

Waldemar Jędrał

Instytut Techniki Ciepłej

## METODA I ALGORYTM KOMPUTEROWEGO OBLICZANIA SIŁ WZDŁUŻNYCH I PRZECIEKÓW WEWNĘTRZNYCH W POMPACH WIROWYCH

W pracy przedstawiono metodę i szczegółowo omówiono algorytm równoczesnego iteracyjnego wyznaczania przecieków w uszczelnieniach wewnętrznych pomp wirowych odśrodkowych oraz hydraulicznych sił wzdłużnych (naporów osiowych) działających na tarczach wirników pomp. Promieniowe rozkłady ciśnień wzdłuż tarcz wirników wyznaczono metodą opartą na związkach całkowych, omówioną we wcześniejszych pracach autora. Ważny element algorytmu, dotyczący obliczania tych rozkładów, może być przydatny także przy projektowaniu wszystkich innych maszyn wirnikowych.

### WYKAZ OZNACZEŃ

- A - współczynnik doświadczalny w potęgowym rozkładzie prędkości
- c - średnia po szerokości prędkość cieczy;  
 $c = |q|/2\pi r s$
- $c_p$  - bezwymiarowy współczynnik ciśnienia w przestrzeni bocznej (rys.2);  $c_p = \bar{p}_2 - \bar{p}$
- d - średnica
- $d_t, d_u, d_{w1}, d_2$  - średnice charakterystyczne wirnika i zespołu wirującego (rys.1)
- $f_I, f_{II}$  - bezwymiarowe siły wzdłużne;  $f = 2F/(\pi\varrho\omega^2 r_2^4)$
- $F_w$  - hydrauliczna siła wzdłużna (napór osiowy)
- $F_I, F_{II}, F_Q, F_{w1}$  - składowe siły  $F_w$

- g - przyspieszenie siły ciężkości
- $h_{\acute{s}r}, \bar{h}_{\acute{s}r}$  - średnia wysokość chropowatości ścianki;  
 $\bar{h}_{\acute{s}r} = h_{\acute{s}r}/s$
- H,  $H_{th}$  - wysokości podnoszenia pompy, rzeczywista i teoretyczna;  $H = H_{th} \eta_h$
- k - współczynnik zawirowania cieczy w połowie szerokości obszaru;  $k = (\omega_c/\omega)_{z=s/2}$
- l - długość szczeliny pierścieniowej wzdłużnej
- n - mianownik wykładnika  $1/n$  w potęgowym rozkładzie prędkości
- $n_q$  - wyróżnik szybkobieżności pompy;  
 $n_q = \frac{30\omega}{\pi} \sqrt{Q_{opt}/H_{opt}^3/4}$
- p,  $\bar{p}$  - absolutne ciśnienie statyczne cieczy;  $\bar{p} = 2p/\rho\omega^2 r_2^2$
- $\Delta p$  - spadek ciśnienia w obszarze lub szczelinie (zwężeniu) na średnicy  $d_1, d_2, d_t, d_u$
- $\Delta p_\omega$  - przyrost ciśnienia w obszarze wskutek wirowania cieczy
- q,  $\bar{q}$  - promieniowy przepływ tranzytowy w przestrzeni bocznej (równocześnie przeciek przez odpowiednią szczelinę wzdłużną);  $\bar{q} = q/\omega r_2^3$
- Q,  $Q_{th}$  - rzeczywista i teoretyczna wydajność pompy;  
 $Q = \eta_v Q_{th}$
- r,  $\bar{r}$  - współrzędna promieniowa;  $r = d/2, \bar{r} = r/r_2$
- Re - umowna liczba Reynoldsa;  $Re = c 2s/\nu$
- Re' - umowna liczba Reynoldsa;  $Re' = u 2s/\nu$
- Re $_\delta$  - umowna liczba Reynoldsa dla warstwy przyściennej
- Re $_\omega$  - umowna liczba Reynoldsa;  $Re_\omega = \omega r_2^2/\nu$
- s,  $\bar{s}$  - szerokość szczeliny wzdłużnej lub przestrzeni bocznej (okołowirnikowej);  $\bar{s} = s/r_2$
- S, S $_{max}$  - pomocnicza wielkość bezwymiarowa
- T - zmienna pomocnicza dla przepływu dośrodkowego;  
 $T = 1 - \bar{r}$
- u - prędkość obwodowa;  $u = \omega r$

$v_*$	- umowna prędkość dynamiczna; $v_* = \sqrt{\tau_\varphi / \rho}$
VG	- wielkość bezwymiarowa charakteryzująca chropowatość hydrauliczną; $VG = v_* h_{SR} / \nu$
z	- współrzędna osiowa; także - liczba stopni pompy wielostopniowej
$\delta, \bar{\delta}$	- grubość warstwy przyściennej; $\bar{\delta} = \delta / s$
$\delta_f$	- błąd wyznaczenia wartości siły wzdłużnej lub jej składowej ( $\delta_{fW}, \delta_{fI}, \delta_{fII}$ )
$\varepsilon$	- założona dokładność obliczeń w poszczególnych pętlach iteracyjnych
$\zeta$	- współczynnik spadku ciśnienia na wlocie do szczeliny (przewężenia)
$\eta, \eta_h, \eta_m, \eta_v$	- poszczególne sprawności pompy: całkowita, hydrauliczna, mechaniczna, objętościowa (volumetryczna)
$\eta_w$	- sprawność hydrauliczna wirnika pompy
$\lambda$	- współczynnik strat ciśnienia wskutek tarcia, średni dla obu ścianek obszaru lub szczeliny wzdłużnej
$\nu$	- kinematyczna lepkość cieczy
$\rho$	- gęstość cieczy
$\tau_\varphi$	- naprężenie styczne obwodowe na ścianie wirującej lub nieruchomej
$\omega$	- prędkość kątowna wirnika (zespołu wirującego) pompy
$\omega_c$	- lokalna prędkość kątowna cząstki cieczy, w punkcie (r, z)

Wszystkie wielkości wyrażone są w głównych jednostkach układu SI.

#### Wskaźniki dolne

- 1, 2, 3 - dotyczy powierzchni położonych na promieniach  $r_1, r_2, r_3$
- I, II - dotyczy przestrzeni bocznych I, II
- k - dotyczy ścianki nieruchomej (korpusu)
- opt - dotyczy optymalnego ( $Q_{opt}, H_{opt}$ ) punktu pracy pompy

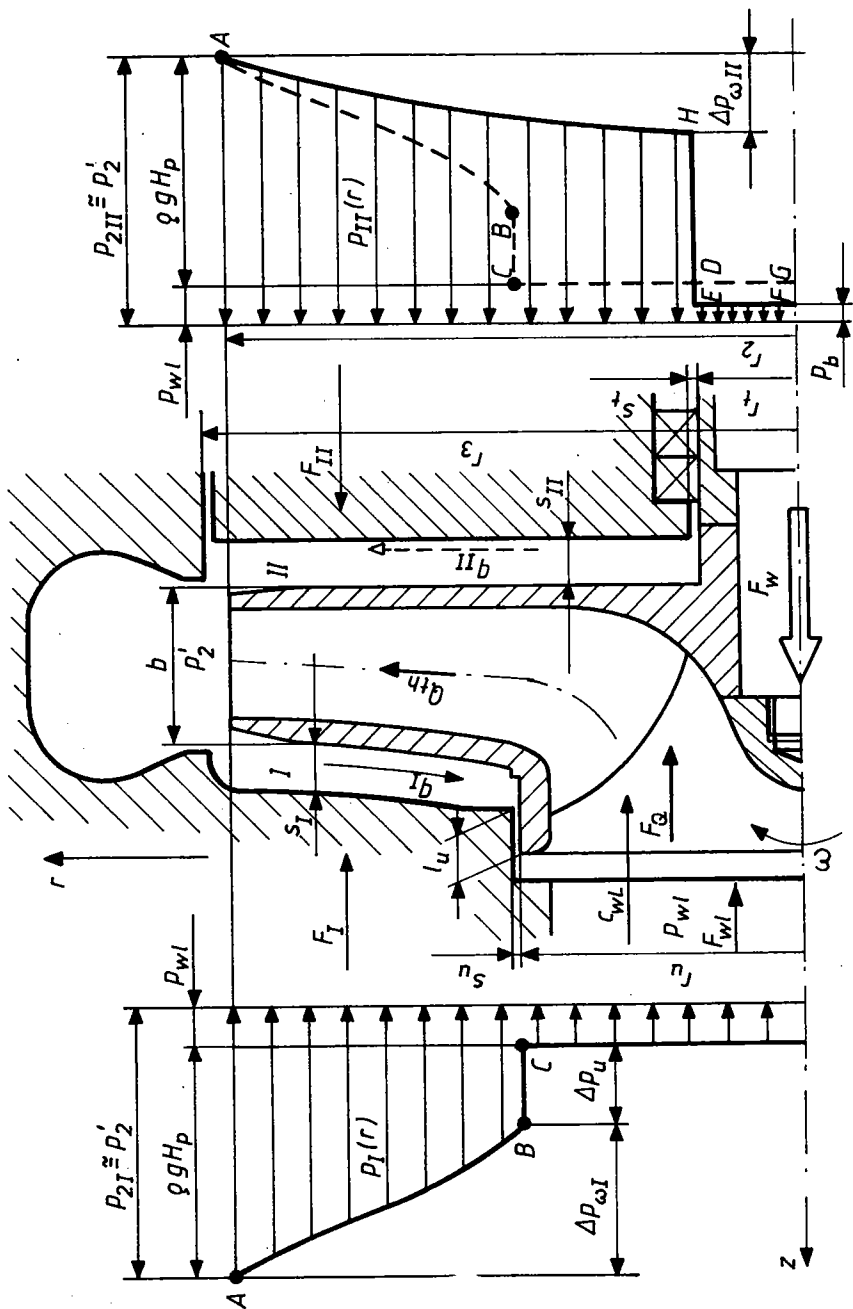
- śr - oznacza wartość uśrednioną po szerokości lub długości obszaru (szczeliny) albo średnią dla obu ścianek
- t - dotyczy ścianki wirującej (tarczy)

## 1. WSTĘP

Podczas projektowania maszyn wirnikowych należy między innymi wyznaczyć promieniowe rozkłady ciśnień w przestrzeniach bocznych wokół wirników i hydrauliczne siły wzdłużne, będące skutkiem działania tych ciśnień.

Tarcze wirników, na przykład wirników pomp wirowych, wprawiają w ruch ciecz wypełniającą przestrzenie okołowirnikowe. Na przepływy cyrkulacyjne nakładają się wymuszone zewnętrznie promieniowe przepływy "tranzytowe". Wynikiem są promieniowe rozkłady ciśnień w przestrzeniach I, II (rys.1) oraz przecieki  $q_I$ ,  $q_{II}$  przez bezстыkowe uszczelnienia wewnętrzne. Możliwie dokładne obliczenie rozkładów  $p_I(r)$ ,  $p_{II}(r)$  i sił wzdłużnych jest jednym z ważnych problemów inżynierskich.

Rozkłady  $p_I(r)$ ,  $p_{II}(r)$  można obliczyć za pomocą jednej ze znanych metod dla konkretnych, założonych wartości  $q_I < 0$ ,  $q_{II} \leq 0$  [1, 5]. Celem niniejszej pracy jest podanie metody i algorytmu równoczesnego obliczenia siły wzdłużnej  $F_w$  i nie znanych z góry przecieków  $q_I$ ,  $q_{II}$  w pompie wirowej. Metody takiej brak do chwili obecnej w literaturze. Jednym z elementów algorytmu jest obliczenie rozkładu ciśnień  $p(r)$  w przestrzeni bocznej wąskiej ( $\bar{s} \leq 0,03$ ) lub szerokiej ( $\bar{s} > 0,03$ ) o ściankach hydraulicznie gładkich lub chropowatych. Może on znaleźć zastosowanie w innych niż pompy maszynach wirnikowych, takich jak turbiny wodne, parowe i gazowe, sprzęgła i przekładnie hydrokinetyczne, sprzężarki, młyny wirnikowe itp.



Rys.1. Rozkłady ciśnień w przestrzeniach okołowirnikowych pompy odśrodkowej jednostopniowej ( $n_q < 60$ )

## 2. SIŁA WZDŁUŻNA I JEJ SKŁADOWE

Ciśnienia  $p_I(r)$  i  $p_{II}(r)$  powodują powstanie sił  $F_I$ ,  $F_{II}$  skierowanych wzdłuż osi pompy:

$$F_I = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} p_I(r) r dr, \quad (1)$$

$$F_{II} = 2\pi \int_{r_1}^{r_2} p_{II}(r) r dr. \quad (2)$$

Siły te są głównymi składowymi naporu osiowego  $F_w$ . Pozostałe składowe stanowią:

- siła wynikająca ze zmiany kierunku strumienia cieczy w obszarze wlotowym wirnika; dla najczęstszego przypadku zmiany kierunku przepływu o  $90^\circ$  jest ona równa

$$F_Q = \rho Q_{th}^2 c_{wl} = \rho \frac{Q_{th}^2}{A_{wl}},$$

gdzie:  $A_{wl} = \frac{\pi}{4} (d_{wl}^2 - d_t^2)$  - pole powierzchni przekroju wlotowego wirnika;

- siła wynikająca z różnicy ciśnienia wlotowego  $p_{wl}$  i atmosferycznego  $p_b$

$$F_{wl} = \frac{\pi}{4} d_t^2 (p_{wl} - p_b).$$

Całkowita siła wzdłużna dla jednostopniowej pompy wirowej (rys.1) o wyróżniku  $n_q \leq 50(60)$  wynosi

$$F_w = F_{II} - F_I - F_Q - F_{wl}, \quad (3)$$

przy czym wartości siły  $F_Q$  są zwykle pomijalnie małe, natomiast niekiedy znaczne wartości może osiągać siła  $F_{wl}$  - w przypadku pomp pracujących w obiegach o wysokich ciśnieniach  $p_{wl}$ .

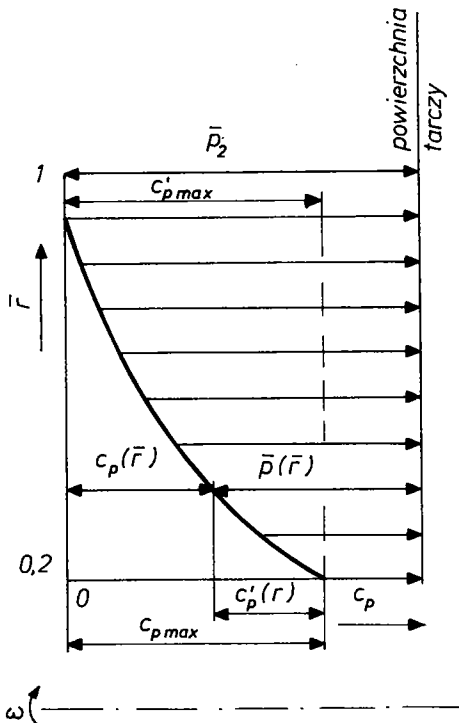
Rozkłady ciśnień  $p(r)$  oblicza się rozwiązując dla każdego z obszarów I, II równanie  $\frac{dp}{dr} = \rho \omega^2 k^2 r$  [1, 5], po uprzednim wyznaczeniu rozkładów  $k(\bar{r})$  współczynników zawirowań z równań (38,39) i (43,44) (tabl.2, rys.5). W celu umożliwienia porównań i dla łatwiejszej oceny wyników zamiast  $p(r)$  wyznacza się bezwymiarowy rozkład  $c_p(\bar{r}) = \bar{p}_2 - \bar{p}$ , a następnie pomocniczą wielkość bezwymiarową

$$S_{\max} = 2 \int_{\bar{r}_1}^1 c_p \bar{r} d\bar{r}, \quad (4)$$

gdzie:  $\bar{r} = r/r_2$ ,  $\bar{r}_1 = \bar{r}_u$  - dla przestrzeni I,  $\bar{r}_1 = \bar{r}_t$  - dla przestrzeni II.

Definiując bezwymiarową siłę  $f$  jako

$$f = 2 \int_{\bar{r}_1}^1 \bar{p} \bar{r} d\bar{r}$$



Rys.2. Związek między rozkładami  $\bar{p}(\bar{r})$ ,  $c_p(\bar{r})$ ,  $c_p'(\bar{r})$

i uwzględniając (rys.2), iż  $\bar{p}(\bar{r}) = \bar{p}_2 - c_p(\bar{r})$ , otrzyma się

$$f = \bar{p}_2(1 - \bar{r}_1^2) - S_{\max}. \quad (5)$$

Właściwa siła,  $F_I$  lub  $F_{II}$ , jest wówczas równa

$$F = \frac{\pi}{4} d_2^2 \frac{1}{2} \rho u_2^2 f.$$

### 3. WARTOŚĆ CIŚNIENIA NA GRANICY OBSZARU

W celu obliczenia wartości  $f_I$ ,  $f_{II}$  należy najpierw wyznaczyć wartość ciśnienia  $p_2$  na zewnętrznej granicy obszaru, tj. na powierzchni walcowej o średnicy  $d_2$ . Wartość ta, podobnie jak wartość  $k_2$  zawirowania strumienia cieczy wpływającej do rozpatrywanego obszaru [1], zależy od wysokości podnoszenia pompy oraz od stopnia zamknięcia (tj. odizolowania od wylotu wirnika) tego obszaru. Ogólnie można napisać:

$$p_2 = p_2' \pm \Delta p_2,$$

gdzie: znak "-" dotyczy przepływu dośrodkowego ( $q < 0$ ) występującego w obszarach I wszystkich typów pomp wirowych, znak "+" dotyczy przepływu odśrodkowego ( $q > 0$ ) występującego na przykład w przestrzeniach II za wirnikami wszystkich - poza ostatnim - stopni pomp wielostopniowych.

Dla przestrzeni całkowicie otwartych (rys.3c), charakterystycznych dla większości typowych jednostopniowych pomp odśrodkowych

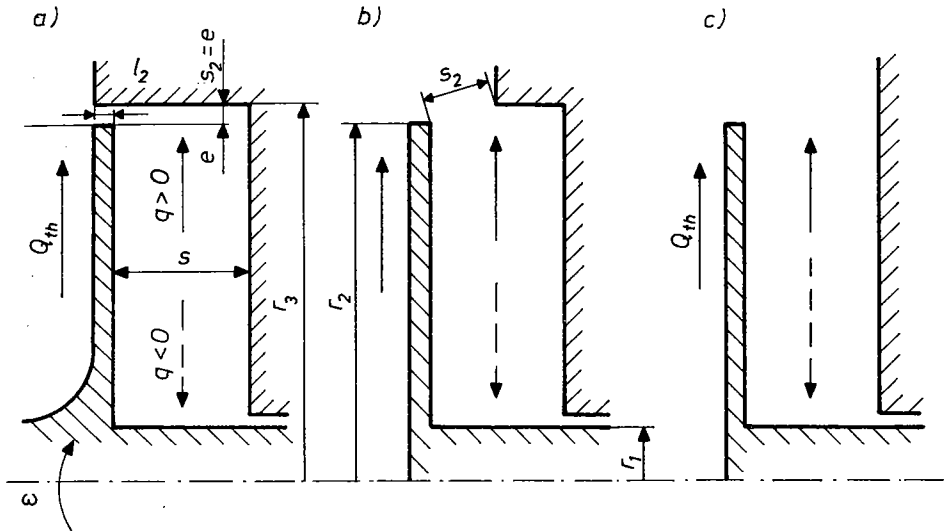
$$\Delta p_2 = 0.$$

Dla przestrzeni częściowo otwartych (rys.3b), mających przewężenie o szerokości  $s_2$ :

$$\Delta p_2 = \rho \frac{c_2^2}{2} \zeta_2;$$



wartość współczynnika  $\zeta_2$  oporu przepływu w przewężeniu można oszacować np. wg [2].



Rys. 3. Uproszczone kształty typowych przestrzeni okołowirnikowych i rodzaje ich zamknięcia

Dla przestrzeni zamkniętej (rys. 3a), oddzielonej od wylotu z wirnika dość wąską wzdłużną szczeliną pierścieniową o szerokości  $s_2$  i długości  $l_2$ :

$$\Delta p_2 = \rho \frac{c_2^2}{2} \left( \zeta_2 + \lambda_2 \frac{l_2}{2s_2} \right).$$

W przypadku długich szczelin do obliczenia wartości  $\lambda_2$  można wykorzystać znany wzór Yamady; w znacznie częstszym przypadku szczelin krótkich należy wykorzystać jeden z istniejących wzorów empirycznych. Odpowiednie zależności, jak również wartości współczynnika  $\zeta_2$ , można znaleźć m.in. w [4].

Ciśnienie  $p_2$  na wylocie z wirnika oblicza się z zależności

$$p_2' = p_{w1} + \rho g H_p,$$

gdzie potencjalna wysokość podnoszenia  $H_p^*$ , dla wirnika o sprawności hydraulicznej  $\eta_w$ , zwykle jest wyznaczana z wzoru [6]

$$H_p = \eta_w H_{th} \left( 1 - \frac{gH_{th}}{2u_2^2} \right).$$

Ciśnienie wlotowe jest w rzeczywistych pompach zawsze większe od zera, jednak dla wygody dalszych obliczeń dobrze jest przyjmując  $p_{w1} = 0$ . Fakt, że w istocie  $p_{w1} \neq 0$ , uwzględniono we wzorze na składową  $F_{w1}$  naporu osiowego (wartość  $F_w - F_Q$  jest proporcjonalna do różnicy objętości brył powstałych przez obrót wokół osi wirnika figur ABCDH i DEFG, rys.1).

#### 4. ITERACYJNE OBLICZENIE PRZECIEKÓW I SIŁY WZDŁUŻNEJ

Informacje podane w [1, 5] oraz w poprzednich punktach byłyby w pełni wystarczające do wyznaczenia rozkładów  $p_I(r)$ ,  $p_{II}(r)$  oraz siły  $F_w$ , gdyby wartości przecieków  $q_I$ ,  $q_{II}$  były znane a priori. Tak jednak nie jest (poza spotykanym dość często przypadkiem, gdy  $q_{II} = 0$ ). Ogólnie biorąc, rozkład ciśnień  $p(r)$  i wynikła zeń różnica ciśnień  $\Delta p_\omega$  (rys.1) dla każdego z obszarów I, II silnie zależą od strumienia przecieku  $q$ . Z drugiej strony wartość  $q$  zależy od geometrii szczeliny znajdującej się na promieniu  $r_1 = r_u$  lub  $r_1 = r_t$  i od "przyłożonego" do niej spadku ciśnienia  $\Delta p_1$ , którego wartość uzależniona jest z kolei od  $p(r)$  i  $\Delta p_\omega$ . Wartość  $q$  należy więc znaleźć iteracyjnie, szukając rozwiązania równania

$$\Delta p_w = \Delta p_r. \quad (6)$$

\*) Będąca wynikiem bezpośredniego przyrostu energii ciśnienia w wirniku.

Rozporządzalny (wytworzony przez pompę) spadek ciśnienia  $\Delta p_r$  w ciągu obszarów: szczelina  $s_1 \rightarrow$  przestrzeń I lub II  $\rightarrow$  szczelina  $s_2$  wynosi:

- dla przestrzeni I

$$\Delta p_{rI} = \rho g H_p,$$

- dla przestrzeni II zależy on od konkretnego przypadku konstrukcyjnego, na przykład dla typowej pompy wielostopniowej

$$\Delta p_{rII} = \rho g (H - H_p), \quad (7a)$$

$$\Delta p_{rII} = \rho g [(z - 1)H + H_{po}] - \Delta p_{odc}. \quad (7b)$$

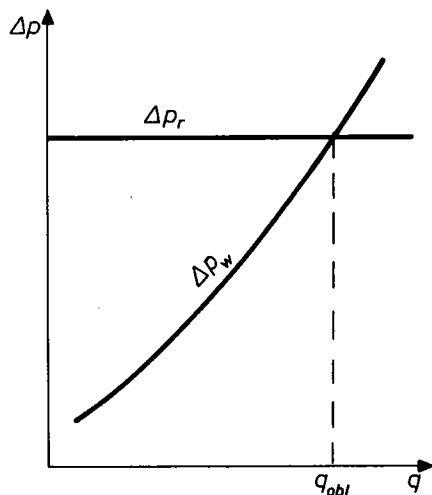
Wzór (7a) dotyczy wszystkich, poza ostatnim, stopni pompy wielostopniowej; wzór (7b) - stopnia ostatniego, przy czym  $H$  i  $H_p$  dotyczą jednego stopnia pompy,  $H_{po}$  jest potencjalną wysokością podnoszenia stopnia ostatniego, zaś  $\Delta p_{odc}$  - spadkiem ciśnienia w układzie tarczy lub bębna odciążającego. W tych pompach jednostopniowych, w których  $q_{II} \neq 0$ , należy indywidualnie rozpatrzeć różne możliwe przypadki obliczając  $\Delta p_r$  (np. pompa z uszczelnieniem czołowym, pompa z przepłukaniem dławnicy itp.).

Wynikowy spadek ciśnienia  $\Delta p_w$  w tym samym ciągu obszarów, będący funkcją ich geometrii oraz przecieku  $q$ , wynosi

$$\Delta p_w = \Delta p_1 + \Delta p_2 \pm \Delta p_w;$$

w tym przypadku znak "+" dotyczy  $q < 0$ , zaś znak "-"  $q > 0$ . Spadek  $\Delta p_1$  oblicza się analogicznie jak spadek  $\Delta p_2$  w wąskiej szczelinie. Oczywiście  $\Delta p_w$  musi być równe  $\Delta p_r$ .

Równanie (6) można rozwiązać dowolnym sposobem, a więc np. wykreślić (rys.4) lub ite-



Rys.4. Graficzne rozwiązanie równania (6)

racyjnie - w przypadku obliczeń komputerowych; otrzyma się wówczas ostateczne wartości  $q_I$  i  $q_{II}$ . Dla tych właśnie wartości należy obliczyć końcowe rozkłady  $c_{pI}(\bar{r})$  i  $c_{pII}(\bar{r})$ , sprawdzić poprawność założenia odnośnie do gładkości bądź chropowatości ścianek i dopiero wówczas obliczyć wartość siły  $F_w$ . Algorytm tych wszystkich obliczeń przedstawiono w p.6.

## 5. BŁĄD OBLICZENIA WARTOŚCI SIŁY WZDŁUŻNEJ

Błąd obliczenia siły  $F_w$  przedstawioną metodą jest m.in. funkcją wartości stosunku sił  $f_{II}/f_I = F_{II}/F_I$ , zależącego przede wszystkim od wartości  $n_q$  wyróżnika szybkobieżności. Z rysunku 2 i zależności (4, 5) wynika, że błędy  $\delta_{fI}$  i  $\delta_{fII}$  oszacowania sił  $F_I$  i  $F_{II}$  mogą być dużo mniejsze od błędów wyznaczenia rozkładów  $c_{pI}(\bar{r})$  i  $c_{pII}(\bar{r})$ . Przyczyną tego jest fakt, iż dla dużych wartości  $\bar{r}$   $\bar{p}$  jest zwykle znacznie większe od  $c_p$ , podczas gdy na małych promieniach  $\bar{r}$  wpływ wartości  $\bar{p}$  na wartości sił jest w ogóle niewielki. Ze wzorów (4 i 5) można łatwo obliczyć, iż np. dla typowej pompy odśrodkowej o wyróżniku  $n_q \cong 18$ , przy błędzie oszacowania  $c_p$  ok. 30% dla każdego  $\bar{r}$ , błąd oszacowania siły  $F_I$  wynosi już tylko 5,4%. Jest przy tym ważne, że siła  $F_I$  będzie obliczona z niedomiarem:  $\delta_{fI} < 0$ , ze względu na zawyżone wartości współczynnika zawirowania  $k$ , jakie otrzymuje się dla  $q_I < 0$  wyznaczając rozkład  $k_I(\bar{r})$  metodą omówioną w [1, 5].

Można ponadto oszacować [5], iż błąd obliczenia siły  $F_{II}$  nie powinien przekraczać 5%:  $|\delta_{fII}| \leq 0,05$ , zarówno dla  $q = 0$  ( $k_{II}$  wyznaczone ze wzorów empirycznych podanych w [1, 5]), jak i dla  $q > 0$  ( $k_{II}$  obliczone wspomnianą wyżej metodą). W ostatecznym wyniku siła wypadkowa będzie, w ogromnej większości przypadków, obliczona z nadmiarem.

Dla  $q \geq 0$  nie można jednak określić znaku błędu  $\delta_{fII}$ . W najmniej korzystnym przypadku różnych znaków obu błędów moż-

na łatwo otrzymać, zakładając przy tym  $|\delta_{f_{II}}| = |\delta_{f_{I}}| = \delta$ , iż błąd oszacowania siły wypadkowej wyniesie\*)

$$\delta'_{fw} = \frac{f_{II}/f_I + 1}{f_{II}/f_I - 1} \delta \quad (8)$$

Dla  $f_{II}/f_I = F_{II}/F_I = 1,2; 1,3; 1,4; 1,5$  i  $\delta = 4\%$  otrzyma się odpowiednio:  $\delta'_{fw} = +44\%, +31\%, +24\%, +20\%$ . Mimo niewielkiej wartości  $\delta$  błąd  $\delta'_{fw}$  może być więc znaczny - jest to spowodowane odejmowaniem od siebie przy obliczaniu  $F_w$  (wzór 3) wartości  $F_{II}$  i  $F_I$  niezbyt różniących się między sobą. Korzystny jest natomiast fakt, iż przy wykonywaniu obliczeń za pomocą przedstawionej metody błąd obliczeń będzie błędem nadmiaru - rzeczywista siła powinna być mniejsza, a nie większa, od obliczonej. Przy projektowaniu łożyskowania lub układów odciążających nie trzeba więc stosować żadnych dodatkowych zapasów na korzyść pewności obliczeń.

Całkowity błąd  $\delta_{fw}$  obliczenia siły  $F_w$  jest większy od  $\delta'_{fw}$  wskutek wpływu błędów oszacowań wartości  $H_p$ , ciśnień brzegowych  $p_{2I}$  i  $p_{2II}$  oraz zawirowania początkowego  $k_2$ , których nie można wyznaczyć dostatecznie dokładnie na podstawie dotychczas dostępnych danych (błędy wyznaczenia przecieków  $q_I$  i  $q_{II}$  można w praktyce pominąć). Zatem dokładność przedstawionej metody najlepiej ocenić porównując wyniki obliczeń z rzeczywistymi, zmierzonymi wartościami sił wzdłużnych.

Tablica 1

Porównanie sił osiowych zmierzonych w pompach jednostopniowych z siłami obliczonymi przedstawioną metodą oraz metodą Pfleiderera

Typ pompy jedno-stopniowej	$Q_{opt}$ [m <sup>3</sup> /h]	$H_{opt}$ [m]	Prędkość obrotowa [obr/min]	$n_q$ [-]	$F_w$ obl [N]	$F_w$ zmierz [N]	$\delta_{fw}$ [%]	$F_w$ oblicz. metodą Pfleiderera
3KAN25	15,3	82,9	2905	7	3993	3520	+13,4	990 (!)
6KAN16	61	26,9	2902	32	1271,5	1161,3	+9,5	1011,3
5KAN16	28,1	31,3	2900	19,4	1039,2	927	+12,1	703,0

\*) Przy pominięciu wpływu pozostałych składowych siły  $F_w$  oraz wpływu innych czynników.

DATA:  $Q, H, \omega, \varphi, \nu, g=9,80665; \rho_{wl}, \rho_b, z, \Delta p_{odc}, s_I, s_{II}, d_2, l_{2I}, s_{2I}, l_{2II}, s_{2II}, h_{2sr}, d_u, l_u, s_u, d_t, l_t, s_t, h_{1sr}, d_{wl}, h_{tI}, h_{kI}, h_{tII}, h_{kII}, e_I, e_{II}, \varepsilon_1, \varepsilon_2, C, k_1, \bar{q}_{pI}, \bar{q}_{pII}, k_{srpI}, k_{srpII}, \lambda_p, \zeta_1, \zeta_2$

$Re_\omega = (1), Re_2' = (2), u_2 = (3), \eta_h = (4), \eta_h' = (5), H_p = (6), n_q = (7), \eta_v = (8), Q_{th} = (9), A_{wl} = (10)$

$s = s_I, d_1 = d_u, l_1 = l_u, s_1 = s_u, l_2 = l_{2I}, s_2 = s_{2I}, h_t = h_{tI}, h_k = h_{kI}, k_{sr} = k_{srpI}, \bar{q}_p = \bar{q}_{pI} (\bar{q} < 0)$

$\bar{r}_1 = (11), \bar{r}_{sr} = (12), \bar{s} = (13), h_{sr} = (14); \bar{h}_{sr} = (15), \bar{s} \leq 0,03: \bar{\delta}_{sr} = (16), \bar{s} > 0,03: \bar{\delta}_{sr} = (24);$

$Re_{\delta_{sr}} = (27), n = (17), A = (18), B = (19), \tau_{\varphi_{sr}} = (20), v_{*sr} = (21), VG = (22)$

$\bar{q} < 0$

$\bar{q} > 0$

$k_Q = (31); e = 0: k_2 = (32), e > 0: \gamma = (33), M = (34), k_2 = (35); k(\bar{r}_1) = k_1, c_p(\bar{r}_1) = 0,$   
 $\bar{T} = (36), \frac{dk}{d\bar{T}} = (37a), \frac{dc_p}{d\bar{T}} = (37b), \frac{dS}{d\bar{T}} = (37c); S'(\bar{r}_1) = 0$   
 $k(0) = k_2, c_p(0) = 0, S(0) = 0$

$\bar{s} \leq 0,03$ i VG ≤ 5	$\bar{s} \leq 0,03$ i VG > 5	$\bar{s} > 0,03$ i VG ≤ 5	$\bar{s} > 0,03$ i VG > 5
$\frac{dk}{d\bar{T}} = (38), \frac{dc_p}{d\bar{T}} = (45),$ $\frac{dS}{d\bar{T}} = (46) (S' - \text{dla } \bar{q} > 0)$	dla i = 1 $\lambda = \lambda_p$ $\frac{dk}{d\bar{T}} = (43), \frac{dc_p}{d\bar{T}} = (45),$ $\frac{dS}{d\bar{T}} = (46) (S' - \text{dla } \bar{q} > 0)$	$\bar{\delta}_t = \bar{\delta}_k = \bar{\delta}_{sr};$ $\frac{dk}{d\bar{T}} = (39), \frac{dc_p}{d\bar{T}} = (45),$ $\frac{dS}{d\bar{T}} = (46) (S' - \text{dla } \bar{q} > 0)$	dla i = 1 $\lambda = \lambda_p$ $\frac{dk}{d\bar{T}} = (44), \frac{dc_p}{d\bar{T}} = (45),$ $\frac{dS}{d\bar{T}} = (46) (S' - \text{dla } \bar{q} > 0)$

$\bar{q} > 0: c_{pmax} = c_p(\bar{r}_1), \bar{q} < 0: c_{pmax} = c_p(T_{max}) = c_p(1 - \bar{r}_1); \Delta p_\omega = (51), c_1 = (52), u_1 = (54),$   
 $N_1 = (55), Re_{1gr} = (57), Re_1 = (58), \lambda_1 = (59), \Delta p_1 = (60), c_2 = (53), N_2 = (56), Re_{2gr} = (61),$   
 $Re_2 = (62), \lambda_2 = (63), \Delta p_2 = (64) \text{ lub } (65) \text{ lub } (66), \Delta p_{rI} = (67), \Delta p_{rII} = (68) \text{ lub } (69);$   
 $\bar{q} < 0: \Delta p_w = (71), \bar{q} > 0: \Delta p_w = (70); \bar{q}_{j+1} = (72)$

$|(\bar{q}_{j+1} - \bar{q}_j) / \bar{q}_j| \leq \varepsilon_1: k_{sr} = (23)$

$|(\bar{q}_{j+1} - \bar{q}_j) / \bar{q}_j| > \varepsilon_1$

$\bar{s} \leq 0,03$   
VG > 5 | VG ≤ 5

$\bar{q} = \bar{q}_{j+1}$

$n = (40a), Re_{sr} = (40b), \lambda_1 = (41), \lambda_2 = (42),$   
 $\tau_{\varphi_{sr}} = (28b), v_{*srt} = (21), VG_t = (22), \tau_{k\varphi_{sr}} =$   
 $= (29b), v_{*srk} = (21), VG_k = (22), VG = (30),$   
 $VG < 70: \lambda = \lambda_1, VG \geq 70: \lambda = \lambda_2$   
 $\lambda_{i+1} \neq \lambda_i$  |  $\lambda_{i+1} = \lambda_i$   
 $\lambda = \lambda_{i+1}$

$\bar{\delta}_{sr} = (24), Re_{\delta_{sr}} = (27), n = (17), Re_{\delta_t} = (25),$   
 $\tau_{\varphi_{sr}} = (28a), v_{*srt} = (21), VG_t = (22), Re_{\delta_k} = (26),$   
 $\tau_{k\varphi_{sr}} = (29a), v_{*srk} = (21), VG_k = (22), VG = (30)$   

VG ≤ 5	VG > 5: n = (40a)
$\frac{ n_{i+1} - n_i }{n_{i+1}} > \varepsilon_2$	$\frac{ n_{i+1} - n_i }{n_{i+1}} \leq \varepsilon_2$

$s = s_I$  |  $s = s_{II}$

$n = n_{i+1}$

$S_{max} = (50a), p_2 = (73), \bar{p}_2 = (76),$   
 $f_I = (77), F_I = (78)$

$\bar{q} < 0: S_{max} = (50a), p_2 = (73), \bar{q} > 0: S_{max} = (50a),$   
 $S_{max} = (50b), p_2 = (74); \bar{p}_2 = (76), f_{II} = (77), F_{II} = (78)$

$s = s_{II}, d_1 = d_t, l_1 = l_t, s_1 = s_t, l_2 = l_{2II}, s_2 = s_{2II}, h_t = h_{tII}, h_k = h_{kII}, k_{sr} = k_{srpII}, \bar{q}_p = \bar{q}_{pII}$

$\bar{q}_{pII} \neq 0$  |  $\bar{q}_{pII} = 0$

$e = 0: k_{sr} = (47), e > 0: k_{sr} = (48); S_{max} = (49),$   
 $p_2 = (75), \bar{p}_2 = (76), f_{II} = (77), F_{II} = (78)$

$F_{wl} = (79), F_Q = (80),$   
 $z=1: F_w = (81); z > 1: F_w = (82)$

PRINT:  $\bar{q}_I, \bar{q}_{II}, k_{srI}, k_{srII}, c_{pmaxI}, c_{pmaxII}, S_{maxI}, S_{maxII},$   
 $f_I, f_{II}, F_I, F_{II}, F_Q, F_{wl}, F_w$

Zestawienie wzorów obliczeniowych wykorzystanych w algorytmie przedstawionym na rys. 5

$Re_{\omega} = \frac{\omega d_2^2}{4\nu}$	(1)	$M = \left(2^{1/n} \frac{2n}{n+1} A\right)^{\frac{2n}{n+1}} \left(\frac{0,2 Re_2'}{Re_{\omega}^{1/5} \bar{s}}\right)^{\frac{2}{n+1}}$	(34)	$\Delta p_1 = \frac{\rho}{2} c_1^2 \left(\zeta_1 + \lambda_1 \frac{l_1}{2s_1}\right)$	(60)
$Re_2' = \frac{2u_2 s}{\nu}$	(2)	$2\pi(1+\gamma) \frac{s+e}{r_2} \frac{1}{ \bar{q} M} k_2^{\frac{2n-4}{n+1}} + \frac{1+2nk_2}{2(n+1)} = k_Q$	(35)	$Re_{2gr} = C \left(51 \frac{s_2}{h_{2fr}}\right)^{25/22}$	(61)
$u_2 = 0,5 \omega d_2$	(3)	$T = 1 - \bar{r} \rightarrow \bar{r} = 1 - T$	(36)	$Re_2 = \frac{c_2 2s_2}{\nu}$	(62)
$\eta_h = 1 - \frac{0,42}{(\log 4 \cdot 10^3 \sqrt[3]{Q/n} - 0,172)^2}$	(4)	$\frac{dk}{dT} = -\frac{dk}{dr}$	(37a)	dla $Re_2 \geq Re_{2gr}$ należy podstawić $Re_{2gr}$	(63)
$\eta_w = \sqrt{\eta_h}$	(5)	$\frac{dc_p}{dT} = -\frac{dc_p}{d\bar{r}}$	(37b)		
$H_p = \eta_w \frac{H}{\eta_h} \left(1 - \frac{gH}{2u_2^2 \eta_h}\right)$	(6)	$\frac{dS}{dT} = -\frac{dS}{d\bar{r}}$	(37c)		
$n_q = \omega \sqrt{QH}^{-3/4} \frac{30}{\pi}$	(7)	$\frac{dk}{d\bar{r}} = \frac{\frac{3-n}{2n+1} \pi}{\bar{q}(Re_2')^{n+1}} \frac{n+1}{n} \left(\frac{2n+1}{An}\right)^{\frac{2n}{n+1}} \left[(1-k) 1-k ^{n+1} - k^{n+1}\right] \frac{2n}{\bar{r}^{n+1}} - \frac{2k}{\bar{r}} - \frac{1}{n\bar{r}}$	(38)		
$\eta_v = (1 + 0,287 n_q^{-2/3})^{-1}$	(8)	$\frac{dk}{d\bar{r}} = \frac{\pi}{2^{n+1} \bar{q}(Re_2')^{n+1}} \frac{(2n+1)}{n} \left(\frac{2n+1}{An}\right)^{\frac{2n}{n+1}} \left[(1-k) 1-k ^{n+1} \left(\frac{1}{\delta_j}\right)^{\frac{2}{n+1}} - k^{n+1} \left(\frac{1}{\delta_k}\right)^{\frac{2}{n+1}}\right] \frac{2n}{\bar{r}^{n+1}} - \frac{2k}{\bar{r}}$	(39)		
$Q_{th} = \frac{Q}{\eta_v}$	(9)	$n = 1,60 + 0,9468 \ln(\delta_{fr}/\bar{H}_{fr})$	(40a)	$Re_{fr} = 4 Re_{2gr} \frac{n}{n+1}$	(40b)
$A_{wt} = \frac{\pi}{4} (d_{wt}^2 - d_i^2)$	(10)	$\lambda = 1,74 - 2 \log \left[ \left(\frac{\bar{H}_{fr}}{\delta_{fr}} + \frac{18,7}{Re_{fr} \sqrt{\lambda}}\right) \right]^{-2}$	(41)	$\Delta p_2 = 0$ (otwarta przestrzeń okołowirnikowa)	(64)
$\bar{r}_1 = \frac{r_1}{r_2} = \frac{d_1}{d_2}$	(11)	$\lambda = \left(2 \log \frac{\delta_{fr}}{\bar{H}_{fr}} + 1,74\right)^{-2}$	(42)	$\Delta p_2 = 0,5 \rho c_2^2 \zeta_2$ (częściowo otwarta przestrzeń okołowirnikowa)	(65)
$\bar{r}_{fr} = 0,5(1 + \bar{r}_1)$	(12)	$\frac{dk}{d\bar{r}} = \frac{\pi \lambda}{4 \bar{q}} \frac{n}{n+1} [(1-k) 1-k  - k^2] \bar{r}^2 - \frac{2k}{\bar{r}} - \frac{1}{n\bar{r}}$	(43)		
$\bar{s} = \frac{s}{r_2} = \frac{2s}{d_2}$	(13)	$\frac{dk}{d\bar{r}} = \frac{\pi \lambda}{4 \bar{q}} \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 [(1-k) 1-k  - k^2] \bar{r}^2 - \frac{2k}{\bar{r}}$	(44)		
$h_{fr} = 0,5(h_i + h_k)$	(14)	$\frac{dc_p}{d\bar{r}} = -2k^2 \bar{r}$	(45)	$\Delta p_2 = 0,5 \rho c_2^2 \left(\zeta_2 + \lambda_2 \frac{l_2}{2s_2}\right)$	(66)
$\bar{H}_{fr} = \frac{h_{fr}}{s}$	(15)	$\frac{dS}{d\bar{r}} = 2c_p \bar{r}$	(46)	$\Delta p_{r1} = \rho g H_p$	(67)

$\delta_{fr} = 0,5$ , dla $\bar{s} \leq 0,03$	(16)	$k_{fr} = 0,338 \bar{s}^{-0,1}$ , dla $\bar{q} = 0$	(47)	$\Delta p_{r11} = \rho g(H - H_p)$	(68)
$n = (0,203 - 0,0173 \log Re_{2gr})^{-1}$	(17)	$k_{fr} = \left[1 + \left(\frac{d_3}{d_2}\right)^2 \sqrt{\frac{d_3}{d_2} + 5\bar{s}}\right]^{-0,1}$ , $\bar{q} = 0$	(48)	$\Delta p_{r11} = \rho g[(z-1)H + H_{p0}] - \Delta p_{odc}$	(69)
$A = 0,92n + 2,3$	(18)	$S_{max} = 0,5 k_{fr}^2 (1 - \bar{r}_1^2)^2$ , dla $\bar{q} = 0$	(49)	$\Delta p_w = \Delta p_1 + \Delta p_2 - \Delta p_{\omega}$ , $\bar{q} > 0$	(70)
$B = 2^{1/n} \frac{2n}{2n+1} A$	(19)	$S_{max} = S(\bar{r}_1)$ , $S'_{max} = S'(1)$	(50a)	$\Delta p_w = \Delta p_1 + \Delta p_2 + \Delta p_{\omega}$ , $\bar{q} < 0$	(71)
$\tau_{\varphi fr} = \frac{1}{4} \frac{\rho u_2^2 \bar{r}_1^2}{B^{n+1} Re_{2gr}^{n+1}}$	(20)	$S_{max} = (1 - \bar{r}_1^2) c_{pmax} - S'_{max}$ dla $\bar{q} > 0$	(50b)	$\bar{q}_{j+1} = \bar{q}_j \sqrt{\frac{\Delta p_r}{\Delta p_w}}$	(72)
$v_{*fr} = \sqrt{\tau_{\varphi fr} / \rho}$	(21)	$\Delta p_{\omega} = 0,5 c_{pmax} \rho u_2^2$	(51)	$p_2 = \rho g H_p - \Delta p_2$ , $\bar{q} < 0$	(73)
$VG = \frac{v_{*fr} h_{fr}}{\nu}$	(22)	$c_1 = \frac{ q }{\pi d_1 s_1} = \frac{\omega d_2^2}{8 \pi d_1 s_1}  \bar{q} $	(52)	$p_2 = \rho g H_p + \Delta p_2$ , $\bar{q} > 0$	(74)
$k_{fr} = \left(\int_{r_1}^1 k d\bar{r}\right) / (1 - \bar{r}_1)$	(23)	$c_2 = \frac{ q }{\pi d_2 s_2} = \frac{\omega d_2^2}{8 \pi d_2 s_2}  \bar{q} $	(53)	$p_2 = \rho g H_p$ , $\bar{q} = 0$	(75)
$\delta_{fr} = \frac{0,6(1 - k_{fr}^2)}{Re_{\omega}^{1/5} \bar{s}} \bar{r}_{fr}^{3/5}$ , dla $\bar{s} > 0,03$	(24)	$u_1 = 0,5 \omega d_1$	(54)	$\bar{p}_2 = \frac{2p_2}{\rho u_2^2}$	(76)
$Re_{dt} = Re_{\omega} \bar{r}_{fr} \delta_{fr} \bar{s} (1 - k_{fr})$	(25)	$N_1 = \frac{u_1}{c_1}$	(55)	$f = \bar{p}_2 (1 - \bar{r}_1^2) - S_{max}$	(77)
$Re_{dk} = Re_{\omega} \bar{r}_{fr} \delta_{fr} \bar{s} k_{fr}$	(26)	$N_2 = \frac{u_2}{c_2}$	(56)	$F = \pi \frac{d_2^2}{4} \frac{1}{2} \rho u_2^2 f$	(78)
$Re_{2fr} = 0,5 Re_{\omega} \bar{r}_{fr} \delta_{fr}$	(27)	$Re_{1gr} = C \left(51 \frac{s_1}{h_{1fr}}\right)^{25/22}$	(57)	$F_{wt} = \frac{\pi}{4} d_i^2 (p_{wt} - p_b)$	(79)
$\tau_{i\varphi fr} = \frac{\rho u_2^2 \bar{r}_1^2 (1 - k_{fr})^2}{B^{n+1} Re_{2gr}^{n+1}}$	(28a)	$Re_1 = \frac{c_1 2s_1}{\nu}$	(58)	$F_Q = \frac{\rho Q_{th}^2}{A_{wt}}$	(80)
$\tau_{i\varphi fr} = \frac{\lambda}{8} \rho \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 u_2^2 \bar{r}_1^2 (1 - k_{fr})^2$	(28b)	$\lambda_1 = 0,307 Re_1^{-0,24} \left[1 + \left(\frac{7N_1}{16}\right)^2\right]^{0,38}$	(59)	$F_w = F_{11} - F_I - F_Q - F_{wt}$	(81)
$\tau_{k\varphi fr} = \frac{\rho u_2^2 \bar{r}_1^2 k_{fr}^2}{B^{n+1} Re_{2gr}^{n+1}}$	(29a)	dla $Re_1 \geq Re_{1gr}$ należy podstawić $Re_{1gr}$		$F_w = (F_{11} - F_I - F_Q)z - \Delta F$	(82)
$\tau_{k\varphi fr} = \frac{\lambda}{8} \rho \left(\frac{n}{n+1}\right)^2 u_2^2 \bar{r}_1^2 k_{fr}^2$	(29b)				
$VG_{\#} = 0,5(VG_i + VG_k)$	(30)				
$k_Q = \frac{gH}{u_2^2 \sqrt{\eta_h}}$	(31)				
$k_2 = k_Q - \frac{1}{2n}$	(32)				
$\gamma = \frac{e 2s + e}{r_2 s + e}$	(33)				

W tablicy 1 przedstawiono rezultaty pomiarów sił (metodą tensometryczną) z wynikami obliczeń. Widać, że mimo znacznych uproszczeń, jakimi jest obarczona metoda, jej dokładność jest dostateczna dla celów praktycznych. Można oczekiwać, że w żadnym z przypadków jej stosowania błąd obliczenia siły  $F_w$  nie powinien przekroczyć 15%, będąc przy tym - jak już wspomiano - błędem nadmiaru. Powyższe dotyczy również pomp wielostopniowych, w których przestrzenie I i II mają regularniejsze kształty; łatwiej jest wówczas oszacować spadki ciśnień  $\Delta p_{2I}$  i  $\Delta p_{2II}$  a ponadto większe są wartości stosunków  $f_{II}/f_I$  (por. wzór 8).

Należy ponadto zwrócić uwagę na fakt, iż dla pomp o małych wartościach  $q$  (tabl.1, pompa 3KAN25) błąd obliczenia siły wzdłużnej za pomocą tradycyjnej ("podręcznikowej") metody Pfeleiderera<sup>\*</sup>) może być wielokrotnie większy od rozsądnej technicznie dopuszczalnej wartości, co stawia pod znakiem zapytania celowość dalszego stosowania tej metody.

## 6. ALGORYTM OBLICZENIA PRZECIEKÓW I SIŁY WZDŁUŻNEJ

Algorytm obliczeń poszczególnych poszukiwanych wielkości:  $q_I$ ,  $q_{II}$ ,  $k_I(\bar{r})$ ,  $k_{II}(\bar{r})$ ,  $c_{pI}(\bar{r})$ ,  $c_{pII}(\bar{r})$ ,  $F_I$ ,  $F_{II}$  i wreszcie  $F_w$  przedstawiono na rys.5 w postaci szczegółowego schematu blokowego. Wzory występujące w tym algorytmie zestawiono w tabl.2. Na podstawie rys.5 i tabl.2 można bez trudu napisać program obliczeń komputerowych.

Niżej podano krótki komentarz do poszczególnych elementów algorytmu, przy czym numery wzorów odnoszą się do tabl.2, a nie do poprzednich rozdziałów pracy.

a. Symbole z indeksem "p" (por. DATA) oznaczają wartości początkowe (I przybliżenia) wielkości  $k_{\text{gr}}$ ,  $\bar{q}$ ,  $\lambda$ . Na podsta-

<sup>\*</sup>) Podstawą tej metody jest bardzo grube założenie, iż współczynniki zawirowania cieczy w obu przestrzeniach bocznych nie zależą od promienia  $r$  ani od przecieku  $q$  i mają jednokowe wartości  $k_I = k_{II} = 0,5 = \text{const.}$



wie dotychczasowych doświadczeń obliczeniowych można zalecić przyjmowanie  $k_{\text{srpI}} = k_{\text{srpII}} = 0,5$ ;  $\lambda_p = 0,03$ ;  $|\bar{q}_{pI}| = |\bar{q}_{pII}| = 0,002 - 0,003$ ; nie dotyczy to oczywiście odrębnego przypadku  $\bar{q} = 0$ . Wartość  $k_{\text{srp}}$  jest też potrzebna do obliczenia I przybliżenia grubości  $\delta_{\text{sr}}$  (wzór 24).

b. Dokładności  $\varepsilon_1, \varepsilon_2$ , z jakimi należy wykonywać poszczególne cykle obliczeń iteracyjnych, powinny wynikać z praktyki. Można przykładowo zalecić:  $\varepsilon_1 \cong 0,001$ ;  $\varepsilon_2 \cong 0,02 - 0,03$ . Wartość C potrzebną do obliczenia  $Re_{1gr}$  i  $Re_{2gr}$  można przyjmując  $C \cong 2,5$  [4]. Dla wąskich szczelin wzdłużnych  $s_1$  i  $s_2$  (0,2 - 1,0 mm) można przyjmując  $\xi_1 = \xi_2 = 1,2$ .

c. Sprawności  $\eta_h, \eta_w, \eta_v$  oraz potencjalną wysokość podnoszenia  $H_p$  przyjęto wg klasycznej literatury [6]. Zwiększenie dokładności ich oszacowania, zwłaszcza  $\eta_h$  i  $H_p$ , powiększyłoby również dokładność obliczania siły  $F_w$ .

d.  $Re_\delta$  oraz  $n$  a także  $r_{\phi\text{sr}}$  i  $v_{*\text{sr}}$  obliczono dla średniego promienia  $r_{\text{sr}} = \frac{1}{2}(r_1 + r_2)$ ,  $\bar{r}_{\text{sr}} = \frac{1}{2}(\bar{r}_1 + 1)$ . Jak wynika z zależności podanych w [1], wielkości powyższe zależą od  $r$ , stąd także wykładnik  $n$  potęgowego rozkładu prędkości powinien mieć wartość zmienną wraz z promieniem. W przypadku wąskich obszarów I, II wprowadzenie zmienności  $n(r)$  do algorytmu jest możliwe kosztem pewnej komplikacji i wydłużenia czasu obliczeń. W przypadku obszarów szerokich ( $\bar{s} > 0,03$ ) wymagałoby to również uwzględnienia zmian grubości  $\delta_t(r)$  i  $\delta_k(r)$  warstw przyściennych, opisanych jedynym (dla przecieku  $q \neq 0$ ) podawanym w literaturze wzorem empirycznym, o dość dyskusyjnej dokładności [5]. Wydaje się, że dla prostych z założenia metod jednoparametrowych uzmiennienie  $n(r)$  nie jest celowe, jako nie prowadzące do wydatnego wzrostu dokładności obliczeń. Z tego samego względu wymienione wyżej wielkości obliczono dla uśrednionej (wzór 23) wartości  $k_{\text{sr}}$  współczynnika zawirowania.

e. W przypadku gładkich obszarów wąskich wyznaczoną na początku wartość  $n = n_{\text{sr}}$  nie zmienia się w toku dalszych obliczeń, bo nie zmieniają się wartości  $\bar{\delta}_{\text{sr}} = 0,5$  i  $Re_{\delta\text{sr}}$ . W przypadku obszarów szerokich wraz z uściślaniem wartości  $\bar{q}$

oraz  $k_{sr}$  zmieniają się grubości  $\bar{\delta}_{sr}$ . Potrzebna jest więc dodatkowa pętla iteracyjna (nr 2). W tej samej pętli sprawdzane jest założenie dotyczące gładkości ścianek. Dla ścianek chropowatych ( $VG > 5$ ) obliczana i korygowana jest (wzór 40a) odpowiednia wartość wykładnika  $n$ .

f. W przypadku wąskich obszarów o ściankach chropowatych wartość  $n$  (wzór 40a) nie ulega wprawdzie zmianom, ale należy uściślić wartość  $\lambda$  zależną od  $VG$  precyzując, czy  $\lambda = \lambda_1$  czy też  $\lambda = \lambda_2$ . Służy temu celowi krótka (co najwyżej 3 przejścia) pętla iteracyjna nr 3.

g. W pompach jednostopniowych bardzo często w przestrzeni II za wirnikiem nie występuje tranzytowy przepływ promienio-  
wy:  $\bar{q}_{II} = 0$ . Podana w [1] jednoparametrowa metoda obliczeń wówczas zawodzi i należy skorzystać ze wzorów empirycznych na  $k_{sr}$  ( $\partial k / \partial r \cong 0$ ) oraz prostej zależności na  $S_{max}$ .

h. W obliczeniach można by rozwiązywać pojedyncze równania  $dk/d\bar{r}$  a następnie, wykonując proste całkowania, obliczyć  $c_p(\bar{r})$ ,  $S(\bar{r})$  i  $S_{max}$  (pamiętając, że wartość  $S_{max}$  potrzebna jest dopiero po wyjściu z drugiej i trzeciej pętli iteracyjnej). Wykonując obliczenia komputerowe można ww. wielkości otrzymać jako rozwiązania układu trzech równań różniczkowych. Dla przepływu osrodkowego ( $\bar{q} > 0$ ) nie jest jednak znana początkowa wartość  $c_p(\bar{r}_1) = c_{pmax}$  (por. rys.2). Wynikłą stąd trudność można łatwo ominąć, wprowadzając wielkość pomocniczą  $c'_p = c_{pmax} - c_p$ . Dla  $\bar{r} = \bar{r}_1$  jest  $c'_p = 0$  (por. rys.2), wobec czego można, począwszy od  $\bar{r} = \bar{r}_1$ , całkować równania:

$$\frac{dc'_p}{d\bar{r}} = 2k^2\bar{r} \quad \text{oraz} \quad \frac{dS'}{d\bar{r}} = 2c'_p\bar{r} \quad \text{z warunkami} \quad c'_p(\bar{r}_1) = S'(\bar{r}_1) = 0.$$

Na podstawie wartości  $c'_{pmax} = c_{pmax}$  i  $S'_{max}$  (dla  $\bar{r} = \bar{r}_2 = 1$ ) można obliczyć poszukiwaną wartość

$$\begin{aligned} S_{max} &= 2 \int_{\bar{r}_1}^1 c_p \bar{r} d\bar{r} = 2 \int_{\bar{r}_1}^1 (c_{pmax} - c'_p) \bar{r} d\bar{r} = \\ &= \left(1 - \bar{r}_1^2\right) c_{pmax} - S'_{max}. \end{aligned}$$

Na środkowej części schematu blokowego (rys.5) tylko zasygnalizowano istnienie alternatywy: obliczenie  $S$  albo  $S'$ , aby nie komplikować go nadmiernie.

Podobnie, zamiast obliczać  $k_{sr}$  z wzoru (23), można równocześnie z  $dk/d\bar{r}$  rozwiązywać równanie  $dx/d\bar{r} = k$  (dla  $\bar{q} > 0$ ) lub  $dx/dT = -k$  (dla  $\bar{q} < 0$ ), a następnie obliczyć  $k_{sr} = x_{max}/(1 - \bar{r}_1)$ , gdzie:  $x_{max} = x(\bar{r}_1)$  - dla  $q < 0$ ,  $x_{max} = x(\bar{r}_2) = x(1)$  - dla  $q > 0$ .

i. W przestrzeniach II z-1 stopni pomp wielostopniowych z tarczą lub bębniem odciążającym występuje wymuszony przepływ odśrodkowy, zaś za stopniem z-tym (ostatnim) - przepływ dośrodkowy. W związku z tym średnie zawirowanie cieczy za ostatnim stopniem jest większe niż za poprzednim, a w konsekwencji - mniejsze są siły  $F_{IIost}$  i  $F_{wost}$ . Nieuwzględnienie tego, to znaczy przyjęcie jednakowej siły  $F_w$  dla wszystkich stopni, spowoduje powstanie błędu zawyżającego nieco całkowitą wartość  $F_w$ , a więc na korzyść pewności obliczeń. W mniejszych pompach takie uproszczenie obliczeń wydaje się być uzasadnione. Dla typowych pomp można ponadto przyjąć  $\Delta F \cong 0$ .

j. Dla  $\bar{q} < 0$  wartość  $k_2$  na granicy obszaru zamkniętego wynika ze wzorów (33-35), dla obszarów otwartych i półotwartych przyjmuje się umownie  $e = 0$  i stosuje wzór (32).

k. Dla pomp o bardzo małych wyróżnikach szybkobieżności ( $n_q \leq 10-15$ ) celowe jest uściślenie wartości sprawności hydraulicznej  $\eta_h$ , silnie wpływającej na wartość  $H_p$ . W tym celu należy najpierw wyznaczyć dokładniejszą wartość sprawności objętościowej; dla typowych pomp jednostopniowych  $\eta_v = Q/(Q + q_T)$ . Następnie zaś - całkowitą sprawność pompy  $\eta = \eta_h \eta_v (\eta_m - \zeta_t)$ , gdzie współczynnik  $\zeta_t$  strat tarcia na wirujących w cieczy tarczach wirnika można oszacować z zależności empirycznych [6], lub dokładniej - obliczając moment tarcia na ściankach na podstawie wartości  $\tau_\varphi$  [5].

Obliczoną w ten sposób wartość  $\eta$  należy porównać ze sprawnością, jaką powinna mieć przeciętnie wykonana pompa o danej wydajności  $Q$  i wyróżniku  $n_q$  (por. np. [3]). W przypadku rozbieżności większej od 2-3% należy odpowiednio skorygować właśnie wartość  $\eta_h$ .

1. Końcowym wynikiem, którego drukowania należy żądać instrukcją PRINT, jest oczywiście szukana siła  $F_w$ . Celowe jest drukowanie również wartości  $\bar{q}_I$ ,  $\bar{q}_{II}$ ,  $f_I$ ,  $f_{II}$ ,  $F_I$ ,  $F_{II}$ . W celu uzyskania informacji kontrolnych, przydatnych również w ewentualnych obliczeniach szacunkowych, można żądać drukowania również wartości ważniejszych współczynników, np.  $k_{sr}$ ,  $k_{max}$ ,  $c_{pmax}$ ,  $S_{max}$ ,  $n_{sr}$ ,  $\delta_{sr}$  - oczywiście zarówno dla przestrzeni I jak i II.

### BIBLIOGRAFIA

1. W.Jędral: Metoda obliczania rozkładu ciśnień wzdłuż tarczy wirującej w osłonie. Przegląd Mechaniczny, 1992, nr 10.
2. J.E.Idelczik: Sprawocznik po gidrawliczeskim soprotiwlieniJam. Moskwa, 1975, Maszynostrojenije.
3. K.Jackowski, Z.Jankowski, W.Jędral: Układy pompowe. WPW, Warszawa 1992.
4. W.Jędral: Przepływ cieczy przez wzdłużne szczeliny pierścieniowe. Przegląd Mechaniczny, 1979, nr 11, s.9-14.
5. W.Jędral: Metody obliczania sił wzdłużnych i układów odciążających w pompach wirowych. Pr. Nauk. PW Mechanika z.110, 1988.
6. Sz.Łazarkiewicz, A.T.Troskoleński: Pompy wirowe. WNT, Warszawa 1968.

### A METHOD OF COMPUTER CALCULATION OF AXIAL THRUST AND INTERNAL LEAKAGE IN CENTRIFUGAL PUMPS

#### S u m m a r y

A simple method of calculation of radial pressure distribution on a disc rotating in a casing and then the axial thrust in centrifugal pumps is presented. The method is based on integral relations and allows to estimate rapidly the axial thrust value with accuracy sufficient for technical applications (the error less than 15%). The method allows to compute simultaneously internal leakage losses in centrifugal pumps. The presented method may also be useful for the calculation of the pressure distribution and the axial thrust in other rotating machines, such as compressors, gas turbines, water turbines, hydraulic torque convertors and paper-pulp mills.

МЕТОД ВЫЧИСЛЕНИЯ ОСЕВЫХ СИЛ И ВНУТРЕННИХ УТЕЧЕК  
В ЦЕНТРОБЕЖНЫХ НАСОСАХ

Р е з ю м е

В работе представлен прямой метод компьютерного расчета распределения давлений вокруг вращающегося в кожухе диска и гидравлической осевой силы с одновременным расчетом внутренних объемных потер (утечек) в центробежных насосах. Метод основанный на интегральных соотношениях дает возможность быстро и точно рассчитать осевую силу (ошибка не больше, чем 15%). Предложенный метод можно также использовать для вычисления распределения давлений и основных сил и в других роторных машинах, таких как компрессоры, паровые и газовые турбины, водяные турбины, гидравлические муфты и передачи, мельницы для целлюлозно-бумажных масс.