobu obliczeń określone zostaną temperatury dla dwu pierwszych punktów w przypadku strumienia  $q_P$  i podziału płyty na  $n = 10$  przedziałów.

Pierwsza pochodna temperatury według (19) i założeń (7), (8):

$$\frac{dt}{dx} = - \frac{3,52}{1 + 10 \left( 1 - 0,9 x \right) t}, \quad (20)$$



$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0} = -0,320. \quad (21)$$

Druga pochodna temperatury

$$\frac{d^2t}{dx^2} = \frac{3,52 \left[ (10 - 9x) \frac{-3,52}{1 + (10 - 9x)t} - 9t \right]}{\left[ 1 + (10 - 9x)t \right]^2}, \quad (22)$$

$$\left(\frac{d^2t}{dx^2}\right)_{x=0} = -0,355. \quad (23)$$

Temperatura w punkcie  $x = 0,1$  według szeregu Taylora (17)

$$t_{x=0,1} = 1 - 0,320 \cdot 0,1 - \frac{1}{2} \cdot 0,355 \cdot 0,1^2 = 0,9662. \quad (24)$$

Gradient temperatury w punkcie  $x=0,1$  według (20)

$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=0,1} = -0,3594. \quad (25)$$

Temperatura w punkcie  $x = 0,2$  może być już obliczona ze wzoru (15)

$$t_{x=0,2} = 0,9662 + \left[ -0,3594 + \frac{-0,3594 + 0,320}{2} \right] 0,1 = 0,9283. \quad (26)$$

Dalsze obliczanie gradientów temperatury i temperatur w następnych punktach siatki dokonywane jest na przemian wzorami (19) i (15) aż do punktu  $x = 1,0$ , dla którego powinny być spełnione warunki:

$$t_{x=1,0} = 0,$$

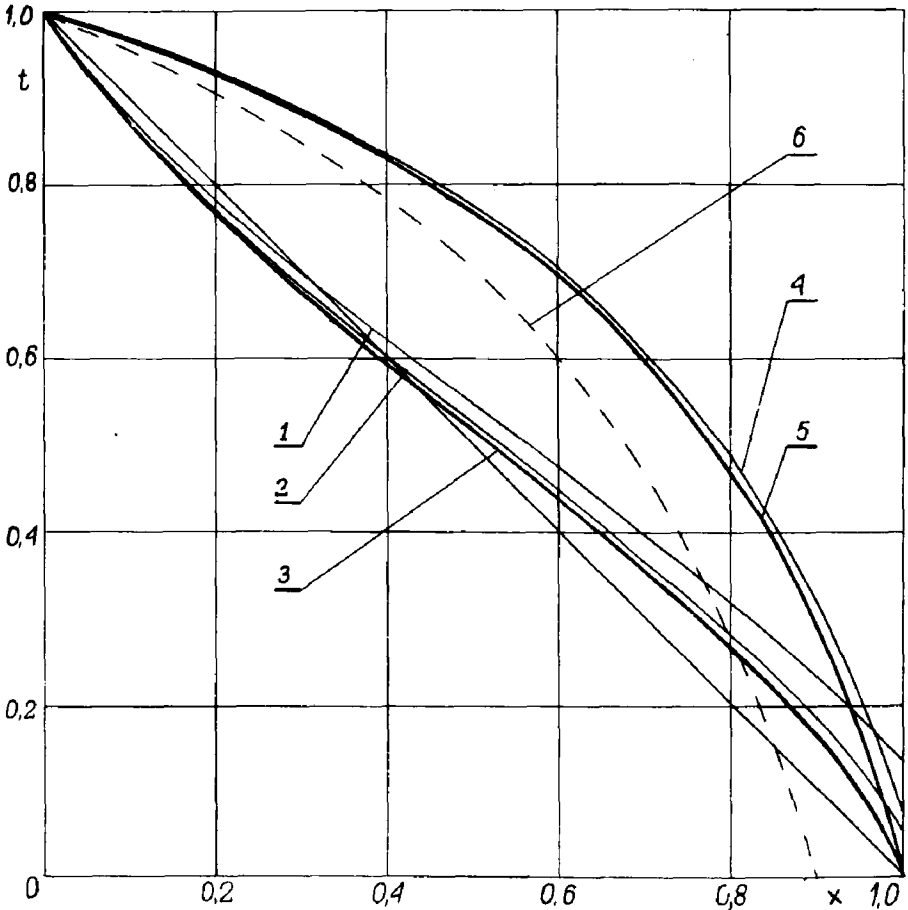
$$\left(\frac{dt}{dx}\right)_{x=1,0} = \frac{q_p}{|\lambda(x, t)|_{x=1,0}} = -3,52. \quad (27)$$

Obliczanie rozkładu temperatury przy strumieniu  $q_L$  przebiega podobnie.

Jeżeli strumienie  $q_L$  i  $q_p$  zostały obliczone (lub przyjęte) prawidłowo, to sprawdzianem poprawności lub dokładności obliczeń metodą numeryczną jest spełnienie warunków (27). Oczy-

wiście osiągnięcie temperatury  $t_{x=1,0} = 0$  jest możliwe tylko z pewną dokładnością.

Przy zbyt dużym kroku siatki otrzymuje się niedokładny rozkład temperatury, o czym świadczy duże odchylenie od końcowego warunku brzegowego (27).

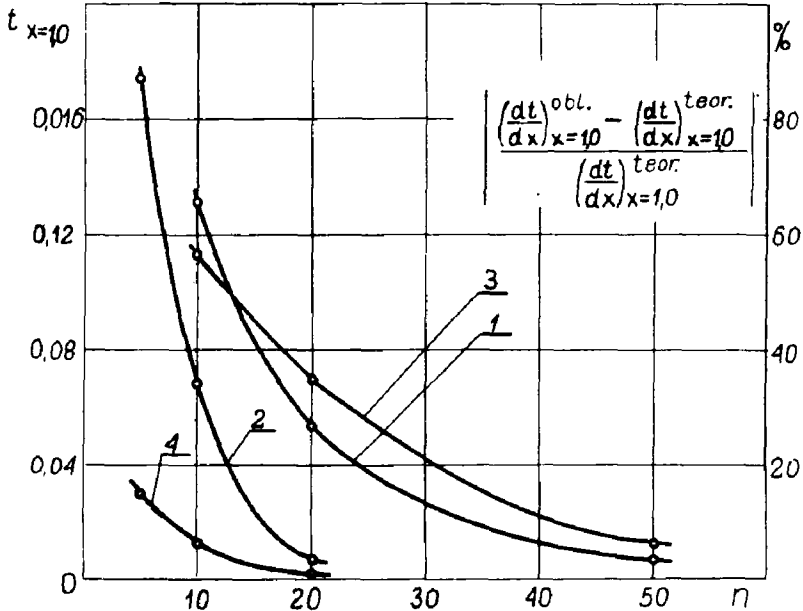


Rys.5. Rozkład temperatury w płycie asymetrycznotropowej obliczony metodą numeryczną: 1 - rozkład przy strumieniu  $q_L = 3,0$  i  $n = 10$ ; 2 - rozkład temperatury przy strumieniu  $q_L = 3,0$  i  $n = 20$ ; 3 - rozkład przy strumieniu  $q_L = 3,0$  i  $n = 50$ ; 4 - rozkład przy strumieniu  $q_p = 3,52$  i  $n = 10$ ; 5 - rozkład przy strumieniu  $q_p = 3,52$  i  $n = 20$ ; 6 - rozkład przy strumieniu  $q_p = 4,5$  i  $n = 10$

Na rys.5 podano krzywe rozkładu temperatury, obliczone przy różnej ilości przedziałów. W przypadku strumienia  $q_L$

krzywa rozkładu temperatury wykazuje przegięcie i wynika stąd konieczność większej dokładności obliczeń i przyjęcie mniejszego kroku siatki.

Wpływ ilości przedziałów  $n$  na dokładność obliczeń w metodzie numerycznej został podany w formie odchylenia od warunków brzegowych (27) na rys.6.



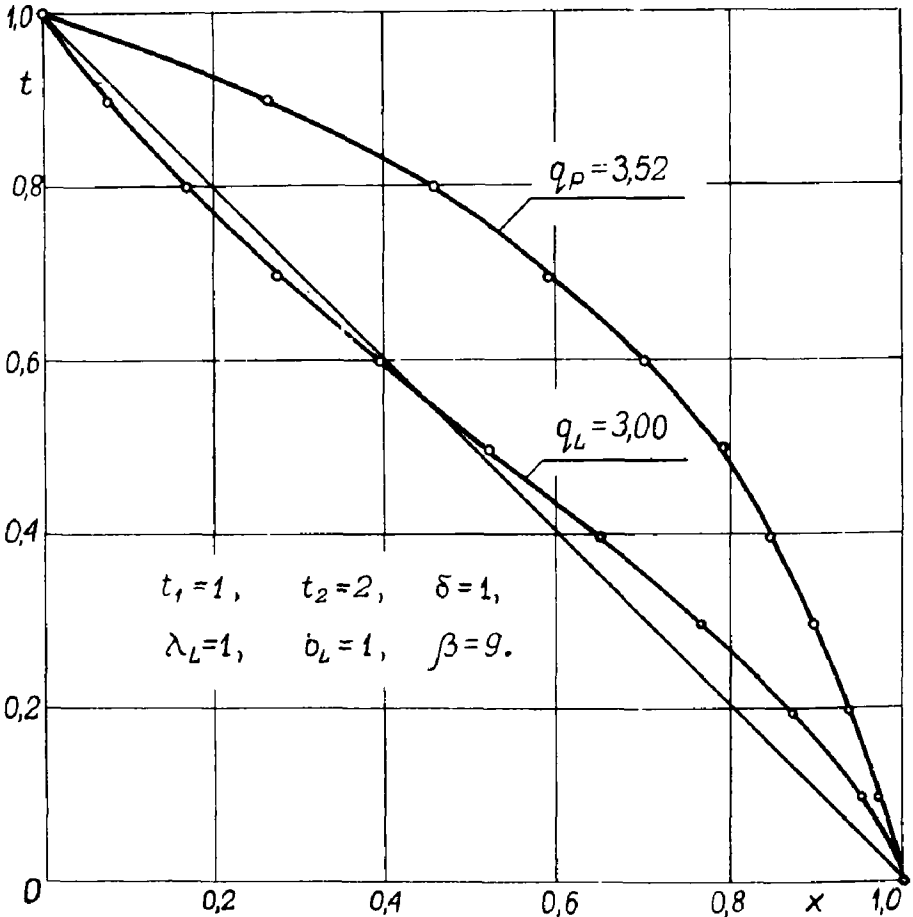
Rys.6. Wpływ ilości przedziałów  $n$  przyjętych w metodzie numerycznej na dokładność spełnienia warunków brzegowych (27):  
1 - błąd obliczenia temperatury końcowej przy strumieniu  $q_L$ ,  
2 - błąd obliczenia temperatury końcowej przy strumieniu  $q_p$ ,  
3 - błąd względny obliczenia końcowego gradientu temperatury przy strumieniu  $q_L$ ,  
4 - błąd względny obliczenia końcowego gradientu temperatury przy strumieniu  $q_p$

Zamiast zwiększania ilości przedziałów możliwe jest również aproksymowanie funkcji  $t(x)$  wielomianami wyższych rzędów.

#### 4. Wnioski

W pracy podano dwie metody obliczeń rozkładu temperatury  $t(x)$  w ośrodkach asymetrycznotropowych: analityczną i numeryczną.

Zgodność wyników otrzymywanych tymi dwiema metodami okazała się zupełnie zadawalająca. Na rys.7 przedstawiono wykres pola temperatury w płycie asymetrycznotropowej obliczony analitycznie i numerycznie.



Rys.7. Rozkład temperatury w płycie asymetrycznotropowej: linie ciągłe na podstawie wyników otrzymanych metodą numeryczną, punkty - wyniki otrzymane metodą analityczną

Metoda analityczna wymaga dość dokładnego i pracochłonnego obliczenia całek typu  $\int_0^t e^{au^2} du$ .

Metoda numeryczna wydaje się łatwiejsza do zaprogramowania na maszynę cyfrową, nawet jeżeli strumienie  $q_L$  i  $q_p$  ołyby w pierwszym przybliżeniu oszacowane dość niedokładnie. Ponadto

wydaje się, że użycie przedstawionej tutaj metody numerycznej byłoby możliwe do obliczenia pola temperatur w ośrodkach asymetrycznotropowych przy  $a \neq 0$  [1].

Obie metody uzupełniają się wzajemnie.

Podany na rys.7 rozkład temperatury jest oczywiście tylko jednym z możliwych przypadków, wynikającym z założeń dla obranego ilustracyjnego przykładu obliczeniowego; założenia do tego przykładu zostały dobrane w taki sposób, aby wykazać różnorodny charakter krzywych rozkładu, które mogą występować w ośrodkach asymetrycznotropowych. W innych obliczeniach należałoby się również posługiwać temperaturami i współrzędnymi bezwymiarowymi, natomiast zmianie uległyby tylko wartości własności cieplnych ośrodka ( $\lambda_L, b_L, \beta$ ).

Należałoby podkreślić, że określenie pola temperatury w ośrodku asymetrycznotropowym wykazującym efekt asymetrii strumieni cieplnych, nawet przy najprostszycich warunkach brzegowych (stan ustalony, płyta nieograniczona), jest dość złożone w porównaniu z innymi ośrodkami stanowiącymi w teorii przewodzenia ciepła model ciała rzeczywistego.

### Bibliografia

1. Gogół W.: Przewodzenie ciepła w ciałach niejednorodnych o przewodności cieplnej zmiennej z temperaturą, Biuletyn Informacyjny Instytutu Techniki Ciepłej, marzec 1969.
2. Karman T., Biot M.: Mathematical methods in engineering, New York, 1940.
3. Siegał B., Siemlendarjew K.: Piatiznacnyje matematičeskie tablicy, GIFML, Moskwa, 1959.

### Резюме

#### Определение температуры в непрерывных асимметричнотроповых телах

Представлено аналитический и нумерический метод определения температуры в неограниченной плите, в которой существует асимметрия тепловых потоков.

Аналитический метод определения температуры основан на решении уравнения Фурье; в основе нумерического метода лежит закон Фурье и метод Адамса. Получена удовлетворительная согласованность результатов исчисления поля температуры в неограниченной плите аналитическим и нумерическим методом.

### Summary

#### Calculation of Temperature Fields in Continual Asymmetrical-Isotropic Media

Two methods (analytical and numerical) of calculation of temperature fields in one-dimensional asymmetrical-isotropic media are presented. In those bodies an effect of asymmetry of the heat flux is in existence.

The analytical method is based on the integral of Fourier's equation; the numerical method of calculation is based on Fourier's law and a method of Adams. A good conformity of the results of calculation of temperature fields in a plate by both methods is obtained.