

Wiesław Gogół, Witold Pawłowski

Instytut Techniki Ciepłej

OBLICZENIA NUMERYCZNE PRZEWODZENIA CIEPŁA W UKŁADACH DWUSKŁADNIKOWYCH PRZY ZMIANIE FAZY JEDNEGO ZE SKŁADNIKÓW

W pracy przedstawiono metodę i wyniki obliczeń numerycznych nieustalonego przewodzenia ciepła w dwuwymiarowych układach dwuskładnikowych przy zmianie fazy jednego ze składników na przykładzie dwu układów, w których występuje przemiana fazowa woda-lód. Obliczenia przeprowadzono dla układów prostokątnych z wtrąceniami w kształcie koła i prostokąta wykonanymi z materiału dobrze przewodzącego ciepło (np. miedzi).

WYKAZ WAŻNIEJSZYCH OZNACZEŃ

- a - dyfuzyjność cieplna
- A - długość boku obszaru w kierunku osi x
- B - długość boku obszaru w kierunku osi y
- c - ciepło właściwe
- F - granica przemiany fazowej (front lodu)
- H - entalpia
- i - numer węzła w kierunku osi x
- j - numer węzła w kierunku osi y
- L - ciepło przemiany fazowej
- n - normalna do powierzchni
- t - czas
- T - temperatura
- T_F - temperatura przemiany fazowej
- T_d - temperatura brzegu $x = A$ obszaru

- T_g - temperatura brzegu $x = 0$ obszaru
 T_0 - temperatura początkowa
 v_n - składowa normalna prędkości przemieszczania się granicy F oddzielającej fazę stałą od ciekłej
 x, y - współrzędne kartezjańskie
 Γ - granica między dwoma składnikami układu
 ξ - grubość warstwy lodu w jednowymiarowym zagadnieniu Stefana w układzie jednoskładnikowym
 λ - przewodność cieplna
 ρ - gęstość
 Ω - obszar

Indeksy

- l - odnosi się do fazy ciekłej
s - odnosi się do fazy stałej

1. WSTĘP

Przedmiotem rozważań jest proces przewodzenia ciepła w stanie nieustalonym w dwuwymiarowych układach dwuskładnikowych przy zmianie fazy jednego ze składników.

Analiza dostępnej literatury wykazała brak rozwiązań analitycznych dla takich układów, natomiast przeprowadzane były pewne badania eksperymentalne [5,6,7,8]; teoretycznego rozwiązania problemu poszukiwano więc za pomocą metod numerycznych. Zastosowanie w tym przypadku tradycyjnych metod służących do rozwiązania klasycznego zagadnienia Stefana (bez wtrąceń) nie było możliwe, ponieważ obecność drugiego składnika (wtrącenia) w istotny sposób zmienia przebieg zjawiska i znacznie je komplikuje.

Spowodowało to konieczność opracowania nowej metody numerycznej pozwalającej na otrzymywanie poprawnych rozwiązań w przypadku występowania w obu składnikach układu gradientów temperatury, których wartości bardzo się różnią; jest to wywołane

dużymi różnicami właściwości cieplnych składników układu (zwłaszcza przewodności cieplnej).

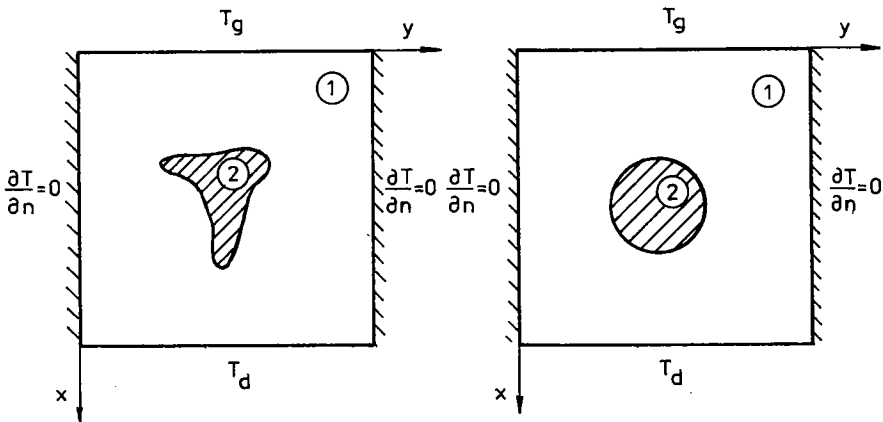
Obliczenia przeprowadzono dla dwu wybranych układów, w których występuje przemiana fazowa woda-lód; mogłyby być również przyjmowane do rozważań inne czynniki zmieniające fazę. Składnik, który nie zmienia stanu skupienia, ma prosty kształt geometryczny (koło lub prostokąt) i wykonany jest z materiału dobrze przewodzącego ciepło (np. miedzi). Przedmiotem rozważań mogłyby być także układy z wtrąceniami o innych kształtach i wykonane z innych materiałów (np. izolatorów termicznych).

Rozwiązanie zagadnienia przewodzenia ciepła w układzie ze zmianą fazy w obecności wtrącenia polegało na wyznaczeniu pól temperatury, strumieni ciepła i położenia frontu przemiany fazowej w funkcji czasu.

Zasadniczym celem pracy było określenie wpływu obecności wtrącenia w układzie na przebieg procesu zamarzania w odróżnieniu od klasycznego zagadnienia Stefana [12].

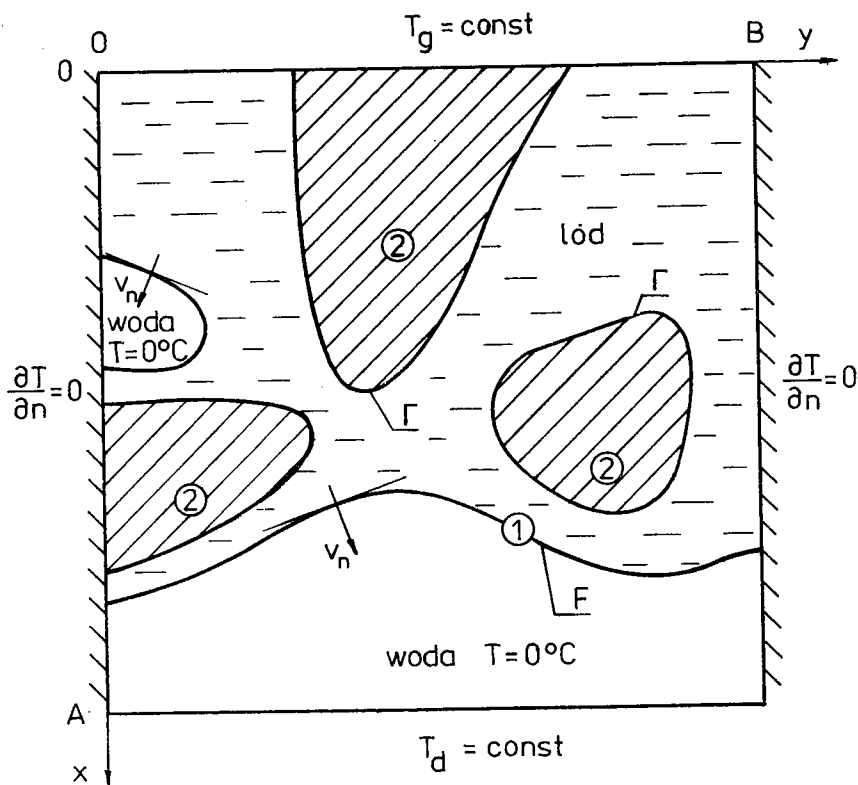
2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA

Przedmiotem badań są dwuwymiarowe układy dwuskładnikowe (rys.1), w których w jednym ze składników (1) może występować



Rys.1

przemiana fazowa ciecż-ciało stałe. Składnik (2), który nie zmienia stanu skupienia, ma postać pojedynczego wtrącenia lub grupy wtrąceń o dowolnym kształcie. Wtrącenia mogą mieć na przykład kształt koła, pierścienia, trójkąta lub prostokąta itp.



Rys.2

W stanie nieustalonym składnik (1) zmienia stan skupienia i fazy ciekła oraz stała są oddzielone od siebie granicą przemiany fazowej F (rys.2) poruszającą się z prędkością

$$v_n = f(x, y, t), \quad x, y \in F. \quad (1)$$

Podczas "zamrażania" składnika (1) występuje proces "obmarzania" i ochładzania wtrącenia (2) umieszczonego w układzie.

Zagadnienie przewodzenia ciepła w przedstawionym układzie opisano za pomocą równania przewodzenia ciepła [2,15,16,18]:

$$c(x, y, T) \rho(x, y, T) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial t} = \quad (2)$$

$$= \operatorname{div}[\lambda(x, y, T) \operatorname{grad} T(x, y, t)] \quad , \quad t > 0,$$

$$\text{w obszarze } \Omega \quad (x \in \langle 0, A \rangle; \quad y \in \langle 0, B \rangle), \quad (3)$$

z warunkiem początkowym

$$T(x, y, 0) = T_0 = T_F = 0^\circ\text{C}, \quad x, y \in \Omega. \quad (4)$$

Warunki brzegowe mają postać:

$$\frac{\partial T(x, 0, t)}{\partial y} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \langle 0, A \rangle; \quad (5)$$

$$\frac{\partial T(x, B, t)}{\partial y} = 0, \quad t > 0, \quad x \in \langle 0, A \rangle; \quad (6)$$

$$T(0, y, t) = T_g = \operatorname{const} = -20^\circ\text{C}, \quad t > 0, \quad y \in \langle 0, B \rangle; \quad (7)$$

$$T(A, y, t) = T_d = \operatorname{const} = 0^\circ\text{C}, \quad t > 0, \quad y \in \langle 0, B \rangle. \quad (8)$$

Na granicy przemiany fazowej F spełnione są zależności [4, 12]

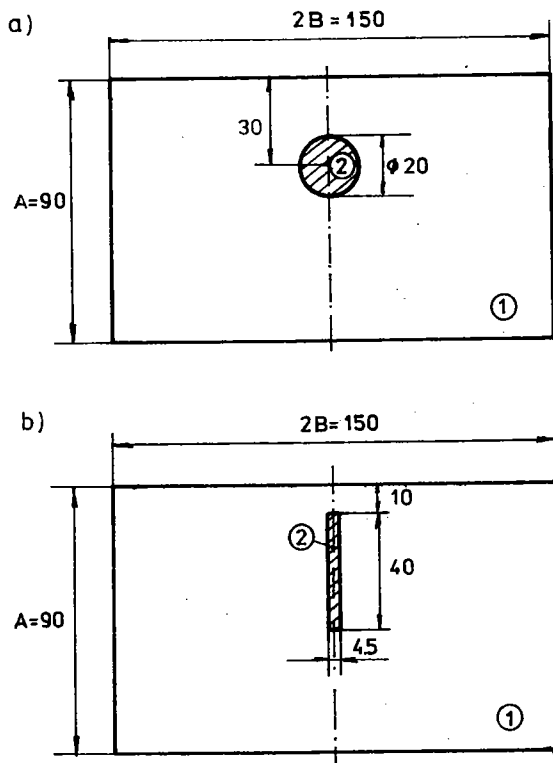
$$\lambda(x, y, T) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial n} \Big|_l - \lambda(x, y, T) \frac{\partial T(x, y, t)}{\partial n} \Big|_s = \rho_s L v_n, \quad (9)$$

$$t > 0, \quad x, y \in F;$$

$$T(x, y, t) \Big|_l = T(x, y, t) \Big|_s = T_F, \quad t > 0, \quad x, y \in F. \quad (10)$$

Obliczenia przeprowadzono dla układu, w którym występuje przemiana fazowa woda-lód. Przedstawione zagadnienie rozwiązano przyjmując, że właściwości cieplne wody i lodu są stałe albo zmieniają się z temperaturą. Przy wykonywaniu obliczeń okazało się, że uzyskane dla tych dwu założeń wyniki nie różnią się znacznie między sobą, zatem w dalszych obliczeniach przyjęto, że ciepło właściwe, gęstość i przewodność cieplna

wody mają wartości stałe i określone dla temperatury przemiany fazowej T_F , natomiast właściwości cieplne lodu określone są w temperaturze $T = 0,5 (T_G + T_F) = -10^\circ\text{C}$ równej średniej temperaturze lodu. Przyjęto, że temperatura początkowa układu T_0 jest wyrównana i równa temperaturze przemiany fazowej $T_F = 0^\circ\text{C}$. Dlatego pola temperatury wyznaczano jedynie w obszarze lodu i wtrącenia. Rozpatrywano układy z wtrąceniem w kształcie walca i prostokąta (rys.3).



(wymiary w mm)

Rys.3

Obliczenia przeprowadzono metodą elementu skończonego i metodą różnic skończonych w różnych wariantach. Stosowano różne schematy różnicowe; ostatecznie wybrano metodę różnic skończonych (pewien wariant tej metody), która okazała się najbar-

dziej korzystna ze względu na dokładność, szybkość obliczeń oraz możliwość uzyskania dość poprawnego i dokładnego przebiegu linii izoterm i adiabat.

Ze względu na symetrię układu względem osi pionowej obliczenia wykonywano dla połowy układu.

3. METODY NUMERYCZNE ROZWIĄZYWANIA ZAGADNIENIA PRZEWODZENIA CIEPŁA PRZY ZMIANIE FAZY

Zagadnienie przewodzenia ciepła przy zmianie fazy można rozwiązywać za pomocą różnych metod numerycznych.

Przedstawiony poniżej przegląd tych metod uwzględnia jedynie wybrane metody, które są najczęściej opisywane w literaturze. Nie uwzględniono między innymi metod stanowiących pewne kombinacje tych klasycznych metod.

Pierwsza grupa metod (front tracking methods [4,13,17]) polega na wyznaczaniu (śledzeniu) położenia poruszającej się granicy przemiany fazowej w każdym kroku w czasie. Położenie granicy wyznacza się bezpośrednio przez deformację siatki (modified grid method [4]) lub transformację zmiennych w ten sposób, że poruszająca się granica zawsze przechodzi przez węzły siatki; można również rozwiązywać zagadnienie w węzłach ustalonej siatki (fixed grid method [19]), natomiast położenie granicy pomiędzy węzłami tej siatki wyznacza się za pomocą pewnych formuł interpolujących. Metody "śledzące" położenie frontu przemiany fazowej komplikują się znacznie w przypadku zagadnień wielowymiarowych lub niejednorodnych.

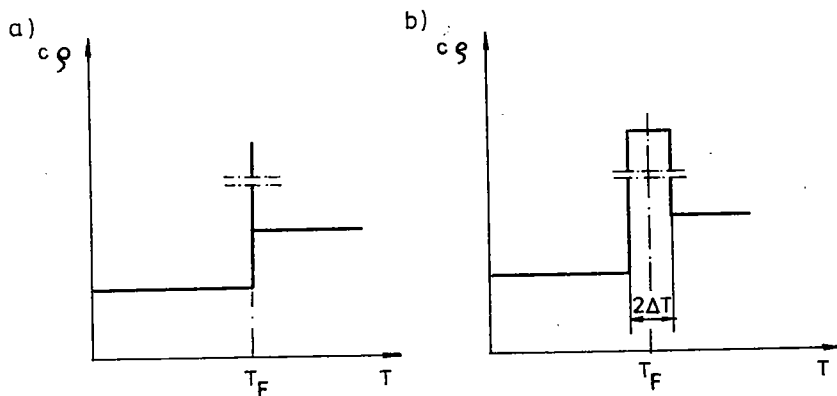
Metody należące do drugiej grupy nie pozwalają na bezpośrednio wyznaczenie położenia frontu przemiany fazowej, ale służą do obliczenia wartości temperatury lub entalpii w węzłach siatki w całym badanym obszarze w każdym kroku w czasie (fixed domain method [4]). Do tej grupy należą: metoda zastępczej pojemności cieplnej oraz metody entalpowe.

W metodzie zastępczej pojemności cieplnej (equivalent heat capacity method [1,4]) zagadnienie przewodzenia ciepła

ze zmianą fazy rozwiązuje się podobnie, jak nieliniowe zagadnienie przewodzenia ciepła bez zmiany fazy

$$c(T) \varrho(T) \frac{\partial T}{\partial t} = \text{div}(\lambda(T) \text{grad } T). \quad (11)$$

Ciepło przemiany fazowej uwzględnia się w wartości objętościowego ciepła właściwego składnika zmieniającego stan skupienia w temperaturze T_F . Możliwe są dwa sposoby określania zastępczej pojemności cieplnej; gdy przemiana fazowa zachodzi w stałej temperaturze (rys.4a) lub w małym przedziale temperatury $2 \Delta T$ (rys.4b) [4].



W metodzie "enthalpy-temperature method" [4] poszukuje się rozwiązania równania

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \text{div}(\lambda \text{grad } T), \quad (12)$$

natomiast w metodzie "diffusion enthalpy method" [4] rozwiązywane jest równanie

$$\frac{\partial H}{\partial t} = \text{div}(a \text{grad } H), \quad (13)$$

gdzie entalpia H czynnika określona jest w postaci [4]

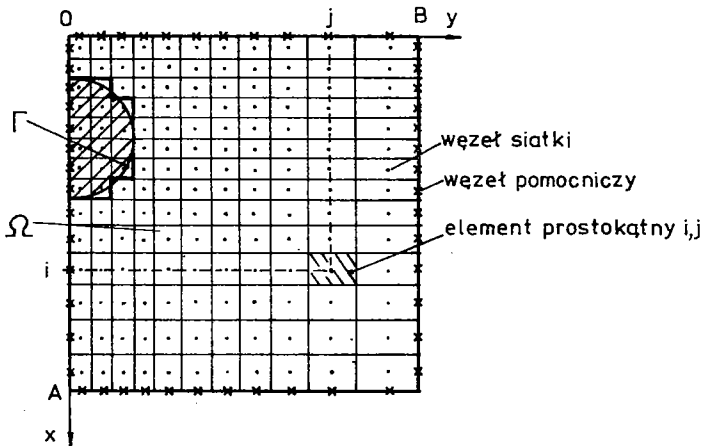
$$H(T) = \int_0^T c(\Theta) \varrho(\Theta) d\Theta, \quad (14)$$

gdzie Θ jest pewną zmienną temperaturą.

Przedstawione równania różniczkowe z zadanymi warunkami brzegowymi i warunkiem początkowym można rozwiązać za pomocą metody różnic skończonych i metody elementu skończonego. Wstępne obliczenia pól temperatury w badanych układach wykonano za pomocą różnych wariantów tych metod.

4. ZMODYFIKOWANA METODA RÓŻNIC SKOŃCZONYCH

Do obliczenia pól temperatury w badanych układach dwuskładnikowych wybrano ostatecznie metodę różnic skończonych [9,10], w której ciepło przemiany fazowej uwzględniono w zastępczej pojemności cieplnej [4] przy założeniu, że przemiana fazowa zachodzi w małym przedziale temperatury $2\Delta T$; stanowi ona pewną modyfikację standardowego schematu różnicowego Du Forta-Frankela [14]. W metodzie tej oryginalnym rozwiązaniem jest zastosowanie zmiennego kroku czasowego oraz możliwość wykorzystania dowolnej, nieregularnej siatki, w szczególności o kształcie prostokątnym (rys.5).



Rys.5

Obszar Ω badanego układu dwuskładnikowego podzielono na zbiór N elementów o powierzchni Ω^n (gdzie $\Omega = \sum_{n=1}^N \Omega^n$, a n jest oznaczeniem kolejnego elementu) tworzących siatkę prostokątną.

kątną. W środku każdego elementu znajduje się węzeł. Dodatkowo wprowadzono pomocnicze węzły leżące na brzegach $x = 0$, $x = A$, $y = 0$ i $y = B$.

Temperatura w węźle (i, j) siatki w k -tej chwili czasu obliczana jest wg wzoru [9,10]

$$T_{i,j}^k = \frac{P + Q}{R}, \quad (15)$$

gdzie:

$$P = \left(\lambda_{x,i-1,j}^{k-1} T_{i-1,j}^{k-1} + \lambda_{x,i,j}^{k-1} T_{i+1,j}^{k-1} + \lambda_{y,i,j-1}^{k-1} T_{i,j-1}^{k-1} + \lambda_{y,i,j}^{k-1} T_{i,j+1}^{k-1} \right) (\Delta t^{k-1} - \Delta t^k),$$

$$Q = \left[C_{i,j}^{k-1} - \left(\lambda_{x,i-1,j}^{k-1} + \lambda_{x,i,j}^{k-1} + \lambda_{y,i,j-1}^{k-1} + \lambda_{y,i,j}^{k-1} \right) \Delta t^{k-1} \right] T_{i,j}^{k-2},$$

$$R = C_{i,j}^{k-1} + \left(\lambda_{x,i-1,j}^{k-1} + \lambda_{x,i,j}^{k-1} + \lambda_{y,i,j-1}^{k-1} + \lambda_{y,i,j}^{k-1} \right) \Delta t^{k-1},$$

$\lambda_{x,i-1,j}$ - zastępcza przewodność cieplna w kierunku x między węzłami $(i-1, j)$ oraz (i, j) ,

$\lambda_{x,i,j}$ - zastępcza przewodność cieplna w kierunku x między węzłami (i, j) oraz $(i+1, j)$,

$\lambda_{y,i,j-1}$ - zastępcza przewodność cieplna w kierunku y między węzłami $(i, j-1)$ oraz (i, j) ,

$\lambda_{y,i,j}$ - zastępcza przewodność cieplna w kierunku y między węzłami (i, j) oraz $(i, j+1)$,

$C_{i,j}$ - pojemność cieplna elementu (płaskiego) (i, j) ,

Δt^k - krok czasowy w chwili k .

Właściwości cieplne składnika zmieniającego fazę mogą być stałe lub zmienne z temperaturą. Przedstawione w niniejszej pracy wyniki obliczeń uzyskano za pomocą programu, w którym przyjęto, że właściwości cieplne składnika (1) (rys.1-3) są

stałe z temperaturą. W przedziale temperatury $\langle T_F - \Delta T, T_F + \Delta T \rangle$ przyjęto, że zastępcza pojemność cieplna jest równa $\rho(T + \Delta T)L / (2 \Delta T)$. Do obliczeń przyjęto $\Delta T = 5 \cdot 10^{-4}$ K. Wartość kroku w czasie zwiększała się podczas obliczeń od wartości 10^{-4} s do 5 s według pewnej zależności $\Delta t = f(k)$.

Równanie (15) można w prosty sposób uogólnić dla różnych przypadków położenia węzła zarówno wewnątrz, jak również na brzegu obszaru, na którym mogą występować warunki brzegowe Dirichleta lub Neumanna.

Zastosowanie zmodyfikowanego schematu różnicowego Du Forta-Frankela umożliwiło wykonanie obliczeń, a ponadto wykorzystanie w tym schemacie zmiennego kroku czasowego pozwoliło na znaczne skrócenie czasu obliczeń [14].

Pola temperatury wyznaczano na podstawie obliczonych wartości temperatury w węzłach siatki za pomocą programu służącego do graficznej prezentacji wyników obliczeń i narysowano na ploterze. Na podstawie obliczonych wartości temperatury wyznaczano za pomocą osobnego programu linie strumienia ciepła ortogonalne do izoterm. Linie adiabat (strumienia ciepła) również wykreślano na ploterze.

Obliczenia przeprowadzono dla nieregularnej siatki $150 * 100$ węzłów (zagęszczonej w obszarze wtrącenia) na komputerach typu IBM PC.

5. WYNIKI OBLICZEŃ NUMERYCZNYCH

W pracy przedstawiono wyniki obliczeń numerycznych w postaci pól temperatury, strumieni ciepła i położenia frontu przemiany fazowej przy zamrażaniu wody w obecności wtrącenia wykonanego z materiału dobrze przewodzącego ciepło.

Właściwości cieplne wody przyjęto dla temperatury 0°C , natomiast właściwości cieplne lodu przyjęto dla temperatury -10°C [9]:

- dla wody $\rho = 999,9 \text{ kg/m}^3$, $c = 4212 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$, $\lambda = 0,551 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$;
- dla lodu $\rho = 918,6 \text{ kg/m}^3$, $c = 2040 \text{ J}/(\text{kg}\cdot\text{K})$, $\lambda = 2,34 \text{ W}/(\text{m}\cdot\text{K})$.

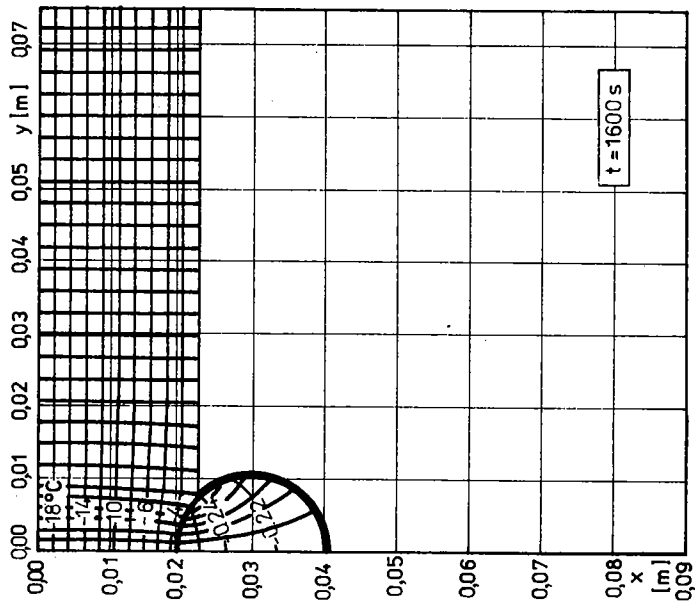
Przyjęto, że ciepło przemiany fazowej woda-lód jest równe 332 400 J/kg [9].

5.1. WYNIKI OBLICZEŃ DLA UKŁADU Z WTRĄCENIEM W KSZTAŁCIE KOŁA

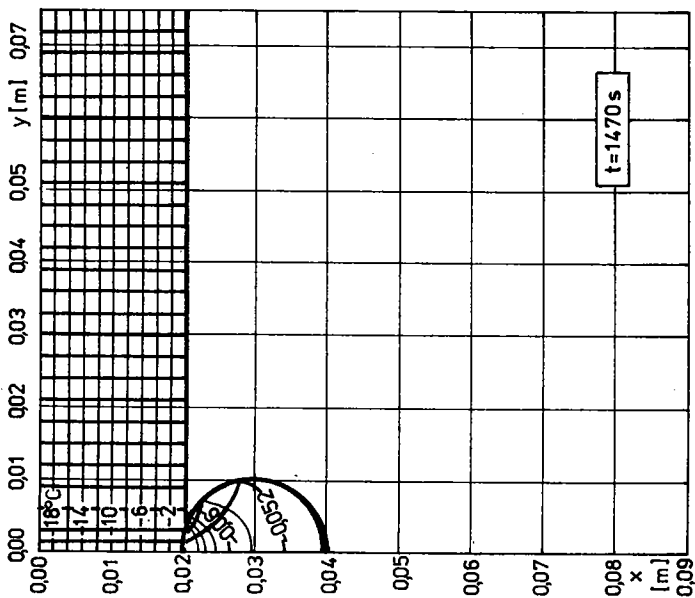
W układzie w kształcie prostokąta o wymiarach $A \times 2 B = 90 \cdot 10^{-3}$ [m] \times $150 \cdot 10^{-3}$ [m] znajduje się wtrącenie w kształcie koła o średnicy $20 \cdot 10^{-3}$ [m] (może to być również walec w układzie trójwymiarowym). Odległość środka wtrącenia od brzo-
gu $x = 0$ jest równa $30 \cdot 10^{-3}$ [m] (rys.3a). Wtrącenie jest wykonane z miedzi o właściwościach cieplnych [11]: $\rho = 8950$ kg/m³, $c = 385$ J/(kg·K), $\lambda = 386$ W/(m·K).

Wyznaczono pola temperatury i strumieni ciepła oraz określono położenie frontu lodu (przemiany fazowej) w trakcie trwania procesu zamarzania wody i obmarzania wtrącenia. Na rys.6÷10 pokazano wyniki obliczeń w postaci wykresów $T(x,y)$ i $q(x,y)$ dla następujących czasów: 1470 s, 1600 s, 3060 s, 10 000 s i 18 000 s. Na wykresach przy liniach izoterm podano odpowiednie wartości temperatury; przedstawione linie adiabat (strumienia ciepła) mają na celu przede wszystkim jakościowe zilustrowanie procesu przewodzenia ciepła w układach dwuskładnikowych. Na rysunku 11 pokazano położenia izoterm $T = 0^{\circ}\text{C}$ dla różnych czasów.

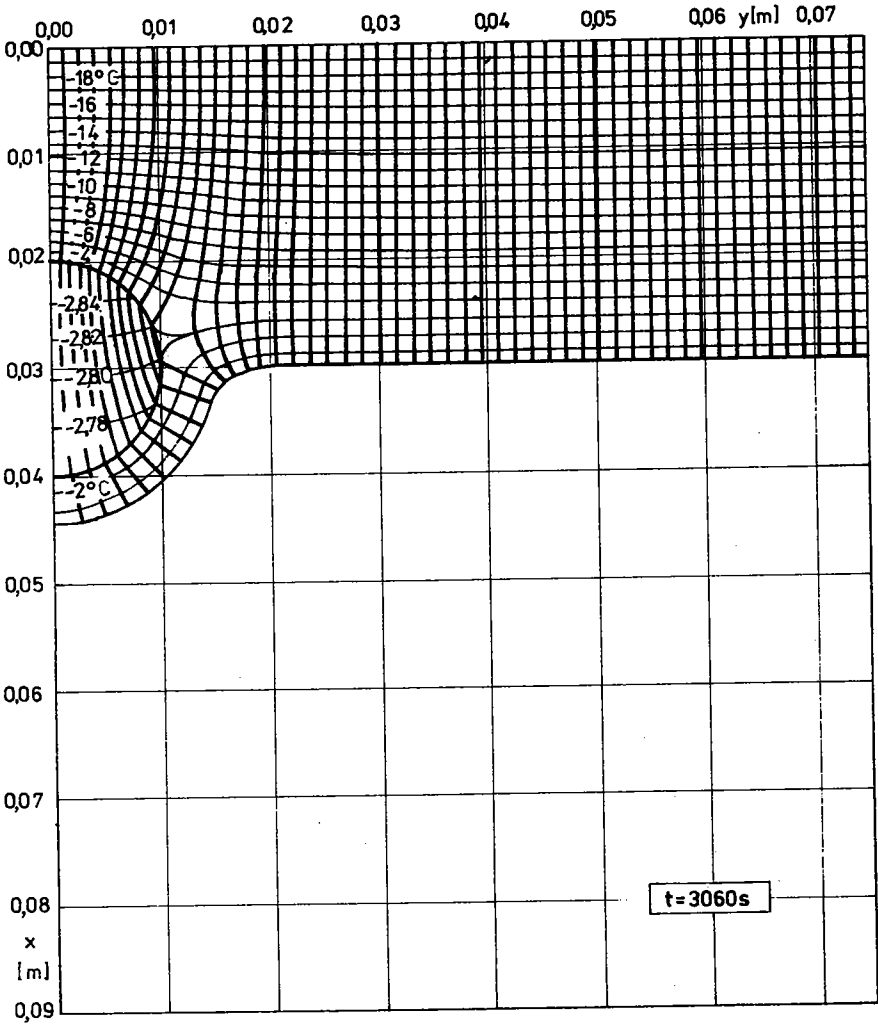
Na przedstawionych rysunkach można zaobserwować, że w obszarze wtrącenia wykonanego z miedzi różnica temperatury jest równa około 0,1 K, podczas gdy w lodzie jest równa 20 K. Zaobserwowano silne oddziaływanie wtrącenia wykonanego z miedzi na przebieg linii adiabat oraz znaczny wpływ wtrącenia na przebieg procesu zamarzania wody. W obszarze oddalonym od wtrącenia, w którym można przyjąć, że występuje jednowymiarowe przewodzenie ciepła ze zmianą fazy w układzie jedno-
składnikowym (klasyczne zagadnienie Stefana), wyznaczone położenia frontu lodu są zgodne z rozwiązaniem analitycznym z dokładnością większą niż 0,5%.



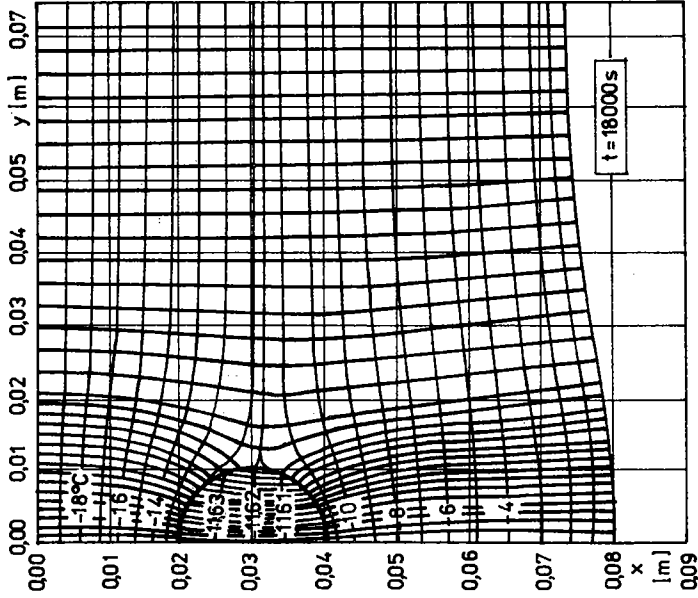
Rys.7



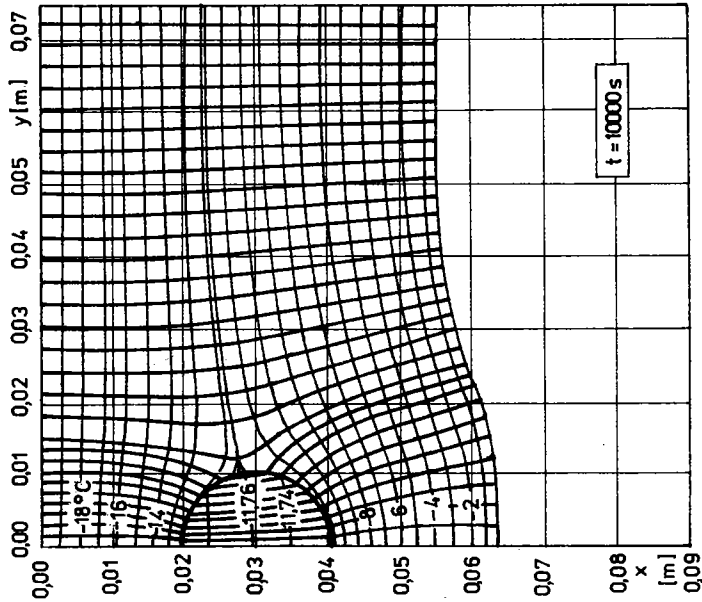
Rys.6



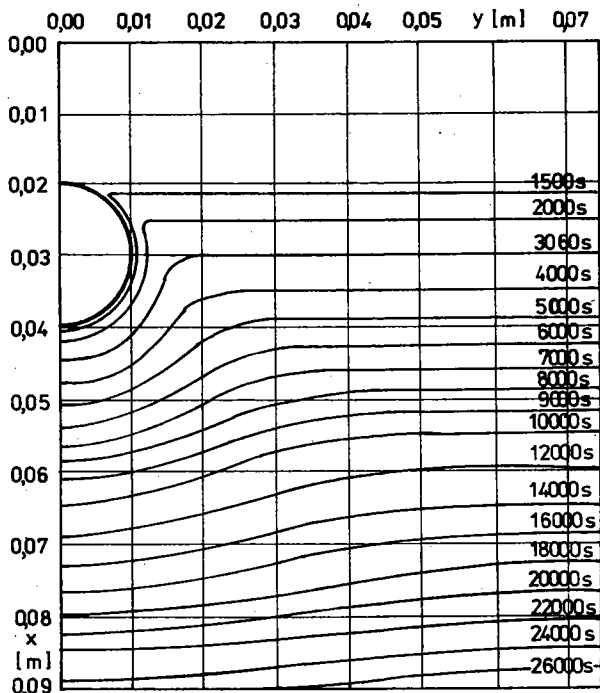
Rys.8



Rys.10



Rys.9



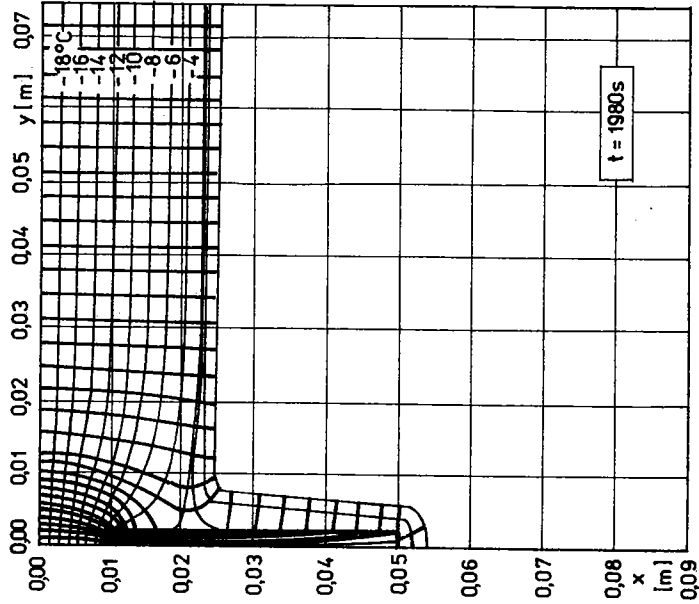
Rys.11

5.2. WYNIKI OBLICZEŃ DLA UKŁADU Z WTRĄCENIEM W KSZTAŁCIE PROSTOKĄTA

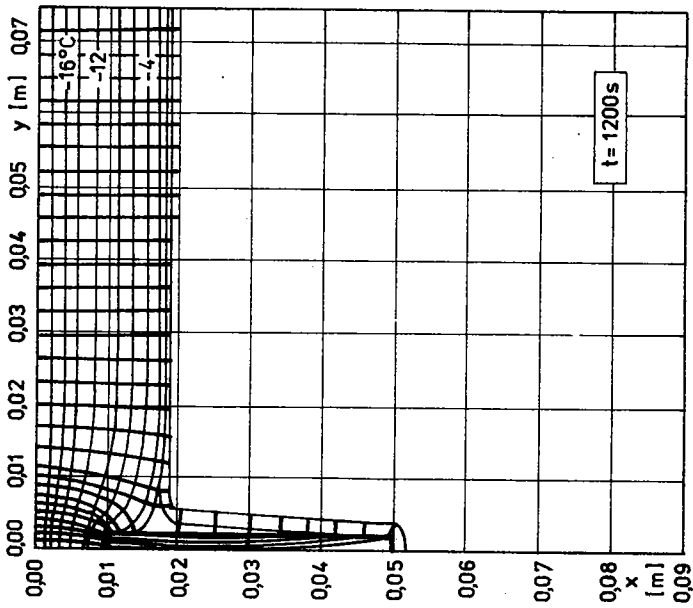
W układzie w kształcie prostokąta o wymiarach $A \times 2B = 90 \cdot 10^{-3} \text{ [m]} \times 150 \cdot 10^{-3} \text{ [m]}$ znajduje się wtrącenie w kształcie prostokąta o wymiarach $40 \cdot 10^{-3} \text{ [m]} \times 4,5 \cdot 10^{-3} \text{ [m]}$ wykonane z miedzi o właściwościach cieplnych takich samych, jakie mają wtrącenia w kształcie koła. Odległość brzegu wtrącenia od powierzchni $x = 0$ jest równa $10 \cdot 10^{-3} \text{ [m]}$ (rys.3b).

Wyznaczono pola temperatury i strumieni ciepła oraz określono położenia frontu lodu (przemiany fazowej) w trakcie trwania procesu zamrażania. Na rysunkach 12÷16 przedstawiono wykresy $T(x,y)$ i linie adiabat kolejno dla czasów 1200 s, 1980 s, 2880 s, 4620 s i 16 000 s.

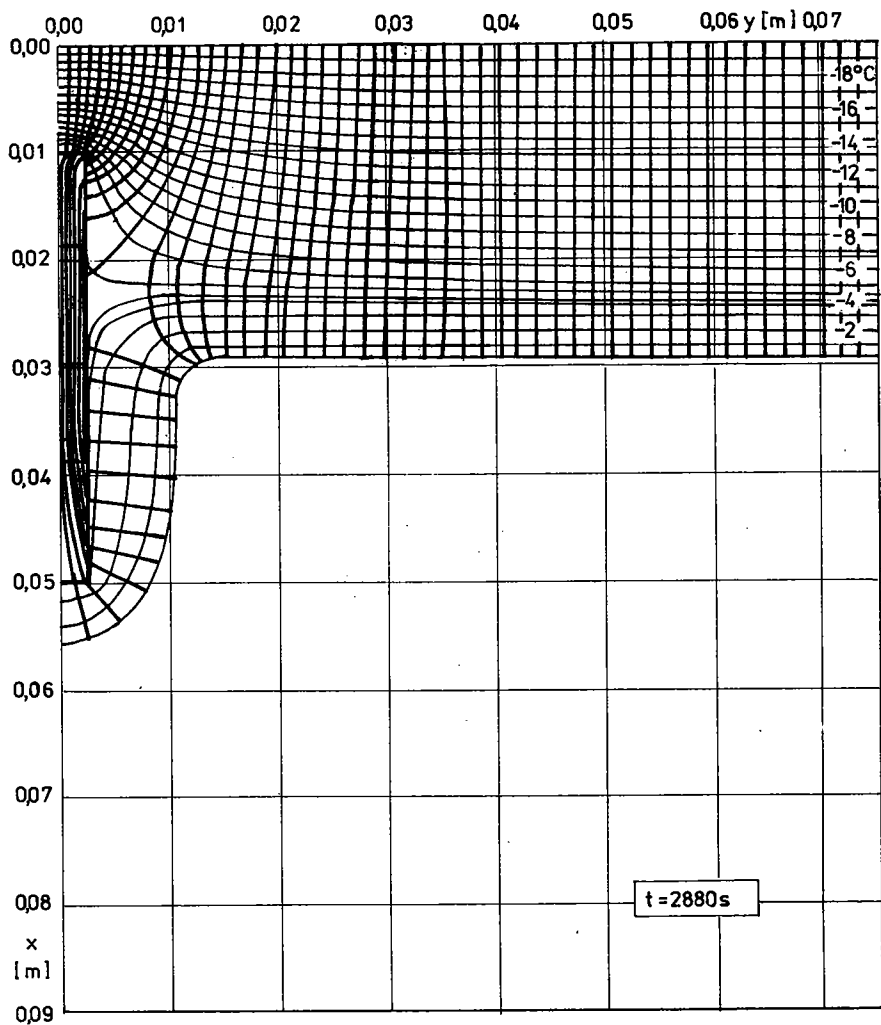
We wtrąceniu obserwuje się duże zagęszczenie linii strumieni ciepła. Różnica temperatury we wtrąceniu nie przekracza 1 K.



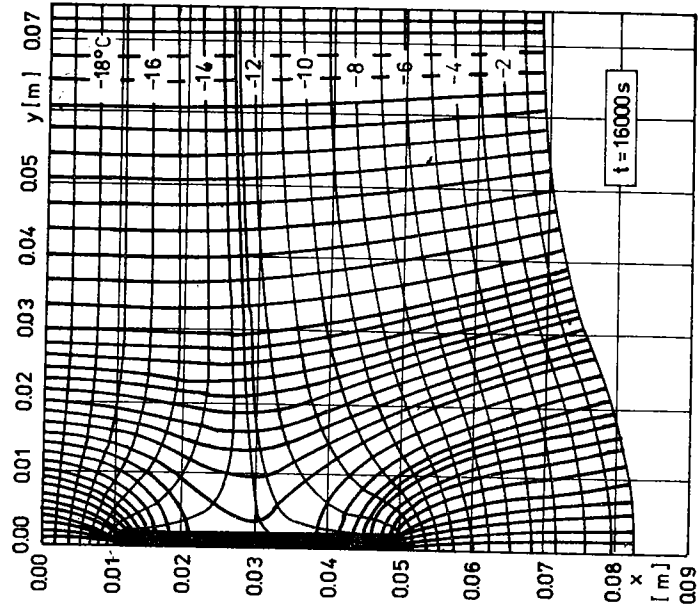
Rys. 13



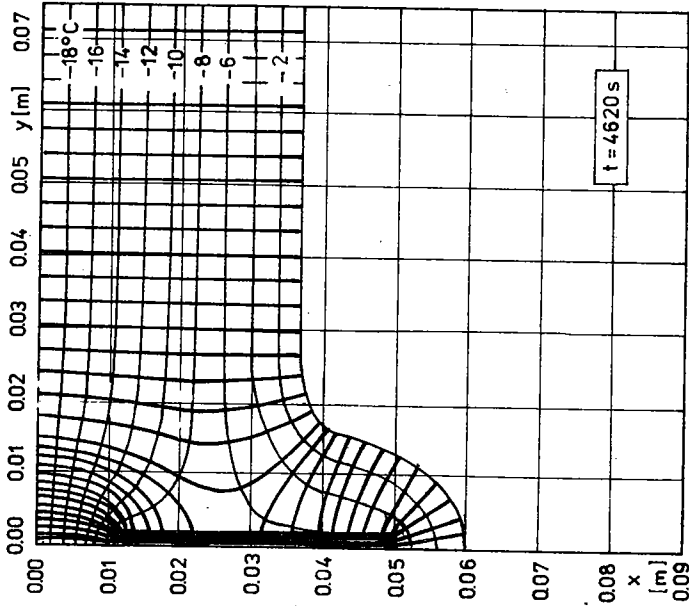
Rys. 12



Rys. 14



Rys. 16



Rys. 15

Jak można zauważyć, obecność wtrącenia znacznie zmienia przebieg procesu zamrażania w porównaniu z klasycznym zagadnieniem Stefana. W obszarze oddalonym od wtrącenia, w którym można przyjąć, że występuje jednowymiarowe przewodzenie ciepła ze zmianą fazy w układzie jednoskładnikowym (klasyczne zagadnienie Stefana), wyznaczone położenia frontu lodu są zgodne z rozwiązaniem analitycznym z dokładnością większą niż 0,5%.

6. WNIOSKI

Opracowano metodę obliczeń numerycznych zagadnienia przewodzenia ciepła w dwuwymiarowych układach dwuskładnikowych przy zmianie fazy jednego ze składników. Metoda umożliwia badanie układów z wtrąceniami wykonanymi z różnych materiałów (np. izolatorów termicznych lub metali) i posiadających różne kształty (np. koła, trójkąta, prostokąta lub kształt dowolny). Przedmiotem rozważań mogą być układy, w których występuje przemiana fazowa woda-lód, lub zmiana stanu skupienia cieczy-ciało stałe innego czynnika.

Uzyskano zadowalająco dokładne rozwiązanie w postaci pól temperatury $T(x,y,t)$, pól strumieni ciepła $q(x,y,t)$ i położenia granicy międzyfazowej $F(x,y,t)$ w stanie nieustalonym w dwu wybranych układach dwuskładnikowych przy tworzeniu się lodu w tych układach.

Przedstawiona metoda służy do rozwiązywania zagadnień przewodzenia ciepła w układach dwuskładnikowych, w których mogą występować znaczne różnice przewodności cieplnej składników, np. lodu ($2,23 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$) i wtrącenia wykonanego z miedzi ($386 \text{ W/(m}\cdot\text{K)}$). W takim przypadku powstają znaczne różnice gradientów temperatury w lodzie i wtrąceniu; np. w układzie z wtrąceniem w kształcie koła gradient temperatury w lodzie o grubości $0,05 \text{ m}$ jest równy około 400 K/m , natomiast we wtrąceniu - około 5 K/m . Tak duża różnica gradientów temperatury w lodzie i wtrąceniu powoduje zwykle znaczne trudności w dokładnym wyznaczeniu linii izoterm i adiabat. Jak wykazały przeprowadzone obliczenia, zastosowanie w tym przypadku kla-

sycznych metod numerycznych służących do rozwiązywania zagadnienia przewodzenia ciepła w ośrodkach jednorodnych daje wyniki obarczone tak dużym błędem, że stają się one jakościowo nieużyteczne. Zaproponowana metoda dzięki zastosowaniu przedstawionego schematu różnicowego, zmiennego kroku w czasie i nieregularnej siatki elementów, na jakie można podzielić obszar układu, umożliwia uzyskanie poprawnego rozwiązania dla układów dwuskładnikowych ze zmianą fazy o dowolnych kształtach geometrycznych, różnych właściwościach cieplnych składników (stałych i zmiennych z temperaturą) oraz dla różnych warunków brzegowych (również nieustalonych w czasie).

W obszarze z daleka od wtrącenia, w którym nie obserwuje się zaburzenia pola temperatury wywołanego przez wtrącenie i proces zamrażania można traktować jako jednowymiarowe przewodzenie ciepła przy zmianie fazy w ośrodku jednoskładnikowym (klasyczne zagadnienie Stefana), grubość warstwy zamarzającego lodu ζ jest zgodna z rozwiązaniem analitycznym z dokładnością większą niż 0,5%.

BIBLIOGRAFIA

1. G.Comini, S. Del Giudice, O.Saro: A conservative algorithm for multidimensional conduction phase change. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 30, 1990.
2. H.S.Carslaw, I.C.Jaeger: *Conduction of heat in solids*. Clarendon Press, Oxford 1959.
3. G.Comini, S. Del Giudice, R.W.Lewis, O.C.Zienkiewicz: Finite element solution of nonlinear heat conduction problems with special reference to phase change. *Int. J. Num. Meth. Eng.*, Vol. 8, 1974.
4. J.Crank: *Free and Moving Boundary Problems*. Clarendon Press, Oxford 1984.
5. W.Gogół: Experimental investigations of freezing of water and heat conduction process in ice-solid inclusions system (to be published).
6. W.Gogół: Eksperymentalne badania procesu przewodzenia ciepła w układach dwuskładnikowych lód-wtrącenie z ciała stałego przy zamarzaniu wody. Praca własna, ITC, 1980-85.
7. W.Gogół i inni: Badania procesu przewodzenia ciepła w prostych układach dwuskładnikowych przy zmianie fazy

- jednego ze składników. Etap I. Sprawozdanie 437/3-E4. Komitet Termodynamiki i Spalania PAN, Warszawa 1984.
8. W.Gogół i inni: Badanie procesu przewodzenia ciepła w złożonych układach dwuskładnikowych przy zmianie fazy. Etap II. Sprawozdanie 462/3-E4, Komitet Termodynamiki i Spalania PAN, Warszawa 1985.
 9. W.Gogół, W.Pawłowski, E.Gogół, M.Halama: Badanie procesu przewodzenia ciepła w niejednorodnych ośrodkach lub układach dwuskładnikowych przy zmianie fazy jednego ze składników. Sprawozdanie O15/1-K4 (ITC), Warszawa 1990.
 10. W.Gogół, W.Pawłowski, E.Gogół, M.Halama: Określanie efektywnej przewodności cieplnej prostokątnych układów dwuskładnikowych. Archiwum Termodynamiki, Nr 3-4, 1990.
 11. W.Gogół: Wymiana ciepła - tablice i wykresy. WPW, Warszawa 1984.
 12. J.M.Hill: One-dimensional Stefan Problems: an Introduction. Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 31, Longman, J.Wiley, New York 1987.
 13. J.R.Ockendon, W.R.Hodgkins: Moving Boundary Problems in Heat Diffusion. University Press, Oxford 1975.
 14. P.J.Roache: Computational fluid dynamics. Hermosa Publishing, New Mexico 1982.
 15. C.I.Rubinsztein: Problema Stefana. Riga 1967.
 16. B.Staniszewski: Wymiana ciepła. PWN, Warszawa 1979.
 17. D.G.Wilson, A.D.Salomon, P.T.Boggs: Moving Boundary Problems. Academic Press, New York 1978.
 18. S.Wiśniewski: Wymiana ciepła. PWN, Warszawa 1988.
 19. V.R.Voller: Fixed grid techniques for phase change problems: a review. Int. J. Num. Meth. Eng., Vol. 30, 1990.
 20. O.C.Zienkiewicz, R.L.Taylor: The finite element method. Fourth edition, McGraw-Hill Book Company, London 1987.

NUMERICAL CALCULATIONS OF HEAT CONDUCTION PROBLEM
IN TWO-COMPONENTS SYSTEMS WITH PHASE CHANGE IN ONE
OF THE COMPONENTS

S u m m a r y

The method and the results of numerical calculations of the non-steady heat conduction in two-dimensional, two-component systems with phase change in one of the components are presented. This problem was investigated on the two systems example with water-ice phase change. The calculations have been performed for rectangular systems with circular and rectangular inclusions made of good heat conducting material (e.g. copper).

НУМЕРИЧЕСКИЕ ИСЧИСЛЕНИЯ ПРОЦЕССА ТЕПЛОПРОВОДИМОСТИ
В ДВУХКОМПОНЕНТНЫХ СИСТЕМАХ ПРИ ФАЗОВОМ ПЕРЕХОДЕ ОДНОГО
ИЗ СОСТАВЛЯЮЩИХ ТЕЛ

Р е з ю м е

В работе представлѐн метод и результаты нумерических исчислений нестационарной теплопроводимости в двухмерных, двухкомпонентных системах при изменении агрегатного состояния одного из тел. Изучены два примера систем, в которых происходит фазовое превращение вода-лед. Вычисления произведены для прямоугольных систем, в которых включения сделанные из материала о высокой теплопроводимости (например меди) имели форму круга или прямоугольника.