

Jerzy Sado

Instytut Techniki Ciepłej

JEDNOWYMIAROWY PRZEPIŁYW GAZU RZECZYWISTEGO

W pracy przedstawiono metodę obliczeń parametrów przepływowych dla jednowymiarowej dynamiki gazu rzeczywistego. Parametry termodynamiczne gazu rzeczywistego spełniają analityczne równanie stanu o postaci $p = p(T, v)$. Przedstawiono szczegółowo metodę obliczania następujących rzeczywistych funkcji termodynamicznych: ciepła właściwego, entalpii, entropii i prędkości dźwięku. Analizowano przepływ ustalony i nieustalony. Analizę teoretyczną zilustrowano obliczeniami, w których wykorzystano równanie Redlicha-Kwonga. Przedyskutowano ograniczenia fizyczne prezentowanej metody.

OZNACZENIA

A – przekrój	i – entalpia właściwa
M – liczba Macha	\dot{m} – strumień masy
R – stała gazowa	p – ciśnienie
T – temperatura	s – entropia właściwa
V – objętość	u – prędkość
a – prędkość dźwięku, stała korelacyjna	v – objętość właściwa
b – stała korelacyjna	ρ – gęstość
c – ciepło właściwe	

indeksy

p – ciśnienie, pośrodknie
v – objętość
r – odniesienia
0 – spiętrzenia
k – końcowy
s – nasycenia
$*$ – krytyczne

WSTĘP

W wielu dziedzinach techniki pojawiają się problemy obliczeniowe związane z dynamiką gazów. Metody obliczeniowe dynamiki opracowane dla gazu doskonałego są w powszechnym użyciu. Można je znaleźć w pracach Cambela i Jenningsa (1958), Daneshyara (1976) lub Szumowskiego i in. (1988). W wielu zastosowaniach technicznych takie przybliżenie modelowe zjawiska jest wystarczające. Natomiast wszędzie tam, gdzie pojawia się wysokie ciśnienie lub gaz ma parametry okołokrytyczne, model gazu doskonałego nie wystarcza. Model gazu rzeczywistego należy wykorzystywać np. w obliczeniach wysokociśnieniowych sieci i zbiorników gazowych, w niektórych typach syntezowych reaktorów chemicznych, czy też w turbinach gazowych.

Obliczenia, z wykorzystaniem modelu gazu rzeczywistego, wymagają wykorzystania komputera. Prezentowana praca ma na celu przybliżenie tego dość złożonego problemu osobom, które zawodowo muszą zajmować się tą tematyką. Od czytelnika wymagana jest tylko wiedza z podstawowego zakresu termodynamiki.

1. ANALITYCZNE RÓWNANIA STANU GAZU

Nie istnieje żadne, ogólne równanie stanu, które zastosowane do opisu zależności między ciśnieniem, temperaturą i objętością właściwą w gazach rzeczywistych, spełniałoby taką rolę jak równanie Clapeyrona stosowane w gazach doskonałych. Zawsze okazuje się, że zaproponowane równanie jest słuszne tylko dla konkretnego gazu, albo dla szczególnego zakresu parametrów termodynamicznych (ciśnienia i temperatury), albo oba te warunki muszą być uwzględniane równocześnie. Opis wielu zjawisk fizycznych wymaga odstąpienia od modelu gazu doskonałego. Wszędzie tam, gdzie to jest możliwe, stosuje się jednak analityczne równania stanu gazu rzeczywistego, weryfikując w miarę możliwości otrzymane wyniki wartościami zmierzonymi.

Równania analityczne gazu rzeczywistego można podzielić na grupy, np. wg liczby parametrów korelacyjnych występujących w równaniu. W poniższym zestawieniu podano kilka najczęściej stosowanych równań stanu:

a) równania dwuparametrowe

– Van der Waalsa

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{v^2} \quad (1)$$

– Berthelota

$$p = \frac{RT}{v - b} - \frac{a}{Tv^2} \quad (2)$$

– Dietericiego

$$p = \frac{RT}{v-b} \exp\left(-\frac{a}{RTv}\right) \quad (3)$$

– Redlicha-Kwonga

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a}{T^{0,5}v(v+b)} \quad (4)$$

b) równanie trójparametrowe

– Wohla

$$p = \frac{RT}{v-b} - \frac{a_1}{v(v-b)} + \frac{a_2}{v^3} \quad (5)$$

c) równanie pięcioparametrowe

– Beattie-Briddgemana

$$p = \frac{RT}{v^2} \left(1 - \frac{c}{vT^3}\right) \left[v + B_0 \left(1 - \frac{b}{v}\right)\right] - \frac{A_0}{v^2} \left(1 - \frac{a}{v}\right) \quad (6)$$

d) równanie ośmioparametrowe

– Benedicta-Webba-Rubina

$$p = \frac{RT}{v} + \left(B_0RT - A_0 - \frac{C_0}{T}\right) \frac{1}{v^2} + (bRT - a) \frac{1}{v^3} + \frac{a\alpha}{v^6} + \frac{c \left(1 + \frac{\gamma}{v^2}\right)}{T^2 v^3} \exp\left(-\frac{\gamma}{v^2}\right) \quad (7)$$

Istnieje specjalistyczna literatura (Reid i in. 1966, 1977), w której podano obszary zastosowań analitycznych równań opisujących zależności między p - T - v dla gazów czystych, rzeczywistych. Z analizy dokładności obliczeń objętościowych wynika, że z przedstawionych powyżej równań stanu, równanie Redlicha-Kwonga dobrze opisuje własności węglowodorów (nie gorzej niż 5%), a jest bardzo proste i łatwo może być wykorzystane w obliczeniach numerycznych.

Bez względu jednak na to, jakie równanie zostanie wykorzystane w obliczeniach gazodynamicznych, należy podkreślić, iż prawie wszystkie równania gazu rzeczywistego mają postać

$$p = p(T, v) \quad (8)$$

2. FUNKCJE TERMODYNAMICZNE GAZU RZECZYWISTEGO

Wykorzystując znane tożsamości termodynamiczne, w których wykorzystuje się równanie stanu o postaci (8) oraz pewne dodatkowe informacje o badanym czynniku, znajduje się wartości rzeczywiste wszystkich funkcji termodynamicznych, charakterystyczne dla przyjętego równania stanu. Należy podkreślić, że otrzymany wynik ma charakter przybliżony, zależny bardzo silnie od wykorzystanego równania stanu. Z doświadczenia wiadomo, że dokładność obliczeń wszystkich funkcji cieplnych jest gorsza od dokładności obliczeń objętościowych.

2.1. CIEPŁO WŁAŚCIWE I WYKŁADNIK IZENTROPY

Dodatkową, konieczną informacją potrzebną do obliczenia ciepła właściwego jest funkcja, która pozwala obliczyć ciepło właściwe dla konkretnego gazu, przy znanej wartości ciśnienia odniesienia p_r . Funkcją tą jest najczęściej wielomian, lecz dozwolone są wszystkie funkcje liniowe i nieliniowe. W pracy przyjęto, iż znany jest wielomian, który pozwala obliczyć wartość ciepła właściwego c_p w funkcji temperatury, przy znanym ciśnieniu odniesienia, w tym przypadku $p_r = 0,1 \text{ MPa}$

$$c_p = a + bT + cT^2 + dT^3 \quad (9)$$

Żeby obliczyć wartości funkcji termodynamicznych w stanie o parametrach (p , T) należy zrealizować następujący algorytm:

- Obliczyć wartość ciepła właściwego $c_p(T, p_r)$, wykorzystując równanie (9).
- Przy ciśnieniu odniesienia p_r można korzystać z równania Clapeyrona, co pozwala zastosować równanie Mayera, a w konsekwencji obliczyć drugie ciepło właściwe

$$c_v(T, p_r) = c_p(T, p_r) - R \quad (10)$$

- Obliczyć z równania Clapeyrona objętość właściwą gazu $v(T, p_r)$.
- Obliczyć objętość właściwą gazu $v(T, p)$. W tym przypadku należy numerycznie rozwiązać równanie stanu gazu rzeczywistego. Dla większości stosowanych równań sprowadza się to do znalezienia właściwej wartości pierwiastka wielomianu.
- Ponieważ znana jest podstawowa tożsamość

$$\left(\frac{\partial c_v}{\partial T} \right)_T = T \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_v \quad (11)$$

i znana jest wartość ciepła właściwego $c_v(T, p_r)$ przy ciśnieniu odniesienia, to w tożsamości (11) można rozdzielić zmienne, otrzymane równania scałkować przy stałej temperaturze, otrzymując

$$c_v(T, p) = c_v(T, p_0) + T \int_{v(T, p_0)}^{v(T, p)} \left(\frac{\partial^2 p}{\partial T^2} \right)_v dv \quad (12)$$

F. Kolejna tożsamość termodynamiczna pozwala obliczyć wartość ciepła właściwego $c_p(T, p)$ dla gazu rzeczywistego

$$c_p(T, p) = c_v(T, r) - T \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v^2}{\left(\frac{\partial p}{\partial v} \right)_T} \quad (13)$$

Pochodne, które występują w równaniu (13) oblicza się bezpośrednio z równania stanu (8).

G. Wykładnik izentropowy jest obliczany z definicji

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} \quad (14)$$

Wszystkie zależności teoretyczne zostały zilustrowane obliczeniami dla gazów – metanu CH_4 , tlenku węgla CO i argonu Ar , o temperaturze $T = 400 \text{ K}$. Do obliczeń wykorzystano równanie analityczne Redlicha-Kwonga (4). Wartości stosowanych stałych materiałowych podano w tabl. 1. Obliczenie objętości molowej gazu, gdy znane są ciśnienie i temperatura, wymagają w tym przypadku znalezienia pierwiastka z wielomianu o postaci

$$v^3 - \frac{RT}{p} v^2 - \left(b^2 + \frac{RT}{p} b - \frac{a}{pT^{0,5}} \right) v - \frac{ab}{pT^{0,5}} = 0 \quad (15)$$

Pochodne, które występują we wzorach (12) i (13) oblicza się łatwo, a całka ze wzoru (4) jest analityczna. W tym konkretnym przypadku, wzór (12) przekształca się do postaci

$$c_v(T, p) = c_v(T, p_r) - \frac{3a}{4bT^{1,5}} \ln \frac{v(v_p + b)}{v_p(v + b)} \quad (16)$$

gdzie wprowadzono oznaczenia

$$v \equiv v(T, p) \quad v_p \equiv v(T, p_r) \quad (17)$$

$$c_p[\text{J} \cdot \text{kmol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1}](T, p_r) = \sum_{i=1}^4 a_{i-1} (T[\text{K}])^{i-1} \quad (18)$$

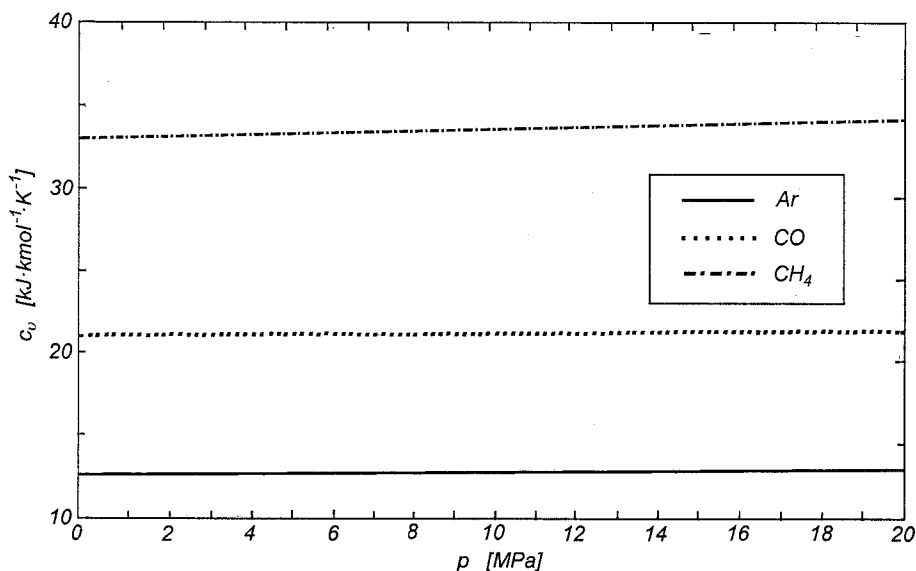
w którym $p_r = 0,1 \text{ MPa}$.

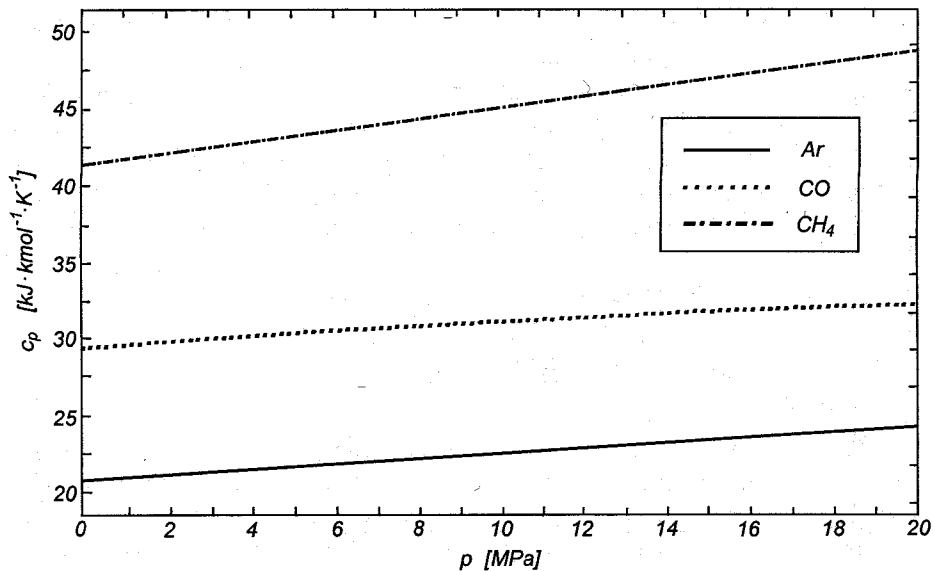
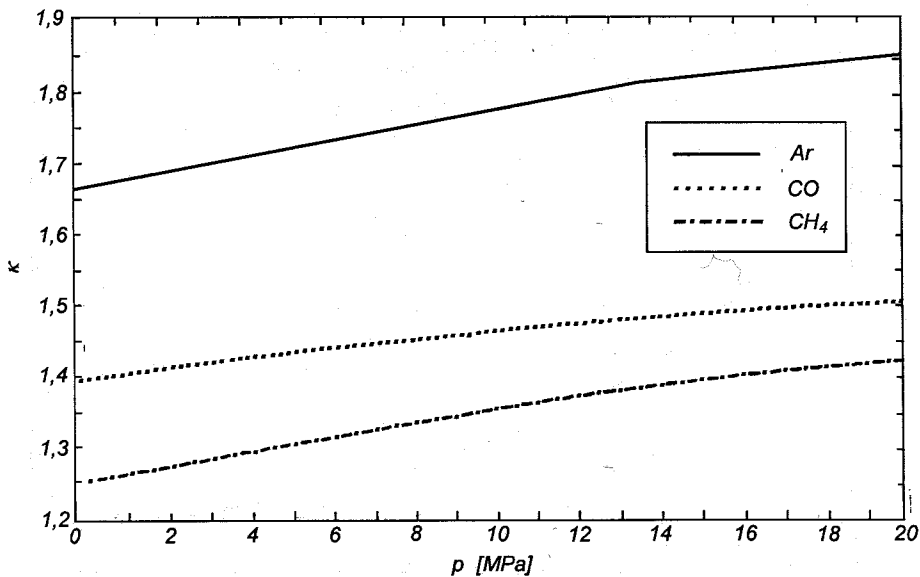
Tablica 1

Stała	Ar	CO	CH ₄
a [$\text{N}\cdot\text{m}^4\cdot\text{K}^{0,5}\cdot\text{kmol}^{-2}$]	$1,693\cdot 10^6$	$1,721\cdot 10^6$	$3,306\cdot 10^6$
b [$\text{m}^3\cdot\text{kmol}^{-1}$]	0,0223	0,0274	0,0306
a_0	$20,82\cdot 10^3$	$30,89\cdot 10^3$	$19,9\cdot 10^3$
a_1	-0,03211	-12,86	50,3
a_2	$51,7\cdot 10^{-6}$	$27,74\cdot 10^{-3}$	$12,7\cdot 10^{-3}$
a_3	0	$-12,73\cdot 10^{-6}$	$-11,0\cdot 10^{-6}$

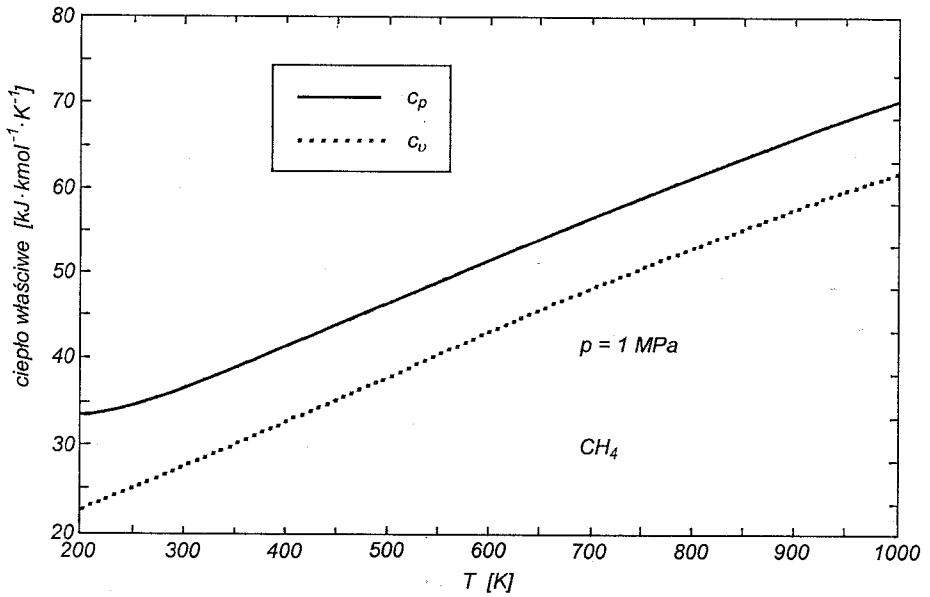
Na rysunkach 1–3 pokazano zależność ciśnieniową (w przedziale od 0,1 MPa do 20 MPa) omawianych funkcji. Jak widać, wszystkie trzy omówione powyżej funkcje termodynamiczne gazu rzeczywistego są zależne od ciśnienia (przy $T = \text{const}$), czego nie ma w gazie doskonałym.

Szczególne znaczenie w gazodynamice gazu doskonałego odgrywa wartość wykładnika izentropy, którego wartość w tym przybliżeniu zależy tylko od liczby stopni swobody cząsteczki. Na rys. 3 pokazano, że założenie to jest błędne w gazach rzeczywistych.

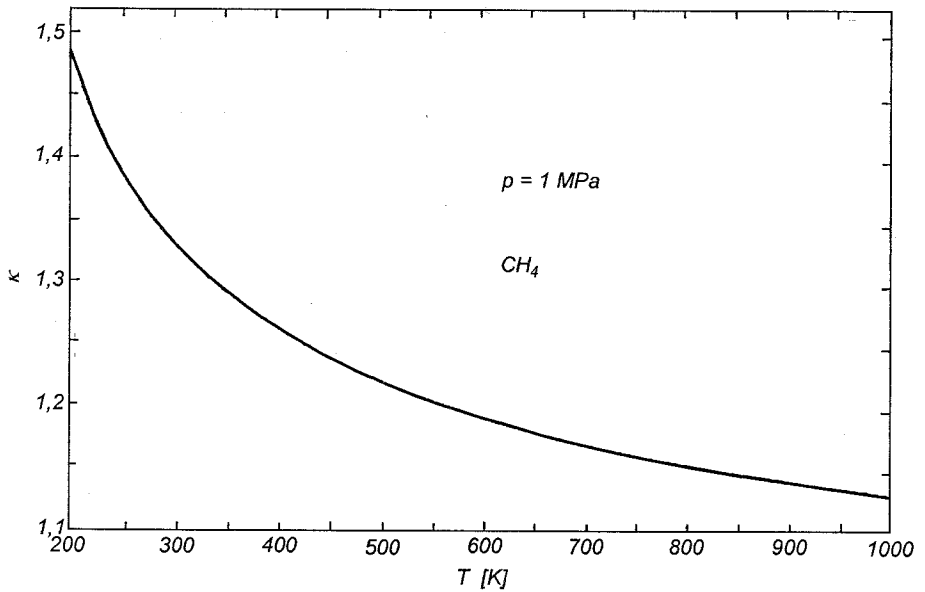
Rys. 1. Ciepło właściwe c_v w funkcji ciśnienia dla $T = 400$ K

Rys. 2. Ciepło właściwe c_p w funkcji dla $T = 400$ KRys. 3. Wykładniki izentropy w funkcji ciśnienia $T = 400$ K

Na rys. 4 pokazano jak zmiana temperatury wpływa na ciepło właściwe metanu; jest to zależność monotonicznie rosnąca. Zmianę wartości wykładnika izentropy pokazano na rys. 5. Ogólnie należy stwierdzić, iż wykładnik izentropy gazu rzeczywistego jest złożoną funkcją ciśnienia i temperatury.



Rys. 4. Ciepło właściwe metanu w funkcji temperatury



Rys. 5. Wykładnik izentropy metanu w funkcji temperatury

2.2. ENTROPIA

W dynamice gazów ważną rolę odgrywają przepływy izentropowe. Z tego powodu konieczne jest znalezienie sposobu na obliczenie entropii gazu rzeczywistego. Do obliczeń konieczne są: równanie stanu (8), funkcja materiałowa (18) określona przy znanym ciśnieniu odniesienia p_r oraz wartość bezwzględna entropii dla gazu o ciśnieniu odniesienia p_r i temperaturze odniesienia T_r , czyli $s(T_r, p_r)$.

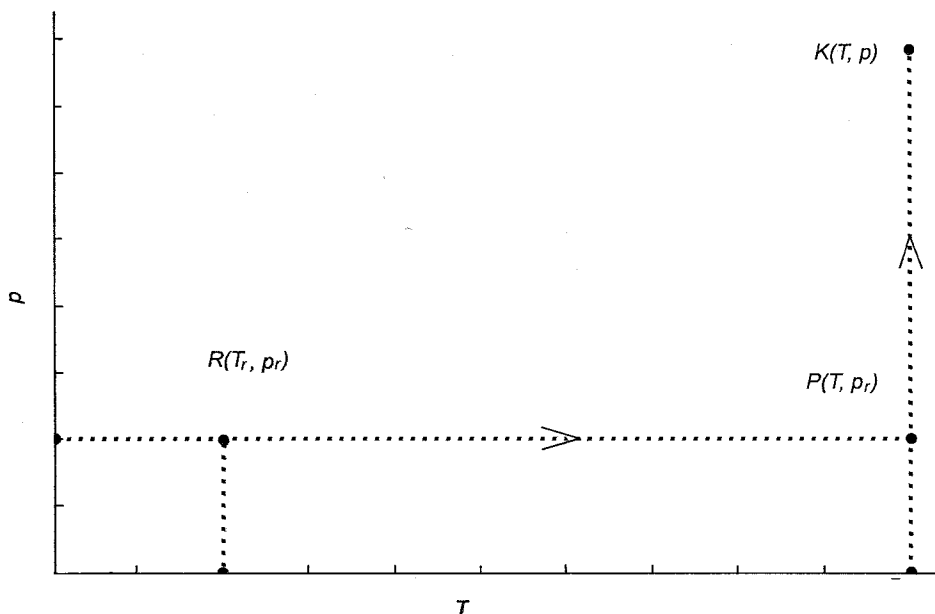
W obliczeniach entropii wykorzystuje się tożsamość termodynamiczną

$$ds = \frac{c_p}{T} dT - \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp \quad (19)$$

Entropia jest funkcją termodynamiczną, w związku z tym jej zmiana w przemianie termodynamicznej zależy tylko od stanu początkowego i końcowego przemiany. Pozwala to na całkowanie równania (19) wzdłuż drogi, pokazanej na rys. 6:

- przy $p_r = \text{const}$, od T_r do T (zanika drugi człon prawej strony równania (19)),
- a następnie przy $T = \text{const}$, od p_r do p (zanika pierwszy człon tego równania).

Przed rozwiązaniem należy przekształcić drugi człon prawej strony równania (19), ponieważ z postaci równania stanu (8) wynika, że występująca w nim pochodna nie jest możliwa do bezpośredniego wyznaczenia.



Rys. 6. Schemat całkowania dla entropii

Z relacji cykliczności otrzymuje się, że

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p \left(\frac{\partial T}{\partial p}\right)_v \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -1 \quad (20)$$

czyli inaczej zapisując

$$\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v \frac{dv}{dp} \quad (21)$$

gdzie wykorzystano fakt, iż pochodna (21) będzie całkowana przy $T = \text{const.}$

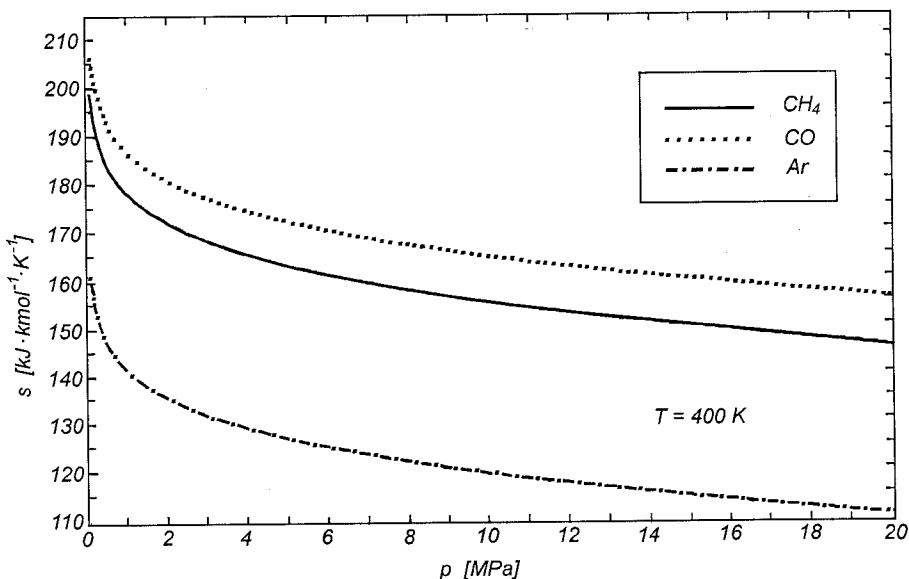
Ostatecznie po podstawieniu równania (21) do (19) i po całkowaniu, otrzymuje się

$$s(T, p) = s(T_r, p_r) + \left[\int_{T_r}^T \frac{c_p dT}{T} \right]_{p_r} + \left[\int_{v(T, p_r)}^{v(T, p)} \left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_v dv \right]_T \quad (22)$$

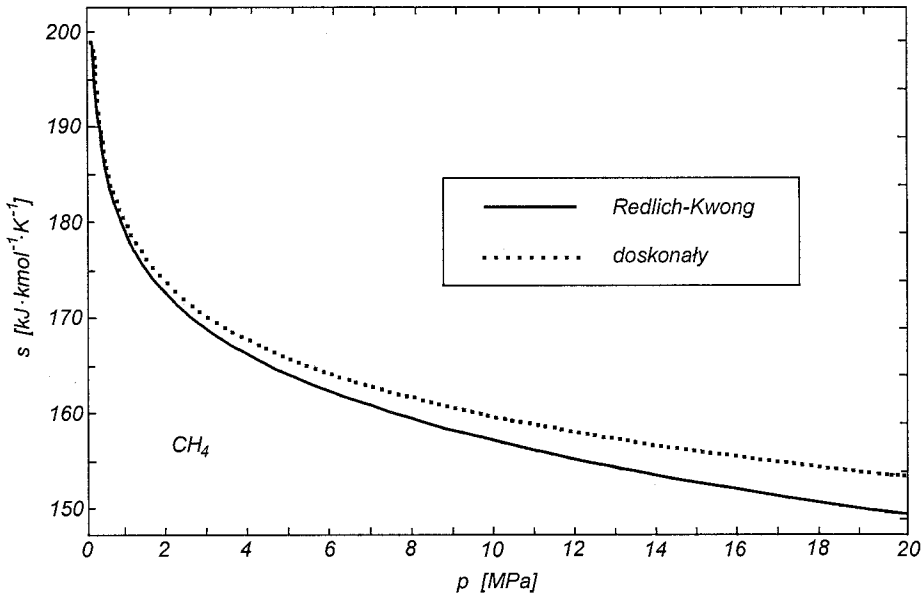
Obliczenie pierwszej całki prawej strony równania (22) nie stanowi problemu. Natomiast druga wymaga wyboru równania stanu (8). Gdy jest to równanie stanu Redlicha-Kwonga, to równanie (22) po scałkowaniu ma postać

$$s(T, p) = s(T_r, p_r) + \left[\int_{T_r}^T \frac{c_p dT}{T} \right]_{p_r} + R \ln \frac{v - b}{v_p - b} + \frac{a}{2bT^{1,5}} \ln \frac{v(v_p + b)}{v_p(v + b)} \quad (23)$$

w której wykorzystano oznaczenia z równania (9).



Rys. 7. Entropie właściwe gazów rzeczywistych w funkcji ciśnienia



Rys. 8. Porównanie wartości entropii właściwej metanu

Na rysunku 7 pokazano zależność entropii od ciśnienia dla wybranych wcześniej gazów rzeczywistych. Na rysunku 8 porównano wartości entropii właściwej obliczone dla dwóch modeli: rzeczywistego i doskonałego.

23. ENTALPIA

W dynamice gazów wartość liczbową entalpii jest potrzebna do obliczenia entalpii spiętrzenia, jak i do określenia energii kinetycznej właściwej gazu, która jest różnicą między entalpią spiętrzenia, a entalpią termodynamiczną w dowolnym przekroju przepływu izentropowego.

Podstawowym równaniem określającym zmianę entalpii jest

$$di = c_p dT + \left[v - T \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p \right] dp \quad (24)$$

Z tych samych powodów, które omówiono w rozdz. 2.2, całkowanie równania (24) prowadzi się początkowo od stanu o parametrach (p_r, T_r) , gdzie znana jest wartość $i(T_r, p_r)$ do stanu (p_r, T) , czyli przy $p_r = \text{const}$, a następnie przy $T = \text{const}$, do stanu końcowego $i(T, p)$. W związku z powyższym otrzymuje się

$$i(T, p) = i(T_r, p_r) + \left[\int_{T_r}^T c_p dT \right]_{p_r} + \left[\int_{p_r}^p v dp - T \int_{p_r}^p \left(\frac{\partial v}{\partial T} \right)_p dp \right]_T \quad (25)$$

Pierwsza całka prawej strony równania (25) nie wymaga omówienia. Kolejną rozwiązuje się wykorzystując zamianę zmiennych, która wynika z faktu, iż z różniczki zupełnej iloczynu zmiennych otrzymuje się

$$v dp = d(pv) - p dv \quad (26)$$

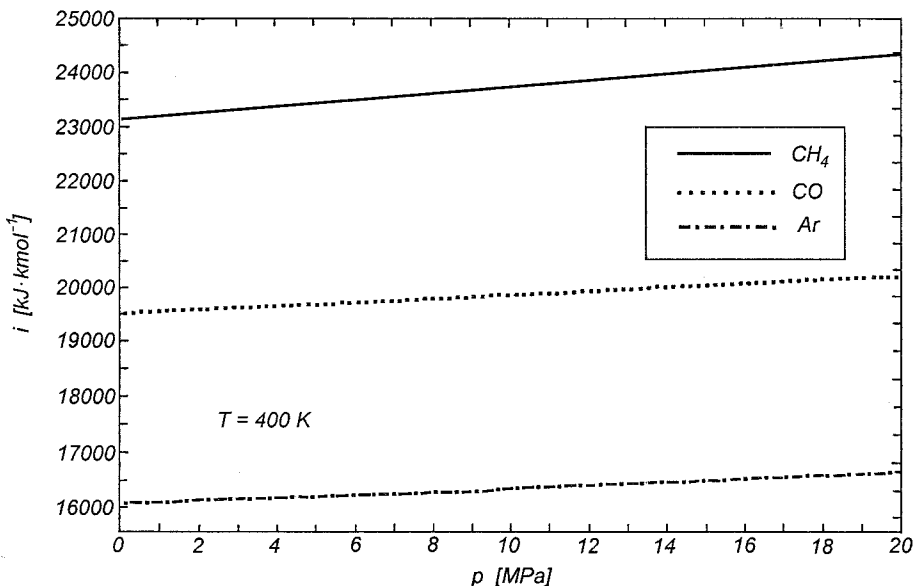
Do ostatniej całki wykorzystuje się podstawienie (21), co ostatecznie daje szukaną zależność dla entalpii gazu rzeczywistego

$$i(T, p) = i(T_r, p_r) + \left[\int_{T_r}^T c_p dT \right]_{p_r} + pv(T, p) - p_r v(T, p_r) + \left\{ \int_{v(T, p_r)}^{v(T, p)} \left[T \left(\frac{\partial p}{\partial T} \right)_v - p \right] dv \right\}_T \quad (27)$$

Po zastosowaniu równania stanu Redlicha-Kwonga, zależność (27) przekształca się do postaci

$$i(T, p) = i(T_r, p_r) + \left[\int_{T_r}^T c_p dT \right]_{p_r} + pv - p_r v_p + \frac{3a}{2bT^{0.5}} \ln \frac{v(v_p + b)}{v_p(v + b)} \quad (28)$$

gdzie wykorzystano oznaczenie z równania (17).



Rys. 9. Entalpia właściwa gazów rzeczywistych w funkcji ciśnienia

Wpływ ciśnienia na wartość entalpii, dla kilku różnych gazów rzeczywistych, pokazano na rys. 9. Jak widać, entalpia gazu rzeczywistego oprócz tego, że zależy od temperatury, jest w przybliżeniu liniową funkcją ciśnienia. Właśność ta nie ma nic wspólnego z cząsteczkowością gazu.

2.4. LOKALNA PRĘDKOŚĆ DŹWIĘKU

Parametrem charakterystycznym czynnika jest również lokalna prędkość dźwięku. Jest to prędkość (względem ośrodka), z jaką rozchodzą się małe zaburzenia, a definiuje się ją jako

$$a = \sqrt{\left(\frac{\partial p}{\partial \rho}\right)_s} \quad (29)$$

Ponieważ $\rho = \frac{1}{v}$, to $\partial \rho = -\frac{\partial v}{v^2}$, prowadzi to do nowej zależności, w której

$$a = \sqrt{-v^2 \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s} \quad (30)$$

Równanie (29) nie pozwala na bezpośrednie obliczenie prędkości dźwięku w gazie rzeczywistym. Musi zostać przekształcone tak, żeby można było obliczyć funkcję podpierwiastkową. Z podstawowych zależności termodynamicznych wiadomo, że

$$c_v = \left(\frac{\partial u}{\partial T}\right)_v = \left(\frac{\partial u}{\partial s}\right)_v \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v \quad (31)$$

oraz

$$c_p = \left(\frac{\partial i}{\partial T}\right)_p = \left(\frac{\partial i}{\partial s}\right)_p \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = T \left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p \quad (32)$$

Z równań (31) i (32) wynika, że wykładnik izentropy jest równy

$$\kappa = \frac{c_p}{c_v} = \frac{\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p}{\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v} \quad (33)$$

Z relacji cykliczności zastosowanej do funkcji $f(s, T, p) = 0$ wiadomo, że

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_p = -\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T \quad (34)$$

oraz

$$\left(\frac{\partial s}{\partial T}\right)_v = -\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_s \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T \quad (35)$$

Po podstawieniu zależności (34) i (35) do wzoru (33), otrzymuje się

$$\kappa = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial T}\right)_s \left(\frac{\partial s}{\partial p}\right)_T}{\left(\frac{\partial v}{\partial T}\right)_s \left(\frac{\partial s}{\partial v}\right)_T} \quad (36)$$

co po przekształceniach daje, iż

$$\kappa = \frac{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_s}{\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T} \quad (37)$$

Sposób obliczania wykładnika izentropy gazu rzeczywistego omówiono w rozdz. 2.1. Podstawienie zależności (37) do definicji (30) pozwala obliczyć prędkość dźwięku w gazie rzeczywistym

$$a = \sqrt{-v^2 \kappa \left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T} \quad (38)$$

W rozważanym modelu gazu rzeczywistego pochodna z funkcji podpierwiastkowej jest równa

$$\left(\frac{\partial p}{\partial v}\right)_T = -\frac{RT}{(v-b)^2} + \frac{a(2v+b)}{T^{0,5}v^2(v+b)^2} \quad (39)$$

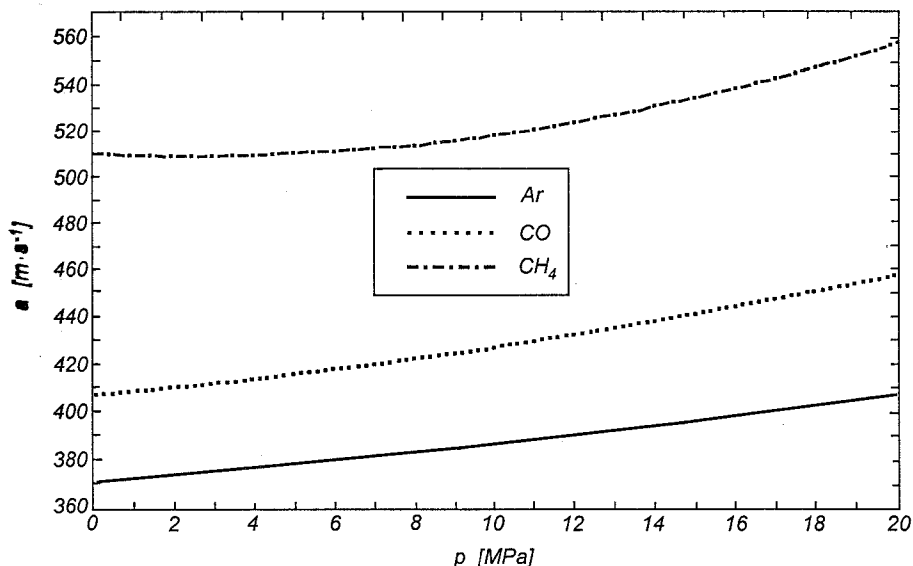
co powoduje, że po wyznaczeniu wartości wykładnika izentropy, lokalna prędkość dźwięku daje się łatwo obliczyć.

Na rysunku 10 pokazano ciśnieniową zależność prędkości dźwięku dla gazów, których zmienne p - v - T wiąże równanie Redlicha-Kwonga. Jak widać jest to zależność monotonicznie rosnąca. W gazie doskonałym prędkość dźwięku nie zależy od ciśnienia, ponieważ

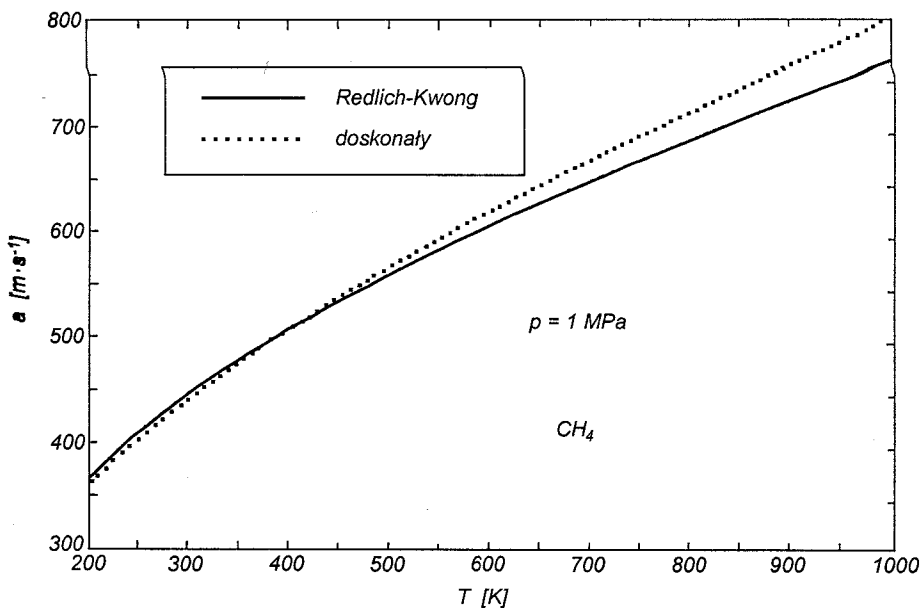
$$a = \sqrt{\kappa RT} \quad (40)$$

a wartość wykładnika izentropy $\kappa = \text{const}$.

Wpływ temperatury na prędkość dźwięku w metanie pokazano na rys. 11, gdzie dla porównania pokazano równocześnie wartość dla gazu doskonałego (40). Jak widać z powyższego porównania, lokalna prędkość dźwięku jest złożoną funkcją ciśnienia i temperatury.



Rys. 10. Lokalne prędkości dźwięku w funkcji ciśnienia dla $T = 400$ K



Rys. 11. Lokalna prędkość dźwięku metanu w funkcji temperatury dla $p = 1$ MPa

3. PRZEPIŁYW IZENTROPOWY

3.1. PARAMETRY PRZEPIŁYWU W STANIE USTALONYM

W przepływie izentropowym, czyli przy $s = s_0 = \text{const}$ (gdzie s_0 – entropia w warunkach spiętrzenia), zgodnie z I zasadą termodynamiki musi być spełniony dodatkowo warunek, że entalpia spiętrzenia nie ulega zmianie w żadnym miejscu przepływu, czyli $i_0 = \text{const}$. Pozwala to wyznaczyć lokalne wartości parametrów przepływu, ponieważ gdy

$$i + \frac{u^2}{2} = i_0 \quad (41)$$

to

$$u = \sqrt{2(i_0 - i)} \quad (42)$$

Algorytm znalezienia parametrów przepływu gazu w takim przepływie jest następujący:

- a) znane są warunki spiętrzenia: p_0 i T_0 ,
- b) wybiera się postać analitycznego równania stanu (8),
- c) oblicza się gęstość gazu w warunkach spiętrzenia ρ_0 ,
- d) oblicza się entropię s_0 i entalpię i_0 gazu w warunkach spiętrzenia, wykorzystując wzory (22) i (27),
- e) wybiera się bieżącą wartość ciśnienia $p < p_0$,
- f) zakłada się wstępnie wartość odpowiadającej temu ciśnieniu temperatury. Jako przybliżenie wstępne wykorzystuje się izentropową wartość, obliczoną dla modelu gazu doskonałego

$$T = T_0 \left(\frac{p}{p_0} \right)^{\frac{\kappa-1}{\kappa}} \quad (43)$$

do której podstawia się dla κ wartość wykładnika izentropy gazu doskonałego.

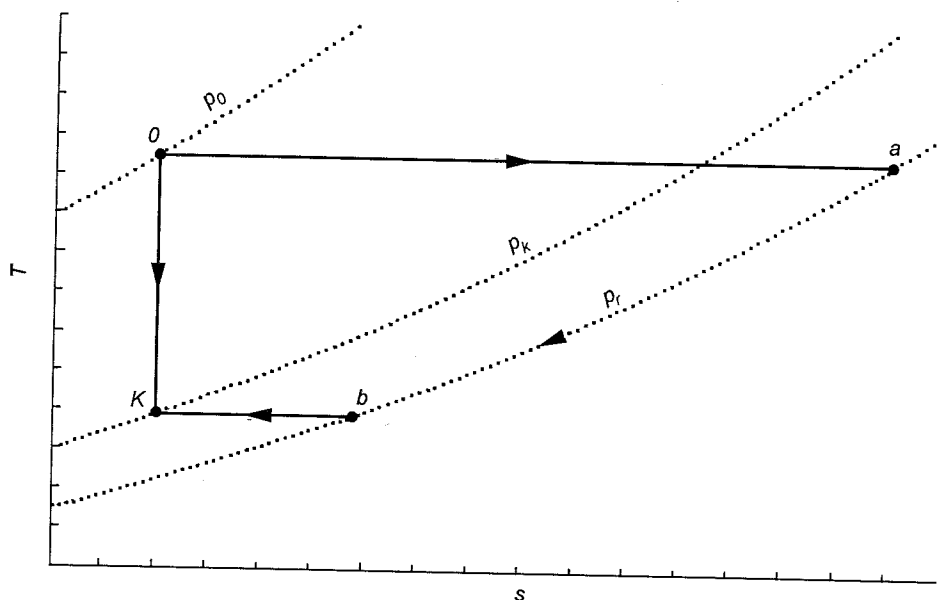
Następnie rozpoczyna się proces iteracyjny temperatury, wykorzystując fakt, iż entropia spiętrzenia nie ulega zmianie. Proces ten, pokazany na rys. 12, jest następujący:

- f₁) całkuje się równanie (22) wzdłuż drogi $(T_0, p_0) \rightarrow (T_0, p_r)$, otrzymując Δs_{0a} ; $(T_0, p_r) \rightarrow (T, p_r)$ otrzymując Δs_{ab} i $(T, p_r) \rightarrow (T, p)$ otrzymując Δs_{bk} , gdzie p_r jest ciśnieniem odniesienia zdefiniowanym we wzorze (1),
- f₂) entropia w punkcie o współrzędnych (T, p) jest równa

$$s = s_0 + \Delta s_{0a} + \Delta s_{ab} + \Delta s_{bk} \quad (44)$$

- f₃) jeżeli $s < s_0$, to należy zwiększyć wartość T i powrócić do punktu f_1 ,
 jeżeli $s > s_0$, to należy zmniejszyć wartość T i powrócić do punktu f_1 ,
 g) znając wartości ciśnienia i temperatury w danym przekroju, oblicza się ze wzoru (27) lokalną wartość entalpii termodynamicznej,
 h) następnie wyznacza się prędkość przepływu ze wzoru (42),
 i) oblicza się lokalną prędkość dźwięku ze wzoru (38),
 j) i ostatecznie oblicza się wartość lokalnej liczby Macha

$$M = \frac{u}{a} \quad (45)$$



Rys. 12. Schemat iteracji dla przemiany $s = \text{const}$

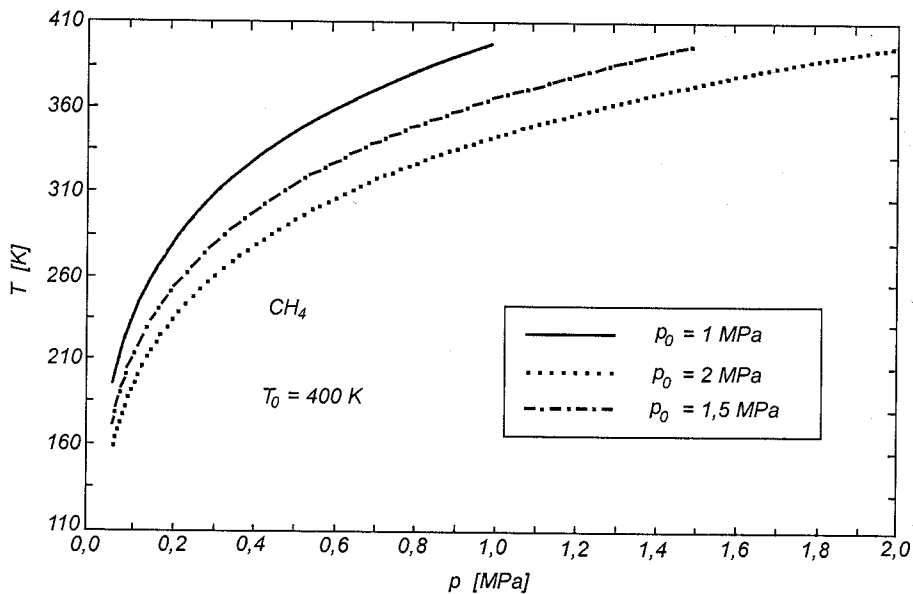
Wykorzystując równanie stanu Redlicha-Kwonga (4) kolejne różnice entropii można wyznaczyć analitycznie, otrzymując $T = \text{const}$ (Δs_{0a} , Δs_{bk})

$$\Delta s_{pk} = \left[\int_{v_p}^{v_k} \left(\frac{\partial p}{\partial v} \right) dv \right]_T = R \ln \frac{v_k - b}{v_p - b} + \frac{a}{2 T^{1,5} b} \ln \frac{v_k (v_p + b)}{v_p (v_k + b)} \quad (46)$$

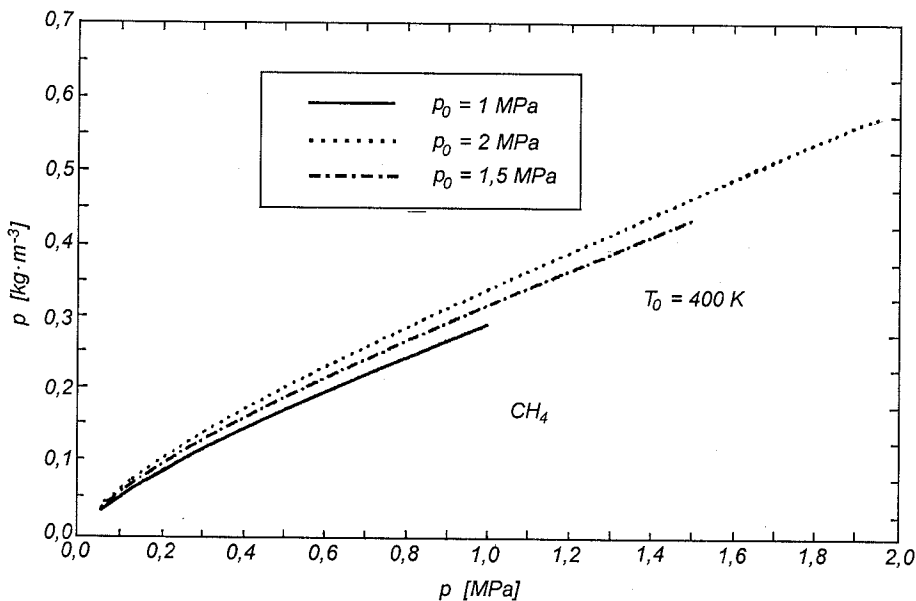
gdzie: v_p – molowa objętość w punkcie początkowym przemiany,
 v_k – molowa objętość w punkcie końcowym przemiany.

Na rysunkach 13–16 pokazano jak zmieniają się lokalne wartości, w funkcji ciśnienia w konkretnym przekroju przepływu, kolejno: temperatura, gęstość, liczba Macha oraz lokalna prędkość przepływu. Czynnikiem jest metan, a parametrem ciśnienie spiętrzenia i temperatura spiętrzenia. Zgodnie z wynikami

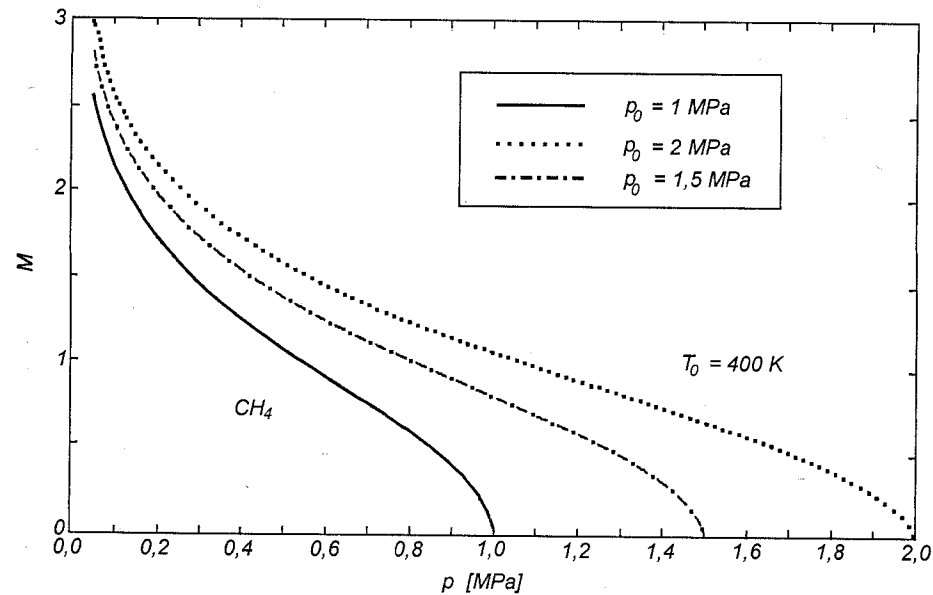
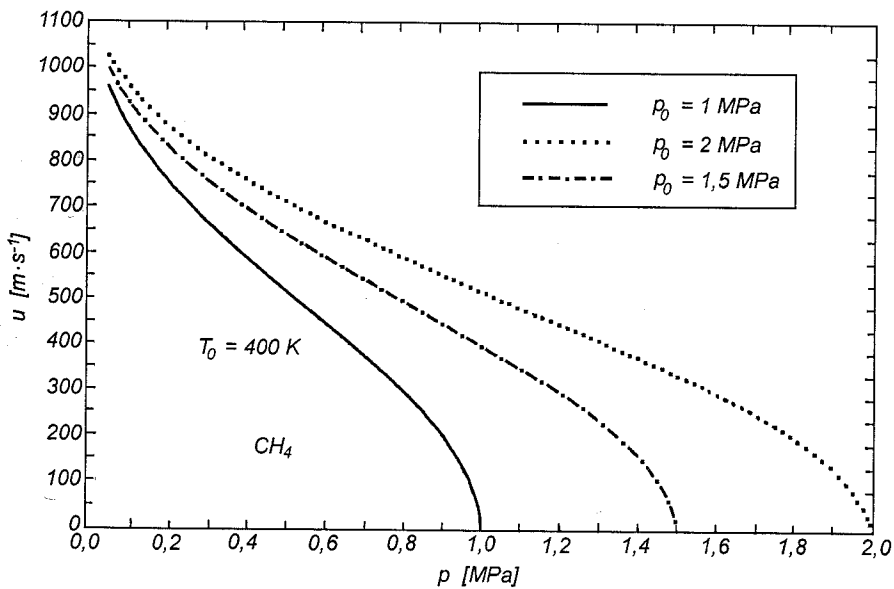
pokazanymi na rys. 9, zmiana ciśnienia spiętrzenia (przy $T = \text{const}$) prowadzi do zmiany entalpii spiętrzenia. Zmiana ta musi w sposób istotny wpływać na parametry izentropowego przepływu gazu.



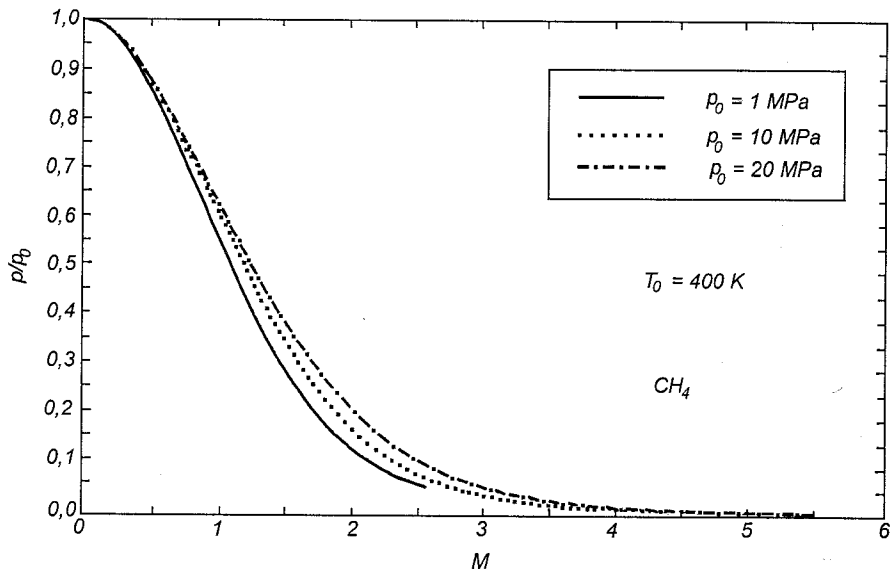
Rys. 13. Parametry przepływu izentropowego gazów rzeczywistych $T(p)$



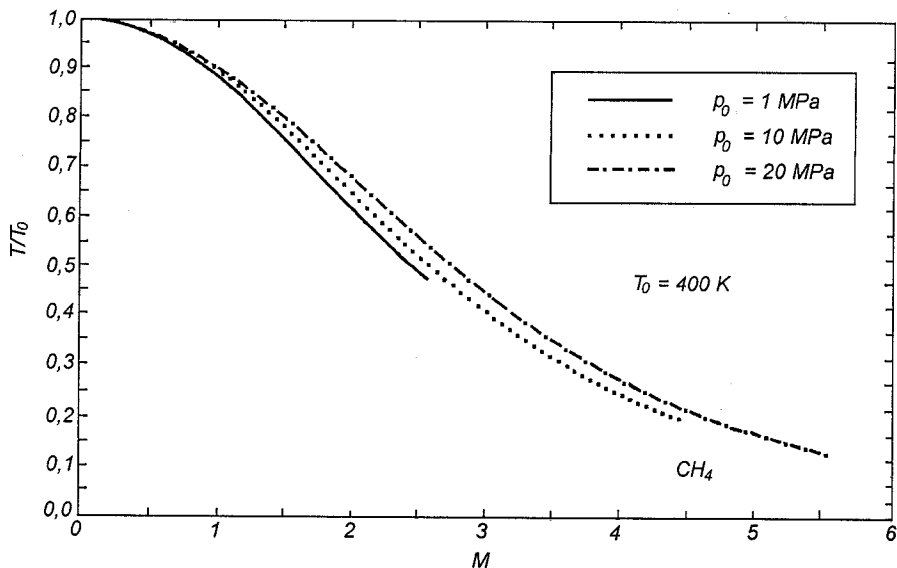
Rys. 14. Parametry przepływu izentropowego gazów rzeczywistych $\rho(p)$

Rys. 15. Parametry przepływu izentropowego gazów rzeczywistych $M(p)$ Rys. 16. Parametry przepływu izentropowego gazów rzeczywistych $u(p)$

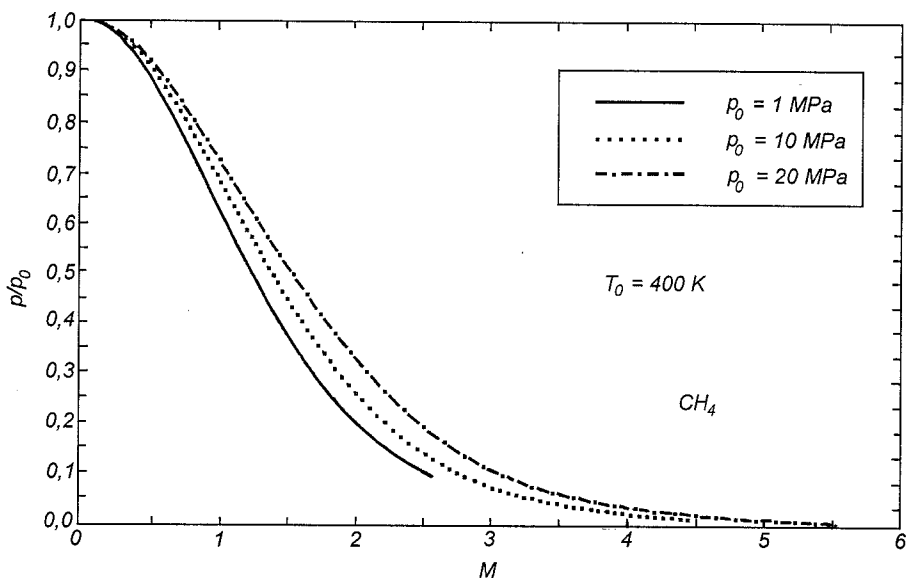
Tradycyjny sposób prezentacji wyżej otrzymanych wyników wymaga pokazania względnych zmian parametrów termodynamicznych i parametrów przepływowych w funkcji lokalnej liczby Macha. Na rysunkach 17–20 przedstawiono te zależności, z których wynika istotny wpływ parametrów spiętrzenia na lokalne wartości poszukiwanych funkcji gazu rzeczywistego.



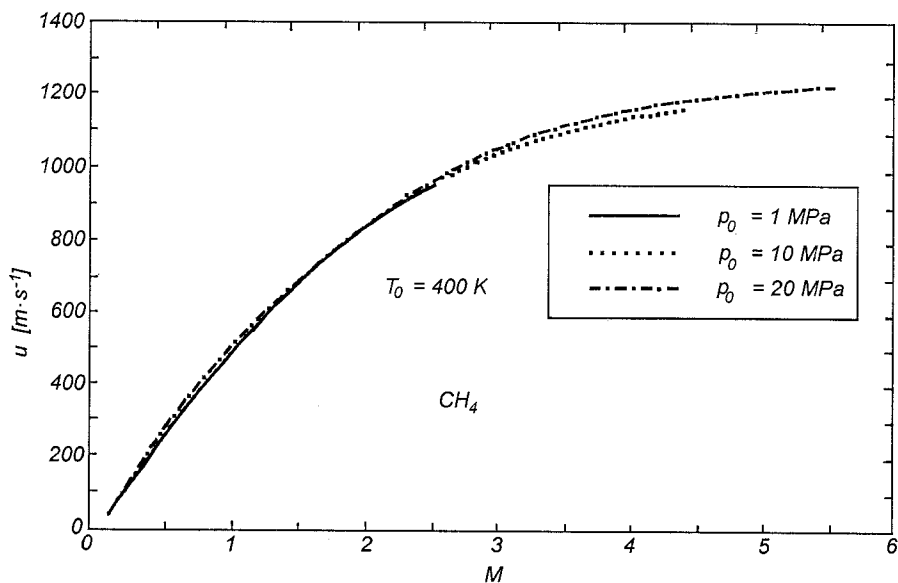
Rys. 17. Względna zmiana p/p_0 przepływu izentropowego metanu rzeczywistego w funkcji liczby Macha



Rys. 18. Względna zmiana T/T_0 przepływu izentropowego metanu rzeczywistego w funkcji liczby Macha



Rys. 19. Względna zmiana ρ/ρ_0 przepływu izentropowego metanu rzeczywistego w funkcji liczby Macha



Rys. 20. Względna zmiana u/u_0 przepływu izentropowego metanu rzeczywistego w funkcji liczby Macha

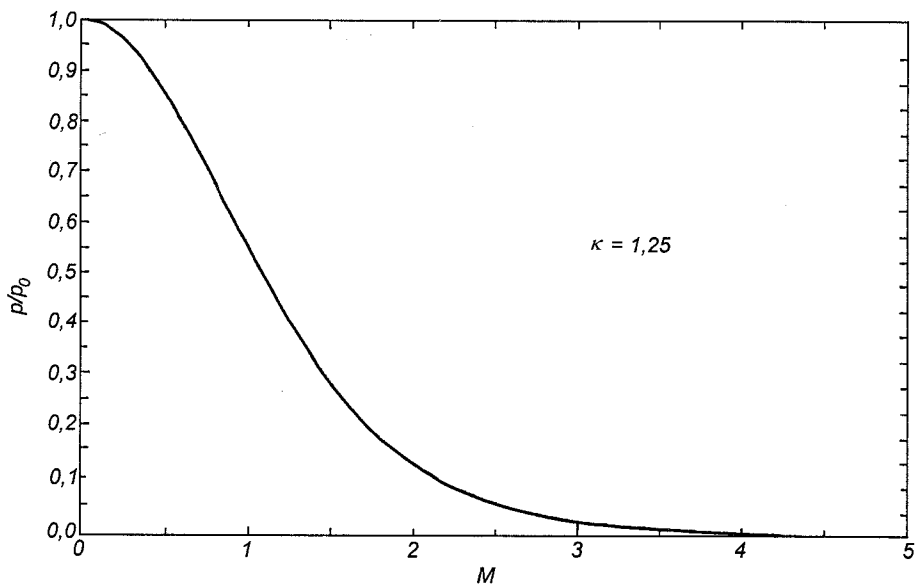
W dynamice gazu doskonałego względne zmiany parametrów przepływu, odniesione są do parametrów spiętrzenia, i nie zależą od wartości parametrów spiętrzenia (Szumowski i in. 1988)

$$\frac{T}{T_0} = \frac{1}{1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2} \quad (47)$$

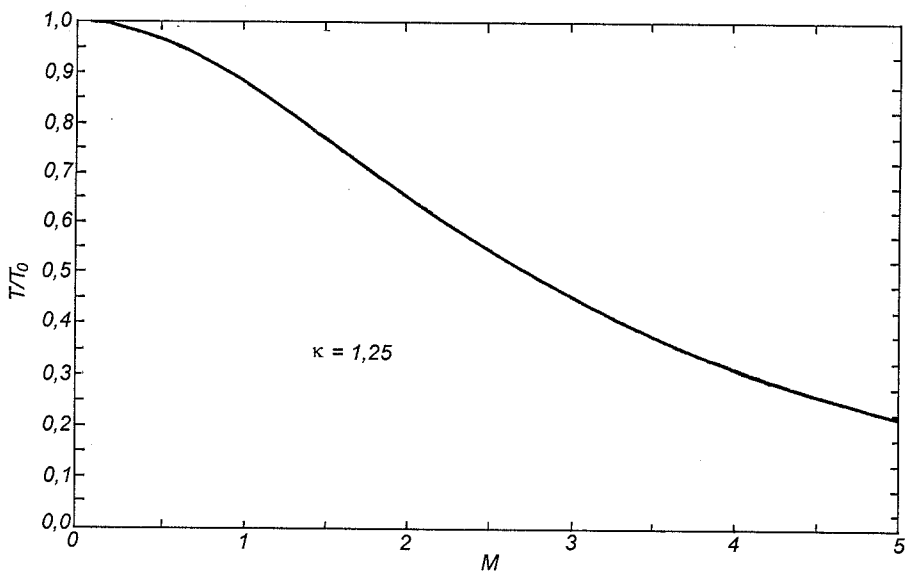
$$\frac{p}{p_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}}} \quad (48)$$

$$\frac{\rho}{\rho_0} = \frac{1}{\left(1 + \frac{\kappa - 1}{2} M^2\right)^{\frac{1}{\kappa - 1}}} \quad (49)$$

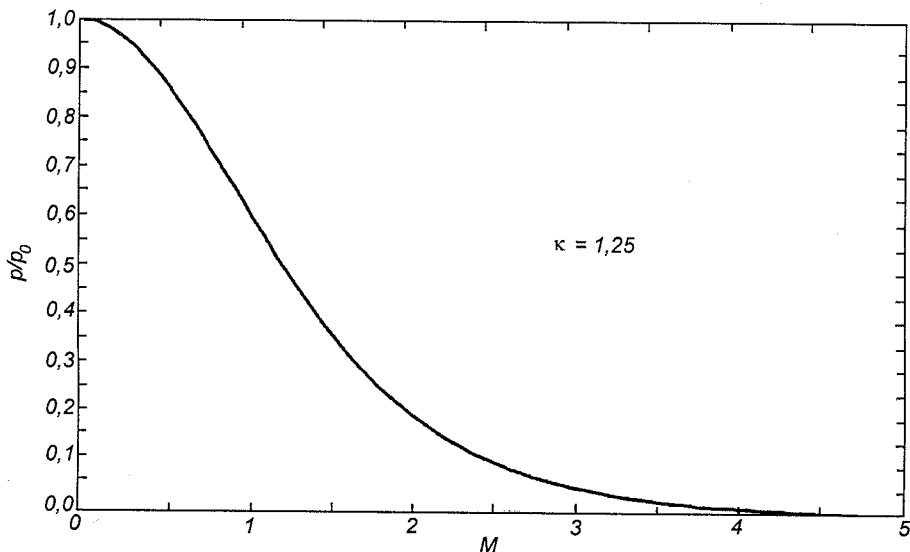
Na rys. 21–23 pokazano dla porównania zmiany funkcji przepływowych gazu doskonałego, zdefiniowanych wzorami (47–49), w funkcji liczby Macha. Parametrem wykresów jest wykładnik izentropy, równy $\kappa = 1,25$, co odpowiada jego wartości dla metanu traktowanego jako gaz doskonały. Porównując wykresy gazu rzeczywistego, rys. 17–20 z wykresami dla gazu doskonałego 21–23 widać niedostatki wywołane stosowaniem w każdym przepływowym zadaniu technicznym modelu gazu doskonałego. W celu wyraźniejszego przedstawienia wyżej wymienionych różnic, na rys. 24–26 zestawiono wyniki obliczeń dwóch modeli – gazu doskonałego i rzeczywistego opisanego równaniem



Rys. 21. Względna zmiana p/p_0 przepływu izentropowego gazu doskonałego o $\kappa = 1,25$ w funkcji liczby Macha



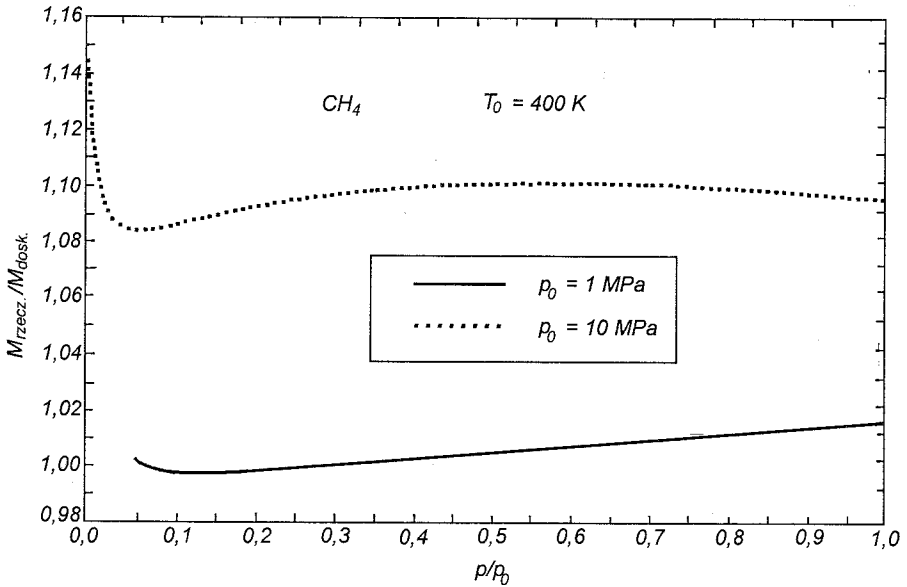
Rys. 22. Względna zmiana T/T_0 przepływu izentropowego gazu doskonałego o $\kappa = 1,25$ w funkcji liczby Macha



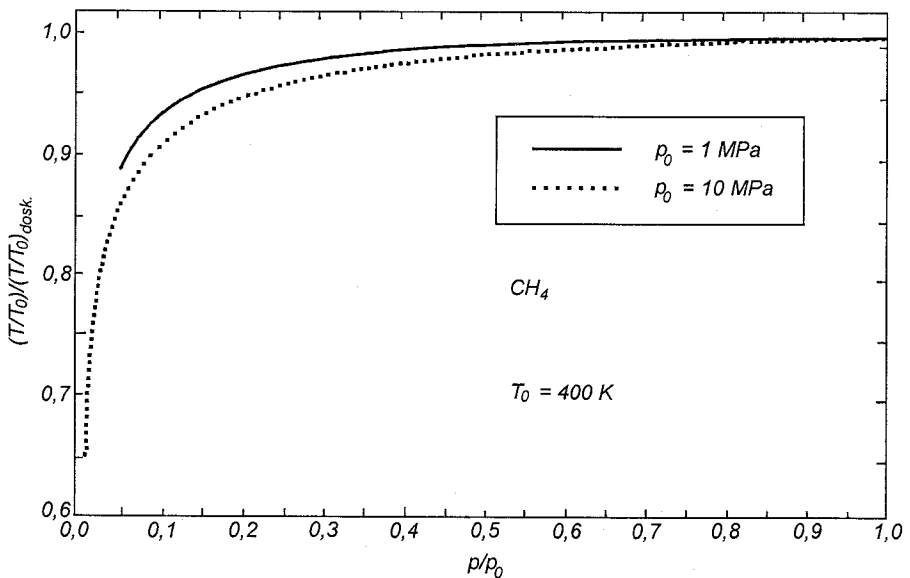
Rys. 23. Względna zmiana ρ/ρ_0 przepływu izentropowego gazu doskonałego o $\kappa = 1,25$ w funkcji liczby Macha

stanu Redlicha-Kwonga, w funkcji względnej zmiany ciśnienia, tj. lokalnej wartości ciśnienia odniesionej do ciśnienia spiętrzenia. Wszystkie obliczenia przeprowadzono dla metanu, o temperaturze spiętrzenia $T_0 = 400$ K. Jak widać z rys. 24 odstępstwa od modelu gazu doskonałego rosną ze wzrostem ciśnienia

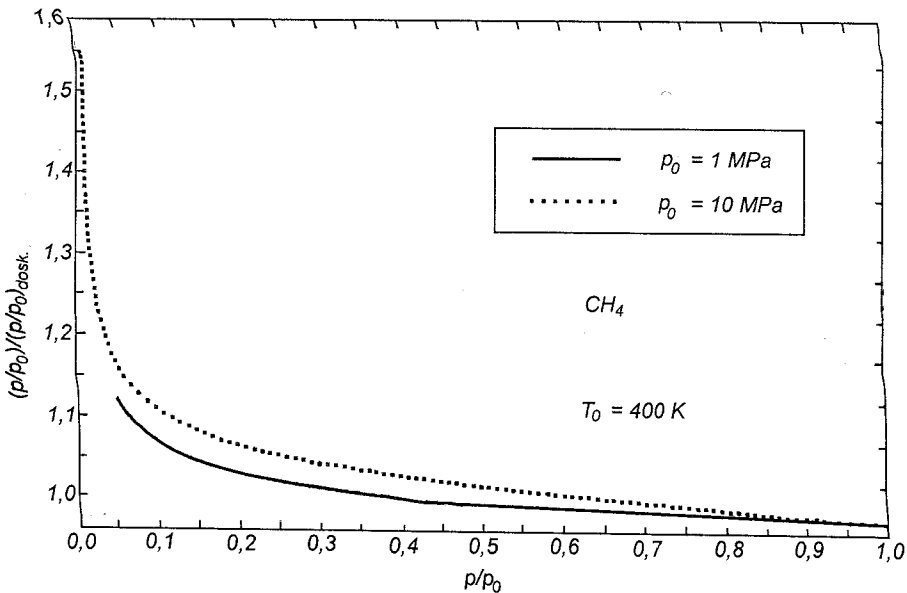
spiętrzenia. Największe odchylenia pojawiają się przy rozprężeniu gazu do bardzo małych ciśnień, co jest oczywiste, gdyż tam odgrywa znaczną rolę ściśliwość gazu. Rysunki 25 i 26 są potwierdzeniem wyżej sformułowanej tezy. Porównanie bezwzględnych wartości parametrów przepływu obu modeli gazu pokazano na rys. 27–29.



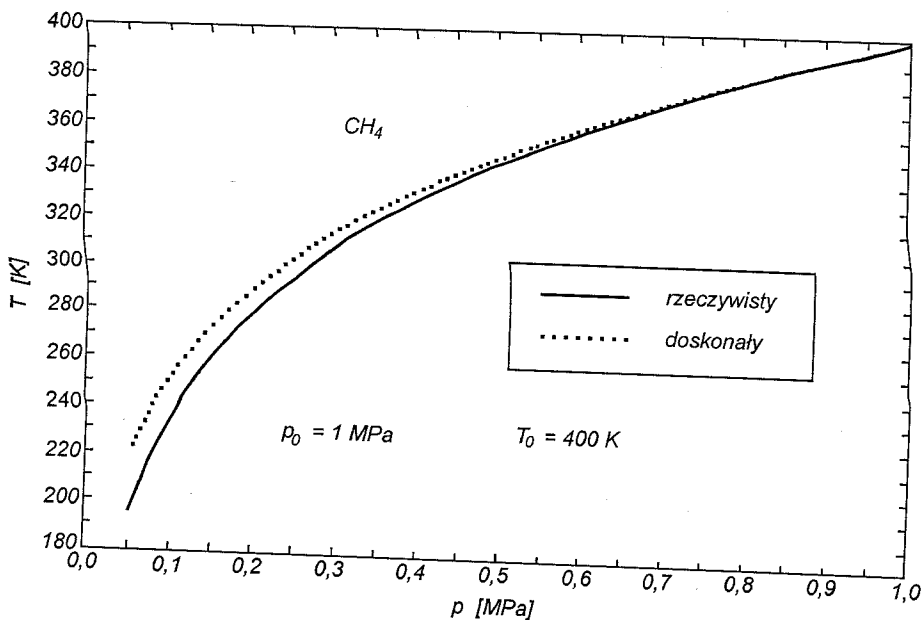
Rys. 24. Porównanie modeli gazu rzeczywistego i doskonałego (parametry względne)



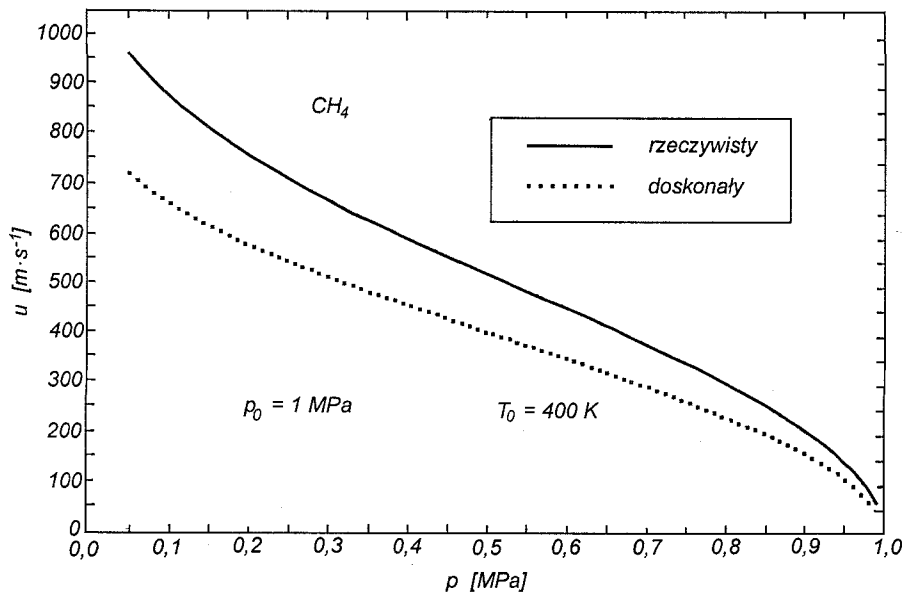
Rys. 25. Porównanie modeli gazu rzeczywistego i doskonałego (parametry względne)



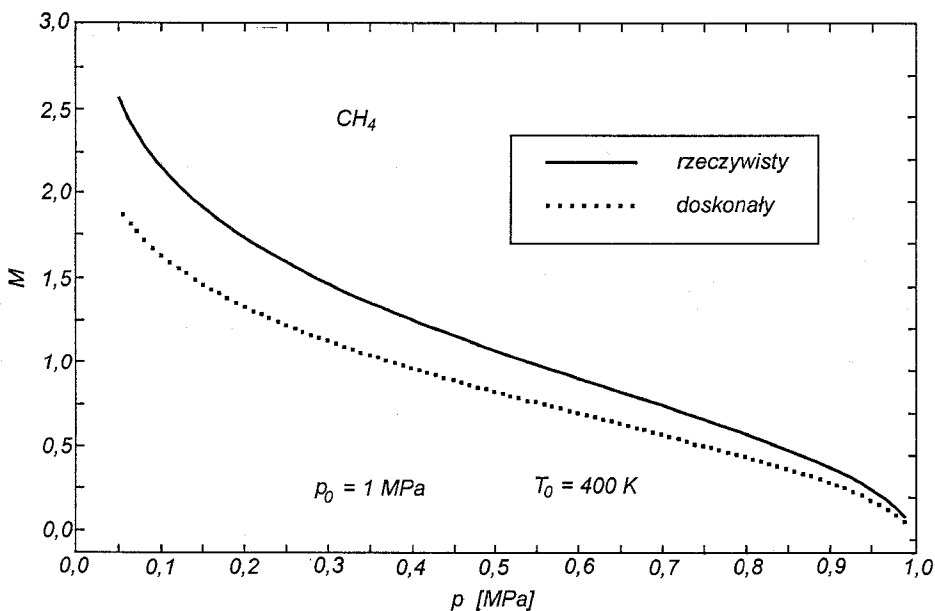
Rys. 26. Porównanie modeli gazu rzeczywistego i doskonałego (parametry względne)



Rys. 27. Porównanie modeli gazu rzeczywistego i doskonałego



Rys. 28. Porównanie modeli gazu rzeczywistego i doskonałego



Rys. 29. Porównanie modeli gazu rzeczywistego i doskonałego

3.2. PRZEPIY W USTALONY PRZEZ DYSZĘ

Izotropowy przepływ czynnika przez kanał o zmiennym przekroju zależy od parametrów czynnika w najwęższym miejscu kanału o przekroju A^* . Jeżeli w przekroju tym czynnik osiągnie parametry krytyczne, wtedy jego strumień masy osiąga wartość maksymalną

$$\dot{m}^* = \rho^* u^* A^* \quad (50)$$

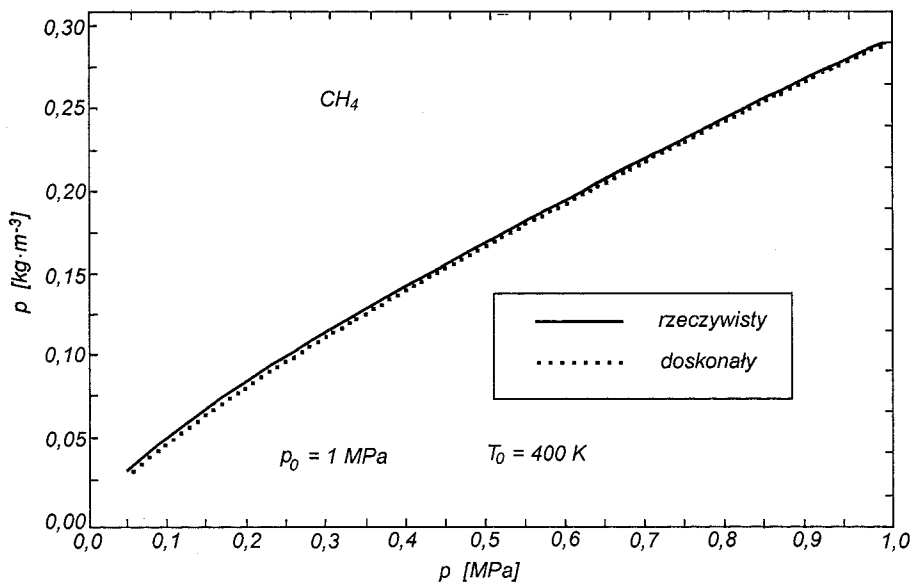
W obliczeniach przepływowych gazu rzeczywistego nie można skorzystać z prostej formuły stosowanej dla gazu doskonałego, ponieważ wszędzie tam, gdzie spełniona jest nierówność

$$\frac{p}{p_0} \leq \frac{p^*}{p_0} \quad (51)$$

w której

$$\frac{p^*}{p_0} = \left(\frac{2}{\kappa + 1} \right)^{\frac{\kappa}{\kappa - 1}} \quad (52)$$

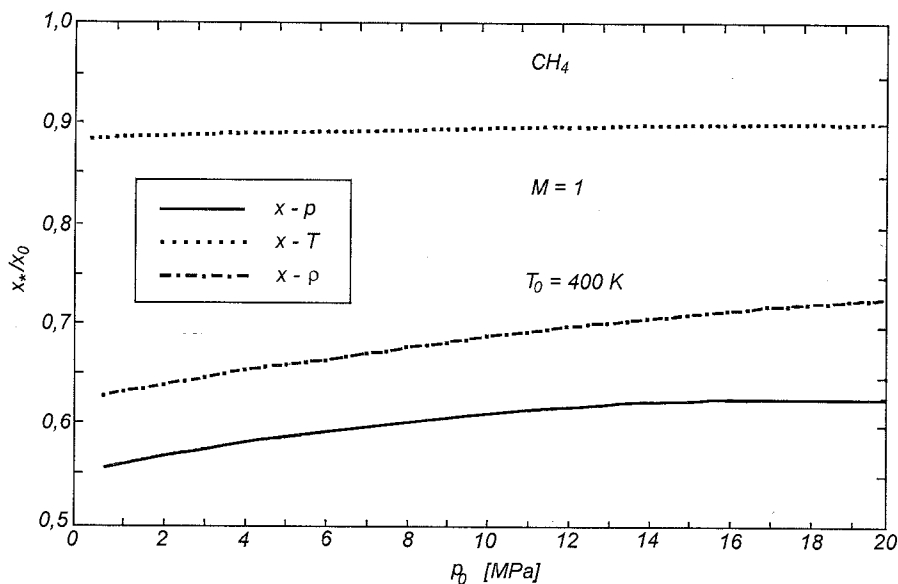
gaz osiąga parametry krytyczne w najwęższym przekroju.



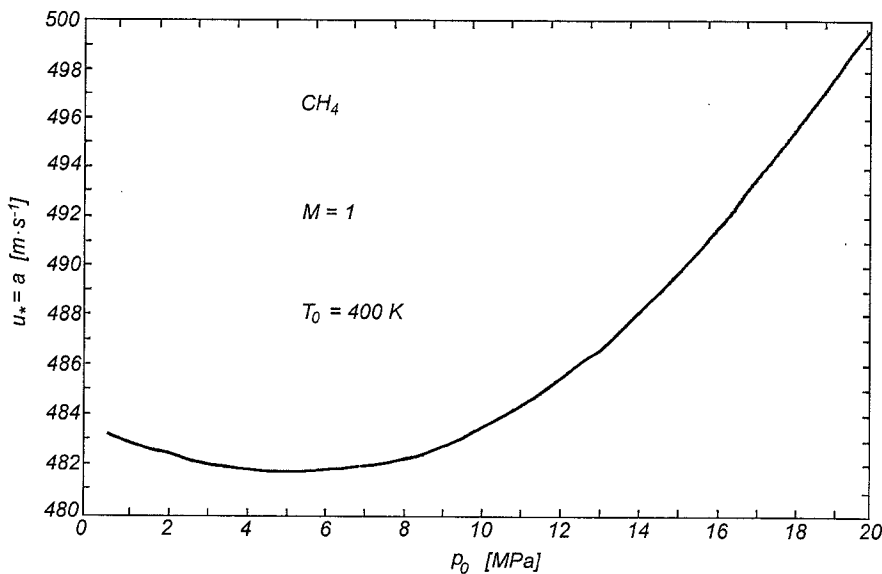
Rys. 30. Porównanie modeli gazu rzeczywistego i doskonałego

Na rysunku 30 pokazano, że prawa strona nierówności (51), która jest równa stosunkowi ciśnienia krytycznego do ciśnienia spiętrzenia, w gazie doskonałym jest liczbą wynikającą z równania (52), a w gazie rzeczywistym jest zależna od parametrów spiętrzenia. Wzrost ciśnienia spiętrzenia p_0 , przy ustalonej tempe-

raturze spiętrzenia T_0 , prowadzi do zmiany tego stosunku. Podobnie zależne są względne zmiany (odniesione do parametrów spiętrzenia) krytycznych wartości ciśnienia, temperatury i gęstości, co pokazano na rys. 31. Również i prędkość przepływu w przekroju krytycznym jest zależna od parametrów spiętrzenia, co pokazano na rys. 32. Należy zwrócić uwagę na fakt, że w modelu gazu doskonałego jest to funkcja tylko liczby stopni swobody molekuly.



Rys. 31. Względne zmiany krytycznych parametrów przepływu



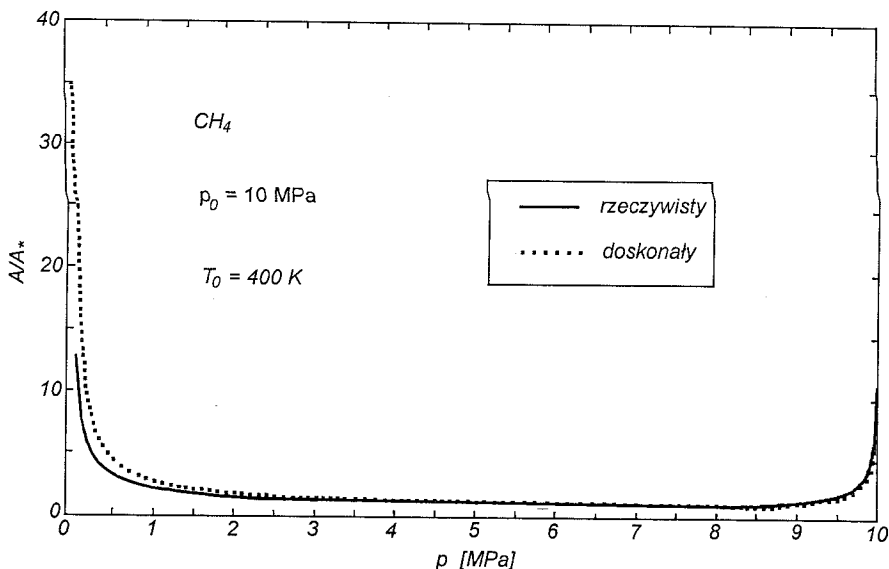
Rys. 32. Prędkość krytyczna w przepływie izentropowym

W przepływie gazu rzeczywistego konieczna jest zmieniona nierówność (51), w której każdorazowo należy jej wartość obliczyć iteracyjnie. Jest to oczywiście zupełnie niepotrzebne, ponieważ należy iteracyjnie wyznaczyć parametry krytyczne, to bezpośrednie obliczenie wydatku krytycznego (50) jest prostsze.

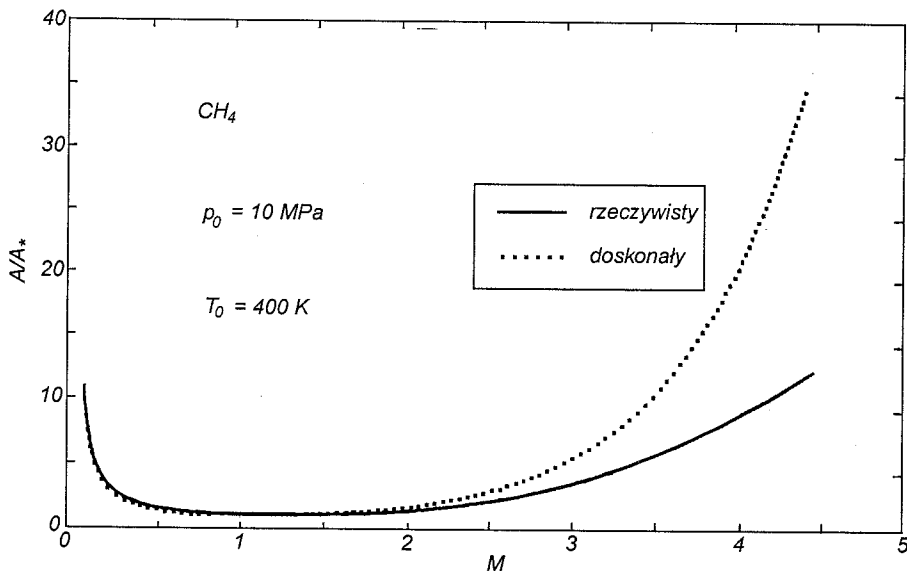
W przepływie przez dyszę Lavalą, gdy wypływ gazu jest krytyczny, gaz wypływa ze stałym strumieniem masy (50). Pozwala to znaleźć zależność, którą muszą spełniać kolejne przekroje dyszy. Z ciągłości strumienia masy wynika, że

$$\frac{A}{A^*} = \frac{\rho^*}{\rho} \frac{u^*}{u} \quad (53)$$

Zgodnie z wynikami tego paragrafu znane są już parametry krytyczne gazu. W rozdz. 3.1 przedstawiono sposób wyznaczenia parametrów przepływowych izentropowego przepływu dla gazu rzeczywistego, czyli znane są wszystkie zmienne występujące po prawej stronie równania (53). Pozwala to obliczyć wartości stosunku pól powierzchni kolejnych przekrojów odniesionych do pola powierzchni, w której panują parametry krytyczne. Wyniki obliczeń pokazano na rys. 33 i 34. Również i tutaj widać znaczny wpływ ściśliwości gazu. Z rysunku 34 można wyciągnąć niewłaściwy wniosek, że dla przepływów gazu poniżej liczby Macha równej 2 nie należy przejmować się modelem gazu rzeczywistego. Należy wyraźnie podkreślić, że obliczenia były robione dla metanu i parametrem w powyższych obliczeniach była temperatura spiętrzenia. Z tego wynika, że przy innej temperaturze mogą wystąpić większe różnice, a dla innego gazu (opisanego równaniem Redlicha-Kwonga) odstępstwa mogą być znaczne.



Rys. 33. Zmiana przekroju dyszy w funkcji ciśnienia



Rys. 34. Zmiana przekroju dyszy w funkcji liczby Macha

3.3. WYPŁYW CAŁKOWITY ZE ZBIORNIKA

Rozważa się wypływ całkowity gazu ze zbiornika o skończonej objętości. W miarę upływu czasu maleje ciśnienie gazu w zbiorniku oraz zmieniają się parametry przepływowe w przekroju wylotowym dyszy. Gdy średnica wylotowa dyszy jest znacznie mniejsza od charakterystycznego wymiaru zbiornika, wtedy do opisu wypływu można stosować wszystkie zależności wyprowadzone poprzednio. W związku z powyższym przyjęto, iż rozprężanie gazu w dyszy zbieżnej jest izentropowe, a gaz w zbiorniku ma stałą temperaturę T_0 .

Równaniem, które opisuje zmianę warunków w zbiorniku wywołaną wypływem gazu jest równanie ciągłości

$$\dot{m} dt = -V d\rho_0 \quad (54)$$

gdzie w zależności od relacji między ciśnieniem krytycznym i zewnętrznym otrzymuje się, że

gdy $p^* \geq p$, to

$$\dot{m} = \dot{m}^* = A \rho^* u^* \quad (55)$$

gdy $p^* < p$, to

$$\dot{m} = A \rho u \quad (56)$$

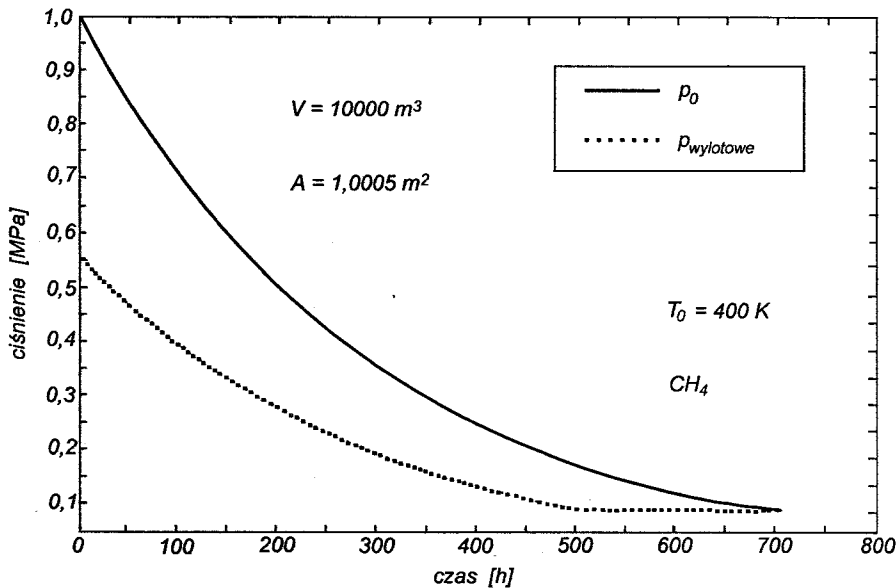
W przypadku gazu rzeczywistego zasadniczą trudność sprawia fakt, iż wyłone parametry krytyczne zależą od parametrów spiętrzenia. Ponieważ w tym przypadku temperatura spiętrzenia nie ulega zmianie, czyli $T_0 = \text{const}$, to

$$d\rho_0 = \left(\frac{\partial \rho_0}{\partial p_0} \right)_{T_0} dp_0 \quad (57)$$

Dodatkowo, wykorzystując relację podaną we wzorze (29), przekształca się zależność (54) do postaci

$$\frac{dp_0}{d\tau} = \frac{A}{V} v_0^2 \left(\frac{\partial p_0}{\partial v_0} \right)_{T_0} (\rho u) \quad (58)$$

w której ostatni człon (w nawiasie) jest krytyczny albo podkrytyczny, a v_0 oznacza objętość właściwą w warunkach spiętrzenia.



Rys. 35. Wy wpływ całkowity ze zbiornika przez dyszę zbieżną

Obliczenia realizuje się wg następującego algorytmu: dla znanej wartości chwilowej ciśnienia spiętrzenia p_0 znajduje się wartość parametrów krytycznych, wg metody opisanej w rozdz. 3.2.

– wszędzie tam gdzie $p^* \geq p$

$$\frac{p\tau}{dp_0} = \frac{V}{A v_0^2 \rho^* u^*} \frac{1}{\left(\frac{\partial p_0}{\partial v_0} \right)_{T_0}} \quad (59a)$$

– gdy $p^* < p$, to wtedy

$$\frac{t\tau}{dp_0} = \frac{V}{A v_0^2 \rho u} \frac{1}{\left(\frac{\partial v_0}{\partial p_0}\right)_{T_0}} \quad (59b)$$

gdzie ρ i u znajduje się metodą opisaną w rozdz. 3.1.

Równanie (59) całkuje się numerycznie, wykorzystując dowolną standardową procedurę komputerową. Wynik całkowania dla gazu opisanego równaniem Redlicha-Kwonga pokazano na rys. 35.

4. OGRANICZENIA FIZYCZNE

W przypadku, gdy gaz podlegający analizie jest mieszaniną, wtedy ze względu na trudności obliczeniowe należy zastosować równanie gazu rzeczywistego z uśrednionymi stałymi korelacyjnymi. W fizyce wykorzystuje się następujące zasady uśredniania:

a) liniowe

$$a = \sum_i x_i a_i \quad (60)$$

b) pierwiastka kwadratowego

$$a = \left(\sum_i x_i a_i^{0,5} \right)^2 \quad (61)$$

c) pierwiastka sześciennego

$$a = \left(\sum_i a_i^{1/3} \right)^3 \quad (62)$$

d) Lorentza

$$a = \frac{1}{4} \sum_i x_i a_i + \frac{3}{4} \left(\sum_i x_i a_i^{1/3} \right) \sum_i x_i a_i^{2/3} \quad (63)$$

Użycie dowolnej z nich do wyznaczenia stałych korelacyjnych równania stanu gazu umożliwi zastosowanie w obliczeniach dynamiki gazu (mieszaniny) wyżej przedstawionej teorii. Przykład zastosowania metody uśredniania można znaleźć np. w pracy Sado (1990).

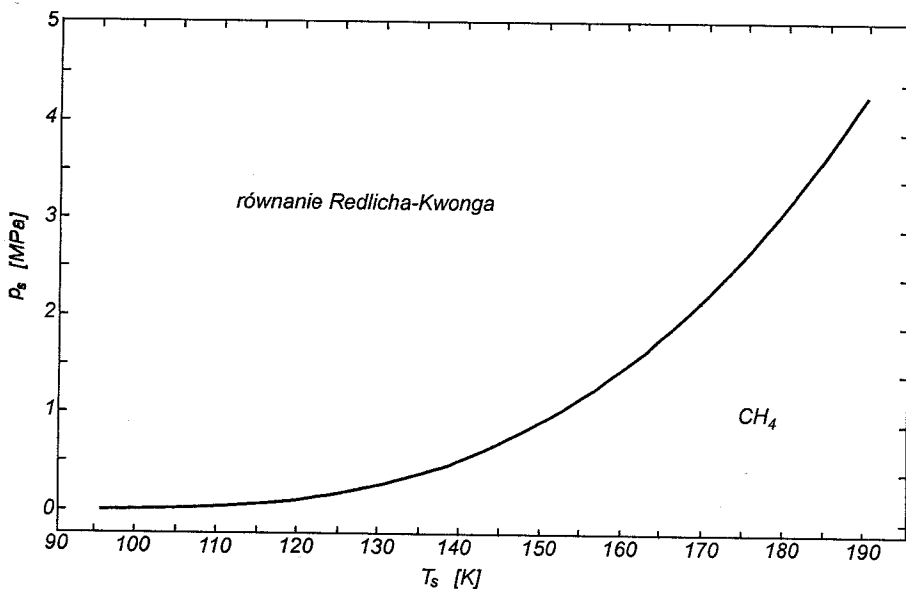
Granica zastosowań wyżej wymienionej metody jest stan nasycenia, w którym pojawia się mieszanina dwufazowa. Przedstawiona metoda obliczeń może być stosowana tylko do stanu gazowego, jednofazowego. Każde równanie stanu

gazu rzeczywistego generuje własne, nie zawsze poprawne parametry stanu rzeczywistego. W każdym przypadku należy obliczyć parametry tego stanu, wykorzystując metodę Maxwella opisaną np. w pracy Staniszewskiego (1969). Zasada metody jest następująca: w obszarze pary wilgotnej, izoterma $T < T_*$ wynikająca z równania stanu np. (15) jest linią falistą, która w przecięciu z izobarą daje trzy pierwiastki ($v_1 = v_{\min} < v_2 < v_3 = v_{\max}$). Ze względów stabilnościowych izobara w obszarze dwufazowym musi być tak dobrana, żeby pole obszaru ograniczonego linią analityczną $T = \text{const}$, a izobarą było prawie równe zero. Dla dwuparametrowych równań stanu sprowadza się to do warunku, że

$$\left| p(v_3 - v_1) - \int_{v_1}^{v_3} p \, dv \right| \leq \epsilon \quad (64)$$

Gdy równaniem stanu jest równanie (4), to warunek (64) sprowadza się do postaci

$$\left| p(v_3 - v_1) - RT \ln \frac{v_3 - b}{v_1 - b} + \frac{a}{T^{0.5} b} \ln \frac{v_3(v_1 + b)}{v_1(v_3 + b)} \right| \leq \epsilon \quad (65)$$

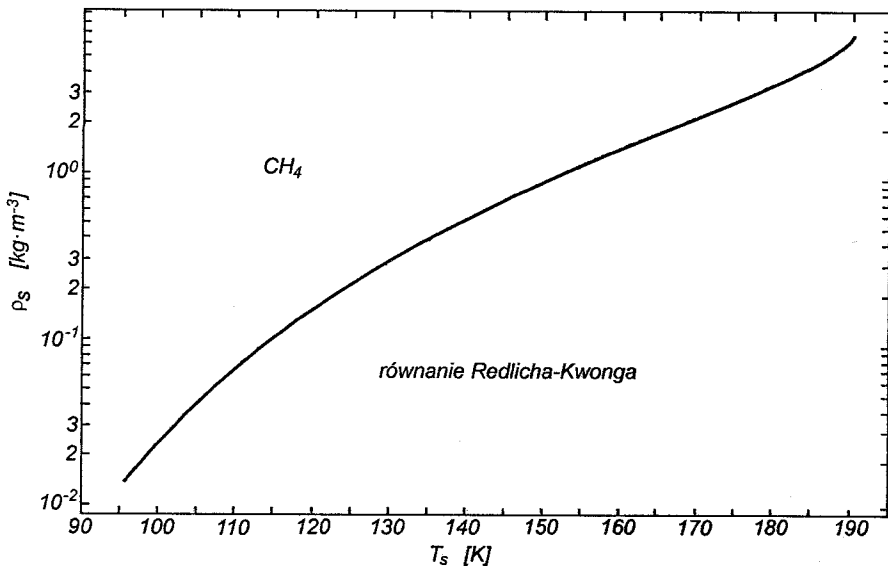


Rys. 36. Krzywa nasycenia metanu opisanego równaniem Redlicha-Kwonga

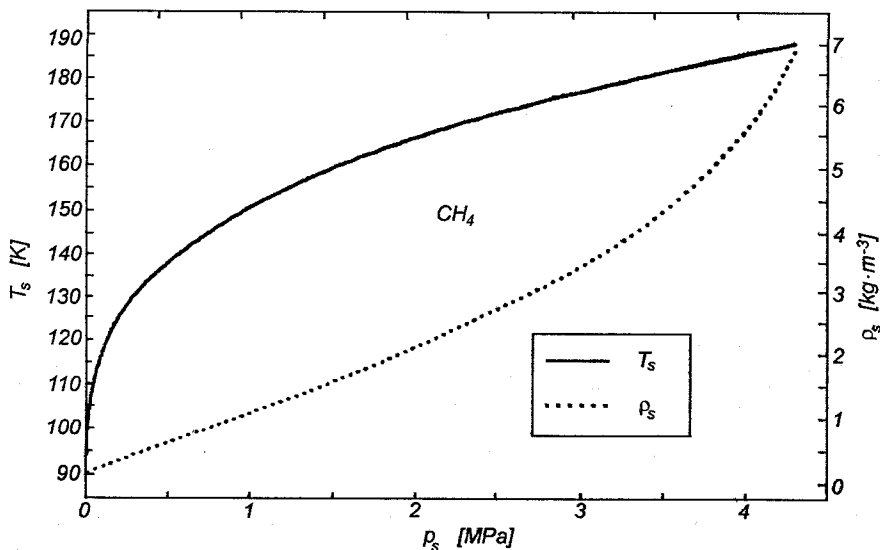
Obliczoną krzywą nasycenia dla metanu, opisanego równaniem Redlicha-Kwonga, pokazano na rys. 36. Na rys. 37 pokazano zależność gęstości metanu w stanie nasycenia od temperatury nasycenia. Zależność od ciśnienia pokazano na rys. 38. Porównując wyniki, pokazane przykładowo na rys. 13 i 14 z rys. 36,

znajduje się graniczne wartości parametrów przepływu, które mogą być obliczone przy wykorzystaniu równania stanu Redlicha-Kwonga.

W przypadku mieszania gazowych graniczne parametry przepływu określa ten czynnik, który ma najwyższą temperaturę punktu rosy.



Rys. 37. Parametry termodynamiczne metanu na linii nasycenia



Rys. 38. Parametry termodynamiczne metanu na linii nasycenia

5. PODSUMOWANIE

Porównując wyniki przedstawionych obliczeń można stwierdzić, że parametry przepływu gazu rzeczywistego znacznie się różnią od tych, które otrzymuje się przy korzystaniu z przybliżonego modelu gazu doskonałego. Przedstawiona w pracy metoda obliczeniowa jest bardzo ogólna. Wymaga jedynie, żeby równanie stanu gazu rzeczywistego miało zależność funkcyjną $p = p(T, v)$. Gdy ten warunek jest spełniony, to znalezienie funkcji materiałowych gazu rzeczywistego, jego parametrów w przepływie izentropowym ustalonym i nieustalonym nie stanowi żadnego problemu.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Cambel A.B., Jennigs B.H.: Gas dynamics. McGraw-Hill, New York 1958.
- [2] Danehyar H.: One-dimensional compressible flow. Pergamon Press, Oxford 1976.
- [3] Reid R.C., Sherwood T.K.: The transport properties of gases and liquids. McGraw-Hill, New York 1966.
- [4] Reid R.C., Prausnitz J.M., Sherwood T.K.: The properties of gas and liquids. McGraw-Hill, New York 1977.
- [5] Sado J.: Wybrane zagadnienia termodynamiki. WPW, Warszawa 1990.
- [6] Staniszewski B.: Termodynamika. PWN, Warszawa 1969.
- [7] Szumowski A., Selerowicz W., Piechna J.: Dynamika gazów. WPW, Warszawa 1988.

ONE-DIMENSIONAL FLOW OF REAL GASES

Summary

The paper presents a calculation method for parameters of one-dimensional flow of real gases. The state equation for these gases has the form $p = p(T, v)$. For real gases, method of calculation of the thermodynamic functions: specific heat, entropy, enthalpy and sound velocity are presented. The steady and unsteady one-dimensional isentropic flows are analysed. Theoretical part of the paper is illustrated by calculations, in which the Redlich-Kwong equation of state was used. Finally, the physical limitation of the method presented are discussed.