

Paweł Zaręba

Instytut Techniki Ciepłej

## WYPROWADZENIE ROZSZERZONEJ ZALEŻNOŚCI YOUNGA METODĄ BILANSOWĄ

W pracy podano wyprowadzenie równania Younga rozszerzonego o dodatkowy człon opisujący siłę wywołaną napięciem liniowym. Jest to parametr materiałowy zależny od wszystkich stykających się ze sobą faz. Wyprowadzenie opiera się na metodzie bilansowej, opisanej szczegółowo w podanej literaturze. Wynikiem przedstawionej analizy jest stwierdzenie, że w przypadku nieruchomej linii styku trzech faz pojawia się dodatkowa siła wprost proporcjonalna do napięcia liniowego, odwrotnie proporcjonalna do promienia krzywizny linii styku trzech faz i skierowana do środka tej krzywizny. Istnienie tej siły wpływa na warunki równowagi na zakrzywionej linii styku trzech faz.

### SPIS WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- $a$  – napięcie powierzchniowe
- $b$  – napięcie liniowe
- $e$  – wersory osi układu współrzędnych
- $p$  – ciśnienie
- $u$  – prędkość barycentryczna
- $w$  – prędkość referencjalna
- $\rho$  – gęstość masy
- $\overline{\overline{\pi}}_s$  – gęstość strumienia przestrzennej wymiany pędu, ( $\overline{\overline{\pi}}_s = \overline{\overline{\pi}}_{me} + \rho \overline{\overline{u}} \cdot \overline{\overline{u}}$ )
- $\overline{\overline{\pi}}_{me}$  – naprężenia mechaniczne
- $\overline{\overline{\pi}}_v$  – tensor naprężeń lepkich
- $\delta^2 \overline{s}$  – wektor powierzchni czoła rurki otaczającej linię osiową
- $\overline{\mathbf{l}}$  – wektor jednostkowy styczny do linii osiowej

## Indeksy dolne

$\bar{w}$  – wartość referencjalna

$\circ \rightarrow \cdot$  – przejście graniczne od rurki do linii osobliwej

## Symbole matematyczne

$\text{Div}$  – dywergencja liniowa

$\lim_{\circ \rightarrow \cdot}$  – granica pozorną dla przejścia od rurki do linii

$\overline{\overline{\overline{\vec{A} \cdot \vec{B}}}}(A_i B_j)$  – iloczyn diadowy wektorów

$\overline{\overline{\overline{\vec{a} \cdot \vec{b}}}}(a_{ik} b_{il})$  – iloczyn tensorowy tensorów

$\overline{\overline{\overline{\vec{A} \cdot \vec{a}}}}(A_i a_{ij})$  oraz  $\overline{\overline{\overline{\vec{a} \cdot \vec{A}}}}(a_{ij} A_j)$  – iloczyny afinorowe

$\overline{\overline{\overline{\vec{A} \times \vec{a}}}}(\varepsilon_{ijk} A_j a_{kl})$  – iloczyn tensorowy wektora i tensora

Liczba kresek nad danym symbolem oznacza jego rząd tensorowy.

## WSTĘP

Wszystkie przedstawione poniżej pojęcia i oznaczenia są oparte na jednolitej konwencji zaprezentowanej w dwóch pracach prof. Jerzego Rutkowskiego:

– „Podstawy bilansowania masy, pędu, energii i entropii” [1],

– „Foundations of Balancing at Mobile Phase Interface” [2].

Teoretyczne podstawy bilansowania na linii styku trzech faz wraz z dokładnym wyprowadzeniem różniczkowych i całkowych bilansów wielkości ekstenywnych są podane w artykule J. Rutkowskiego i P. Zaręby pt. „Foundations of Balancing at Singular Line” [3].

## 1. BILANS PĘDU MASY NA LINII OSOBLIWEJ

Podstawowa w niniejszej pracy wielkość wektorowa  $\bar{b}$  jest wprowadzona w pracy [3] przez analogię do napięcia powierzchniowego i jest zdefiniowana jako (patrz [2])

$$\bar{b} = \lim_{\circ \rightarrow \cdot} \overline{\overline{\overline{\delta^2 \vec{s} \cdot \vec{\pi}_s}}} \quad (1)$$

Wielkość tę nazwano napięciem liniowym i jest ona granicą pozorną iloczynu afinorowego tensora naprężenia przez wektor proporcjonalny do przekroju cienkiej rurki (i normalny do tego przekroju) przy zmniejszaniu średnicy rurki do wartości odpowiadającej rozmiarom obszaru osobliwego w pobliżu linii styku trzech faz.

Aplikując powyżej opisaną wielkość do bilansu pędu masy na linii i stosując przekształcenia i reguły opisane w pracy [2], można otrzymać równanie bilansu pędu masy w referencjalnym punkcie linii osobliwej w postaci:

$$\overline{\overline{\overline{1}} \cdot \overline{\text{grad}} \overline{\overline{b}}} - \sum_{i=1}^n \overline{\overline{\overline{1}} \cdot \overline{\overline{a}}_i} - \overline{\overline{\overline{1}} \cdot \overline{\text{DIV}}} \left[ \overline{\overline{\overline{\pi}}}_{me} + \rho (\overline{\overline{u}} - \overline{\overline{w}}) \cdot \overline{\overline{u}} \right] = 0 \quad (2)$$

Powyższy bilans można przekształcić w bilans całkowy zgodnie z regułami o równoważności bilansów opisanymi w pracy [1].

## 2. BILANS PĘDU MASY NA RUCHOMEJ I ODKSZTAŁCALNEJ LINII STYKU TRZECH FAZ

Linia styku trzech faz jest szczególnym przypadkiem linii osobliwej. Fizycznie w analizie zjawisk zwilżania przez fazy rozumiemy ciecz, ciało stałe i gaz bądź drugą ciecz. Z punktu widzenia analizy tensorowej różniczkowy bilans pędu na linii styku trzech faz jest opisany równaniem (2) przy ograniczeniu ilości prze-gród międzyfazowych do  $n = 3$ :

$$\overline{\overline{\overline{1}} \cdot \overline{\text{grad}} \overline{\overline{b}}} - \sum_{i=1,2,3} \overline{\overline{\overline{1}} \cdot \overline{\overline{a}}_i} - \overline{\overline{\overline{1}} \cdot \overline{\text{DIV}}} \left[ \overline{\overline{\overline{\pi}}}_{me} + \rho (\overline{\overline{u}} - \overline{\overline{w}}) \cdot \overline{\overline{u}} \right] = 0 \quad (3)$$

Członu pierwszego, opisującego wymianę pędu między linią styku trzech faz a jej otoczeniem liniowym, nie da się w przypadku dynamicznym uprościć, gdyż musimy w napięciu liniowym, zgodnie z jego definicją, uwzględnić wpływ pełnego tensora naprężeń wraz z jego częścią lepka. Dodatkowym, nie rozwiązaniem dotychczas problemem jest zagadnienie odpowiedniości liniowych związków konstytutywnych do rzeczywistości fizycznej w pobliżu linii styku trzech faz. W przypadku ogólnym wektor liniowego napięcia powierzchniowego  $\overline{\overline{b}}$  nie jest równoległy do linii styku trzech faz i należy w bilansie (2) analizować wymianę pędu między linią osobliwą i jej otoczeniem liniowym w postaci pełnego iloczynu afinorowego, którego produktem jest wektor mający zarówno składową styczną do linii, jak i składową normalną.

Również w analizie wymiany pędu między linią styku trzech faz i jej otoczeniem powierzchniowym (opisuje ją drugi człon równania (3)) musimy uwzględnić wpływ tensora naprężeń lepkich na wielkość tensora napięcia powierzchniowego. Zagadnienie to, choć wstępnie omówione w pracy [2], wciąż

nie poddaje się szczegółowej analizie. Oddzielnym zagadnieniem pozostaje wpływ temperatury i koncentracji składników roztworu na wielkość napięcia powierzchniowego.

Trzeci człon równania (3), opisujący wymianę pędu między linią styku trzech faz a jej otoczeniem przestrzennym zawiera tensor dywergencji liniowej określony zgodnie z definicją podaną w pracy [2]:

$$\overline{\text{Div}} \overline{\pi}_{me} = \mathbf{1}_l \lim_{\delta r \rightarrow 0} \left\{ \delta r \sum_{i=1}^m \int_{\vartheta_i} \overline{\mathbf{1}}_r \cdot \overline{\pi}_{me} d\vartheta \right\} \quad (4)$$

gdzie  $\vartheta_i$  jest kątem zajmowanym przez  $i$ -ty sektor otoczenia przestrzennego, a  $\overline{\mathbf{1}}_l$  wektorem jednostkowym stycznym do linii osobliwej.

Niestety, w przypadku linii styku trzech faz, naprężenia mechaniczne w każdej z nich są opisane za pomocą innego tensora. Pamiętajmy, że w ciele stałym występują naprężenia sprężyste, ciecz jest nieściśliwa, a w gazie występują zarówno naprężenia lepkie, jak i ciśnieniowe (hydrostatyczne). Niezerowanie się członu wymiany do otoczenia przestrzennego jest powodem powstawania dodatkowych sił mających wpływ na wielkość kąta zwilżania w przypadku dynamicznym. Niestety, trudności natury matematycznej i niemożność dokonania racjonalnej analizy fizycznej zjawisk zachodzących w pobliżu linii styku trzech faz w przypadku dynamicznym uniemożliwiły określenie wszystkich członów w bilansie pędu w sposób pozwalający na dokonanie choćby szacunkowych obliczeń.

### 3. BILANS PĘDU NA LINII STYKU TRZECH FAZ W PRZYPADKU STATYCZNYM

W przypadku bilansowania pędu masy na linii osobliwej, która z fenomenologicznego punktu widzenia jest linią styku trzech faz, całkowita wymiana pędu między linią osobliwą a powierzchnią nieciągłości składa się tylko z trzech składników, tzn.  $i = 3$ . Ponieważ rozpatrujemy linię nieruchomą, to zarówno prędkość substancjalna (barycentryczna)  $\overline{\mathbf{u}}$ , jak i prędkość referencjalna  $\overline{\mathbf{w}}$  są tożsamościowo równe zeru.

W rozpatrywanym przez nas przypadku również tensor naprężeń podlega daleko idącym uproszczeniom. Dla płynu mamy:

$$\overline{\pi}_{me} = \overline{\mathbf{1}} p + \overline{\pi}_v, \quad (5)$$

gdzie  $\overline{\pi}_v$  – tensor naprężeń lepkich. Tensor ten jest funkcją tensora prędkości deformacji  $\overline{\text{grad}} \overline{\mathbf{u}}$  obszaru substancjalnego. Jeżeli prędkość ta nie jest zbyt

duża a ośrodek ma właściwości liniowe, to  $\overline{\pi}_v$  można wyrazić uogólnionym prawem Newtona:

$$\overline{\pi}_v = -\eta_b \overline{\mathbb{1}} \operatorname{div} \overline{u} - \eta_s \overline{\operatorname{grad}}^{ds} \overline{u} \quad (6)$$

Oczywiście w przypadku statycznym  $\overline{\pi}_v$  jest tożsamościowo równy zeru, więc

$$\overline{\pi}_{me} = \overline{\mathbb{1}} p \quad (7)$$

Występujący w drugim członie równania (3) tensor napięcia powierzchniowego  $\overline{a}$  jest sumą 2 składników (patrz [2]):

1) hydrostatycznego związanego z nieskończonym z fenomenologicznego punktu widzenia skokiem ciśnienia wewnątrz plastra otaczającego powierzchnię osobliwą (jest to związane z interpretowaniem sił kohezji na powierzchni rozdziału faz jako efektu działania bardzo dużego ujemnego ciśnienia w cienkiej warstwie pomiędzy fazami),

2) lepkościowego

$$\overline{a} = \overline{a}_v + \overline{a}_p \quad (8)$$

gdzie:  $\overline{a}_v$  – lepkościowa część tensora napięcia powierzchniowego,

$\overline{a}_p$  – hydrostatyczna część tensora napięcia powierzchniowego, która (patrz [2]) jest definiowana w poniższy sposób:

$$\overline{a}_p = -\lim \overline{\delta l}_n \times \overline{\mathbb{1}} p \quad (9)$$

tzn. jako granica iloczynu wektorowej grubości plastra otaczającego powierzchnię osobliwą i sferycznego tensora ciśnienia hydrostatycznego.

Można udowodnić [2], że ciśnieniowa część napięcia powierzchniowego jest tensorem antysymetrycznym, a więc możemy ją zapisać w poniższej postaci:

$$\overline{a}_p = \overline{a}_p = \overline{l}_n \times \overline{\mathbb{1}} a = \overline{\mathbb{1}} \times \overline{l}_n a \quad (10)$$

gdzie  $a$  – statyczne skalarnie napięcie powierzchniowe jest definiowane przez analogię do (9) jako

$$a = -\lim (\delta l_n p) \quad (11)$$

gdzie  $\delta l_n$  jest skalarną grubością płata otaczającego powierzchnię osobliwą.

Kolejnym rozpatrywanym przez nas składnikiem bilansu pędu masy na nieruchomej linii rozdziału trzech faz będzie człon opisujący transport pędu między linią osobliwą a jej otoczeniem liniowym (tak naprawdę, ponieważ analizujemy bilans pędu masy na linii styku trzech faz w jego postaci różniczkowej, jest to wyrażenie opisujące gęstość strumienia transportu pędu wzdłuż linii). Rozpatrzmy najpierw konsekwencje wynikające ze statycznego punktu widzenia.

Pamiętając, że dla  $\bar{w} = 0$  tensor naprężeń mechanicznych  $\pi_{mc}$  degeneruje się do sferycznego tensora naprężeń hydrostatycznych (patrz zależność 7) możemy napięcie liniowe przedstawić (analogicznie do zależności 11) w następującej postaci:

$$\bar{b}_p = \lim_{\delta^2 s \dots} \overline{\delta^2 s \dots \bar{1} p} = \bar{1}_| \lim_{\delta^2 s \dots} (\delta^2 s \dots p) = \bar{1}_| b \quad (12)$$

gdzie  $\delta^2 s \dots$  jest skalarną powierzchnią czoła rurki otaczającej linię osobliwą.

Przez analogię do (11) wartość granicy iloczynu skalarnej powierzchni czoła rurki i ciśnienia będziemy nazywać skalarnym napięciem liniowym:

$$b = \lim_{\delta^2 s \dots} (\delta^2 s \dots p) \quad (13)$$

Oczywiście  $\bar{b} = \bar{1}_| b$  jest wektorem stycznym do linii styku trzech faz i jest odpowiednikiem ciśnieniowego napięcia powierzchniowego. Być może opisuje ono (musi być przy tym ujemne) siłę adhezji, dzięki której trzy fazy na linii wzajemnego styku nie rozchodzą się, pozostawiając próżnię.

Aplikując (13) do członu bilansu pędu przedstawiającego transport pędu do otoczenia liniowego, możemy bilans ten przedstawić w postaci:

$$\bar{1}_| \overline{\text{grad } \bar{b}} = \bar{1}_| \overline{\text{grad } (\bar{1}_| b)} \quad (14)$$

Stosując poniższą zależność:

$$\bar{B} \overline{\text{grad } \bar{1} b} = b \bar{B} \overline{\text{grad } \bar{1}} + \bar{B} \overline{\text{grad } b} \bar{1} \quad (15)$$

oraz zależności (1.33) i (1.20a) ze skryptu Rutkowskiego [1], prawą stronę równania (14) można przedstawić w poniższej postaci:

$$\bar{1}_| \overline{\text{grad } \bar{1}_| b} = b \bar{1}_| \overline{\text{agrad } \bar{1}_|} + b \bar{1}_| \times \overline{\text{rot } \bar{1}_|} + \bar{1}_| (\bar{1}_| \overline{\text{grad } b}) \quad (16)$$

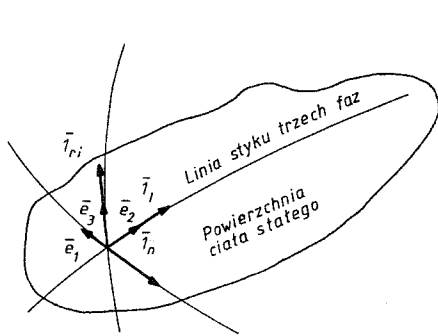
Pierwszy składnik prawej strony powyższego równania jest równy zero, ponieważ z praw algebry tensorowej wynika poniższy związek:

$$\bar{1}_| \overline{\text{agrad } \bar{1}_|} = \frac{1}{2} \overline{\text{grad } (\bar{1}_|^2)} = \frac{1}{2} \overline{\text{grad } 1} = 0 \quad (17)$$

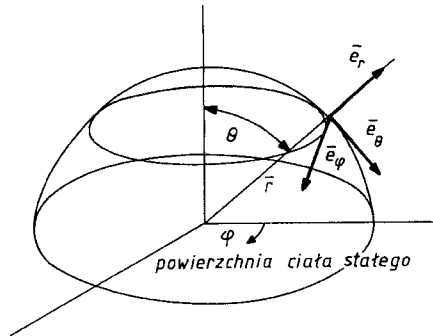
Trzeci człon redukuje się do  $\overline{\text{grad } b}$ , przy czym  $b$  jest określone jedynie na linii osobliwej.

Aby jednoznacznie zinterpretować drugi człon prawej strony równania (16), musimy zanalizować konsekwencje stosowania określonego układu współrzędnych. Na rysunku 1 przedstawiono zastosowany w niniejszej pracy układ współrzędnych krzywoliniowych. Przez  $\bar{1}_|$  oznaczono wektor jednostkowy styczny do linii styku trzech faz,  $\bar{1}_{ri}$  – wektor jednostkowy styczny do powierzchni nieciągłości (linia osobliwa jest miejscem wspólnym powierzchni nieciągłości),  $\bar{1}_n$  – wektor jednostkowy normalny do powierzchni nieciągłości

(oczywiście wektory  $\bar{\mathbf{1}}_n$ ,  $\bar{\mathbf{1}}_{r_i}$  i  $\bar{\mathbf{1}}_l$  są wzajemnie ortonormalne);  $\bar{\mathbf{e}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{e}}_2$ ,  $\bar{\mathbf{e}}_3$  są wersorami krzywoliniowego układu ortogonalnego. Należy spostrzec, że zwrot  $\bar{\mathbf{1}}_n$  jest przeciwny do zwrotu odpowiedniego wersora ze względu na przyjętą konwencję znaków [2].



Rys. 1. Układ współrzędnych krzywoliniowych użyty w niniejszej pracy



Rys. 2. Układ współrzędnych sferycznych, dla którego  $\bar{\mathbf{e}}_r = \bar{\mathbf{e}}_1$ ,  $\bar{\mathbf{e}}_\varphi = \bar{\mathbf{e}}_2$ ,  $\bar{\mathbf{e}}_\theta = \bar{\mathbf{e}}_3$

Przyjmijmy, że nasz układ krzywoliniowy jest układem współrzędnych sferycznych przedstawionym na rys. 2 (układ taki wybraliśmy ze względu na to, że krzywizna głównej linii styku trzech faz jest w nim tożsama współrzędnej  $r$ ). W związku z tym współczynniki Lamégo są odpowiednio równe:

$$H_1 = H_r = 1, \quad H_2 = H_\varphi = r \sin \theta, \quad H_3 = H_\theta = r \quad (18)$$

Rozważmy, czemu jest równe wyrażenie

$$\overline{\bar{\mathbf{1}}_1 \times \text{rot } \bar{\mathbf{1}}_1}, \quad (19)$$

w ortogonalnych współrzędnych sferycznych. Oczywiście

$$\bar{\mathbf{1}}_1 = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_r \\ a_\varphi \\ a_\theta \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

gdzie  $a_i$  są współrzędnymi fizycznymi wektora.

Z określenia rotacji we współrzędnych uogólnionych otrzymujemy związek:

$$\begin{aligned} \overline{\text{rot } \bar{\mathbf{1}}_1} &= -\frac{1}{H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (H_2 a_2) \right] \bar{\mathbf{e}}_1 - \frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (H_2 a_2) \right] \bar{\mathbf{e}}_3 = \\ &= a_1^* \bar{\mathbf{e}}_1 + a_3^* \bar{\mathbf{e}}_3 \end{aligned} \quad (20)$$

gdzie  $u_i$  są współrzędnymi krzywoliniowymi.

Mnożąc lewostronnie wektor rotacji przez  $\bar{\mathbf{1}}_1$  otrzymujemy:

$$\begin{aligned} \overline{\bar{\mathbf{1}}_1 \times \text{rot } \bar{\mathbf{1}}_1} &= \begin{vmatrix} \bar{e}_1 & \bar{e}_2 & \bar{e}_3 \\ 0 & 1 & 0 \\ a_1^* & 0 & a_3^* \end{vmatrix} = a_3^* \bar{e}_1 - a_1^* \bar{e}_3 = \\ &= -\frac{1}{H_1 H_2} \left[ \frac{\partial}{\partial u_1} (H_2 a_2) \right] \bar{e}_1 + \frac{1}{H_2 H_3} \left[ \frac{\partial}{\partial u_3} (H_2 a_2) \right] \bar{e}_3 \end{aligned} \quad (21)$$

We współrzędnych fizycznych:

$$\begin{aligned} \overline{\bar{\mathbf{1}}_1 \times \text{rot } \bar{\mathbf{1}}_1} &= -\frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial r} (r \sin \theta) \bar{e}_1 + \frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (r \sin \theta) \bar{e}_2 = \\ &= -\frac{1}{r} \bar{e}_r - \frac{1}{r} \text{ctg } \theta \bar{e}_\theta \end{aligned} \quad (22)$$

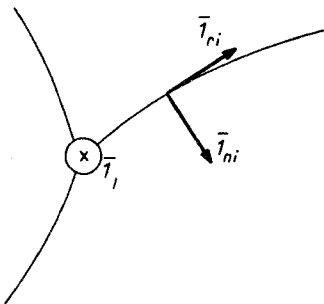
Otrzymaliśmy wektor, który dla punktu bieżącego leżącego na linii styku trzech faz jest zawarty w powierzchni rozdziału faz oraz jest normalny do linii osobliwej, a jego moduł jest równy jej krzywiznie; ostatecznie

$$\overline{\bar{\mathbf{1}}_1 \times \text{rot } \bar{\mathbf{1}}_1} = C \bar{\mathbf{1}}_n \quad (23)$$

Podstawiając powyższą zależność oraz (17) do (16) otrzymujemy

$$\overline{\bar{\mathbf{1}}_1 \cdot \text{grad}(\bar{\mathbf{1}}_1 b)} = b C \bar{\mathbf{1}}_n + \overline{\text{grad } b} \quad (24)$$

Ostatecznie w przypadku statycznym wymiana pędu między linią styku trzech faz a jej otoczeniem liniowym sprowadza się do dwóch sił, z których pierwsza, normalna do linii, istnieje, gdy linia ta nie jest linią prostą. Warunkiem powstania drugiej siły, stycznej do linii rozdziału faz, jest zmienność siły adhezji wzdłuż tej linii, co jest możliwe w przypadku niejednorodności temperatury bądź koncentracji. Należy nadmienić, że są to zagadnienia zupełnie niezbadane. Oczywiście w przypadku równowagi termicznej, chemicznej i mechanicznej może istnieć jedynie siła normalna do linii osobliwej.



Rys. 3. Wzajemne położenie wektorów  $\bar{\mathbf{1}}_{ri}$ ,  $\bar{\mathbf{1}}_{ni}$ ,  $\bar{\mathbf{1}}_1$

Powróćmy do drugiego członu równania (2) opisującego transport pędu między linią styku trzech faz i jej otoczeniem powierzchniowym.



Mnożąc lewostronnie równanie (10) przez wektor  $\bar{1}_1$  (kierunki i zwroty wektorów  $\bar{1}_{ri}$ ,  $\bar{1}_{ni}$  i  $\bar{1}_1$  są określone na rys. 3), otrzymamy zależność opisującą transport pędu między linią styku trzech faz, a powierzchniami międzyfazowymi:

$$\overline{\bar{1}_1 \cdot \bar{1} \times \bar{1}_{ni} a_i} = \overline{\bar{1}_1 \times \bar{1}_{ni} \cdot \bar{1} a_i} = -\overline{\bar{1}_{ri} \cdot \bar{1} a_i} = -\bar{1}_{ri} a_i \quad (25)$$

Ostatecznie podstawiając powyższe równanie oraz zależności (7) i (24) do bilansu (2) oraz zakładając, że linia styku trzech faz jest zawarta w płaszczyźnie (jeśli tak nie było, to napięcie liniowe powodowałoby powstawanie dodatkowych sił odpowiednio do istniejących krzywizn linii styku trzech faz; oczywiście w przestrzeni trójwymiarowej mogą być maksimum dwie takie siły), otrzymujemy

$$\bar{1}_n C b + \sum_{i=1}^3 \bar{1}_{ri} a_i + \overline{\bar{1}_1 \cdot \overline{\text{Div}} \bar{1} p} = 0 \quad (26)$$

Zgodnie z regułami opisanymi w artykule Rutkowskiego [2] możemy przeanalizować ostatni człon powyższego bilansu opisujący wymianę pędu między linią styku trzech faz i jej otoczeniem przestrzennym:

$$\overline{\bar{1}_1 \cdot \overline{\text{Div}} \bar{1} p} = \overline{\text{Div} \cdot (\bar{1} p)} \quad (27)$$

$$\overline{\text{Div} \cdot (\bar{1} p)} = \lim_{\delta r \rightarrow 0} \left( \delta r \sum_{i=1,2,3} p_i \int_{\vartheta_i} \bar{1}_r d\vartheta \right) \quad (28)$$

Możemy przyjąć, że jeśli średnica rurki dąży do zera, to ciśnienie wewnątrz niej maleje do wartości praktycznie nieskończenie małych z fenomenologicznego punktu widzenia i nie zmienia się, niezależnie od sektora otoczenia przestrzennego, tzn.  $p_1 = p_2 = p_3 = p_1$ . W takim przypadku całka po jednostkowych wektorach promieniowych mnożonych przez jednakowe wartości ciśnienia będzie się równała zero. Tak więc

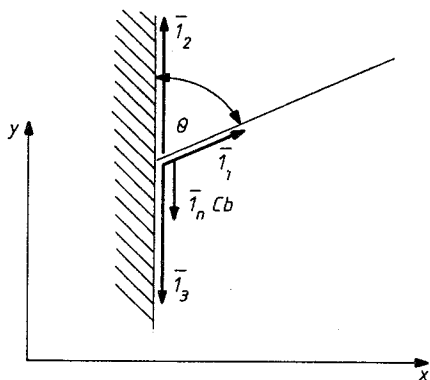
$$\overline{\text{Div} \cdot \bar{1} p} = 0 \quad (29)$$

Ostatecznie dla linii styku trzech faz bilans pędu w przypadku statycznym przyjmuje postać:

$$\bar{1}_n C b + \bar{1}_{r1} a_1 + \bar{1}_{r2} a_2 + \bar{1}_{r3} a_3 = 0 \quad (30)$$

Na rysunku 4 przedstawiono równowagę sił opisaną za pomocą powyższego bilansu w kartezjańskim układzie współrzędnych. Rzutując wszystkie siły na kierunek y (czyli powierzchnię ciała stałego) możemy znaleźć ich składowe w tym kierunku. Otrzymamy:

$$\bar{1}_{r1y} = \cos \vartheta, \quad \bar{1}_{r2y} = +1, \quad \bar{1}_{r3y} = -1 \quad (31)$$



Rys. 4. Równowaga sił w przypadku rozszerzonego równania Younga

stykających się faz i może być przy obecnym stanie wiedzy wyznaczone jedynie doświadczalnie.

Ostatecznie bilans pędu na nieruchomej linii styku trzech faz jest sprowadzony do równania Younga rozszerzonego o człon proporcjonalny do napięcia liniowego i odwrotnie proporcjonalny do promienia krzywizny linii mierzonego po powierzchni ciała stałego. Ma on postać:

$$\frac{b}{r} + a_1 \cos \vartheta + a_2 + a_3 = 0 \quad (32)$$

Występujące w powyższym równaniu napięcie liniowe jest parametrem zależnym od danego układu trzech

## PODSUMOWANIE

Należy zaznaczyć, że w ostatnich latach opublikowano wiele prac, w których analizowano podobne zjawiska. Jednakowoż porównując prowadzone w nich rozumowania z prezentowanym w niniejszym artykule, można stwierdzić, że nowatorstwem jest próba bilansowania w otoczeniu przestrzennym linii osobliwej a dopiero potem przez przejście graniczne doprowadzenie do bilansu na linii osobliwej. Stosując inne metody uwzględnia się jedynie wpływ otoczenia powierzchniowego na zjawiska zachodzące na linii osobliwej [6]. Zaproponowane w niniejszej pracy ujęcie umożliwia podjęcie próby oszacowania wpływu zjawisk zachodzących w otoczeniu przestrzennym linii osobliwej, a co za tym idzie, zjawisk dynamicznych zależnych od prędkości. Zalety powyżej opisanego ujęcia są widoczne w równaniu (3), gdzie poszczególne człony transportu są dokładnie określone.

Dodatkową różnicą między ujęciem prezentowanym w niniejszej pracy a pracą [6] jest przyjęcie założenia o zerowym liniowym zasobie masy (wydaje się, że jest to założenie jak najbardziej fizyczne), co prowadzi do eliminacji (zerowania się) kilku członów bilansu.

Naturalnym uzupełnieniem powyższych wniosków jest budowa stanowiska badawczego umożliwiającego weryfikację hipotezy istnienia napięcia liniowego i próbę wyznaczenia jego wartości dla danego układu substancji. Budowa takiego stanowiska, pomimo trudności natury technicznej i finansowej (pomiaru wymagają doskonałego odizolowania badanych substancji od wpływów otocze-

nia i wielkiej precyzji), jest poważnie zaawansowana. Jest to interferometr laserowy umożliwiający równoczesny pomiar kąta zwilżania i promienia krzywizny linii styku trzech faz, a więc określenie rozbieżności od prawa Younga i, co za tym idzie, wielkości napięcia liniowego. Interferometr ten jest umieszczony na pneumatycznej, tłumiącej wszelkie drgania podstawie.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] J. Rutkowski: *Podstawy bilansowania masy, pędu, energii i entropii*. WPW, Warszawa 1975.
- [2] J. Rutkowski: *Foundations of Balancing at Mobile Phase Interface*. Archiwum Termodynamiki, 1981, vol. 2, Nr 2, s. 75.
- [3] J. Rutkowski, P. Zaręba: *Foundations of Balancing at Singular Line*. Archives of Thermodynamics, w druku.
- [4] A.J. Rusanow: *Fazowyje rawnowiesija*. Nauka, Moskwa 1967.
- [5] R.J. Good: *Surface and Colloid Science*. Plenum Press, 11, New York 1979.
- [6] J. Jarić, Z. Golubović: *The Balance Laws of the Interline and the Bulk Materials*. ZAMM, 1991, 12, pp. 518-521.

## DERIVATION OF EXTENDED YOUNG'S FORMULA BY BALANCE METHOD

### S u m m a r y

In the paper a derivation of Young's formula has been presented. The formula is extended by an additional term defining the force caused by the linear tension. It is a material parameter dependent on all mutually contacting phases. The derivation is based on the balance method, described comprehensively in the given literature data. The results of the analysis point to a conclusion that in the case of fixed contact line of the three phases an additional force occurs which is directly proportional to linear tension, inversely proportional to the radius of curvature of the contact line of the three phases and is directed to the centre of this curvature. The existence of this force influences the balance conditions on the curved contact line of the three phases.

## ВЫВЕДЕНИЕ РАСШИРЕННОЙ ЗАВИСИМОСТИ ЮНГА МЕТОДОМ БАЛАНСА

### Краткое содержание

В работе представлено уравнение Юнга расширенное добавочным членом, описывающим силу происходящую от линейного напряжения. Это материальный лапласиан, зависящий от всех примыкающих фаз. Вывод основан на методе баланса, подробно описанном в приведенной литературе. Результатом представленного анализа является констатация, что в случае неподвижной контактной линии трех фаз появляется добавочная сила прямо пропорциональная к линейному напряжению, обратно пропорциональная к радиусу кривизны контактной линии трех фаз и направленная внутрь этой кривизны. Существование этой силы влияет на условия равновесия на искривленной контактной линии трех фаз.