

Marek Kosiński, Marek Mościcki

Instytut Techniki Ciepłej
Politechniki Warszawskiej

ZASTOSOWANIE B-SPLINE'ÓW DO INTERPOLACJI FUNKCJI TERMODYNAMICZNYCH WODY I PARY WODNEJ W STANIE NASYCENIA

W pracy przedstawiono zastosowanie metody funkcji skleja-
nych do interpolacji funkcji termodynamicznych wody i pary
wodnej w stanie nasycenia. Omówiono teoretyczne podstawy inter-
polacji w bazie B-spline'ów, sposób określania wartości funk-
cji w węzłach interpolacji, oraz praktyczne zastosowanie meto-
dy. Zaprezentowano ocenę przydatności wykonanych podprogramów
do obliczeń na maszynie cyfrowej.

Podstawowe oznaczenia:

- c_p - ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$
 c_v - ciepło właściwe przy stałej objętości, $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$
 h - entalpia właściwa, $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
 p - ciśnienie, MPa
 s - entropia właściwa, $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}\cdot\text{K}}$
 T - temperatura, K
 t - temperatura, $^{\circ}\text{C}$
 u - energia wewnętrzna właściwa, $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
 v - objętość właściwa, $\frac{\text{m}^3}{\text{kg}}$
 ψ - energia swobodna Helmholtza, $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
 ξ - entalpia swobodna Gibbsa, $\frac{\text{kJ}}{\text{kg}}$
 ρ - gęstość, $\frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$

indeksy:

f - woda, g - para, s - stan nasycenia

1. WPROWADZENIE

Rozwój elektronicznych technik obliczeniowych skłania do stawiania coraz większych wymagań obliczeniom ciepłno-przepływowym urządzeń energetycznych i pociąga za sobą rozwój matematycznych modeli tych urządzeń. Woda w różnych stanach termodynamicznych jest najbardziej rozpowszechnionym czynnikiem roboczym i nośnikiem ciepła.

Stosowanie do obliczeń na maszynach cyfrowych spójnych, szybko liczących i zajmujących mały obszar pamięci podprogramów do określania parametrów termodynamicznych wody i pary wodnej wydaje się w tych warunkach zagadnieniem podstawowym. Szczególnej wagi nabiera powyższy problem przy cyfrowej symulacji procesów nieustalonych, opisywanych zwykle dużą liczbą równań różniczkowych.

Rozwiązanie takich układów wymaga wielokrotnego określania wartości funkcji termodynamicznych wody i pary wodnej, i to w szerokim zakresie parametrów. Metody stosowane do rozwiązywania układów równań różniczkowych opisujących zjawiska ciepłne często wymagają znajomości pochodnych funkcji, w tym także pochodnych funkcji termodynamicznych. Numeryczne liczenie pochodnych w oparciu o wzory aproksymacyjne jest czasochłonne i niejednokrotnie prowadzi do poważnych błędów.

Własności termodynamiczne wody i pary wodnej wyznaczone na drodze eksperymentalnej są funkcjami określonymi na zbiorach dyskretnych. Ich wykorzystanie w elektronicznej technice obliczeniowej rodzi szereg problemów. Wiąże się bowiem przeważnie (przy założeniu, że staramy się zachować dużą dokładność) z koniecznością wykorzystania dużego obszaru pamięci maszyny cyfrowej lub z dużym czasem obliczeń. Z pierwszym przypadkiem mamy do czynienia przy stosowaniu prostych metod interpolacyjnych (np. interpolacja liniowa na bardzo dużej liczbie węzłów), z drugim w sytuacji gdy zdecydujemy się na stosowanie wzorów

aproxymacyjnych [1-6]. Przypadek drugi rodzi dodatkowe problemy wynikające z dość powszechnego zjawiska "niekompletności" zestawów formuł aproxymacyjnych, zmuszającego do postępowania wieloetapowego (superpozycja funkcji). Prowadzi to do rozbudowania kodu obliczeniowego programów, zwiększa błąd otrzymanych wyników i wydłuża czas obliczeń.

Autorzy proponują zastosowanie do określania wartości funkcji termodynamicznych jednej z metod interpolacji funkcjami sklejanymi (spline function).

Interpolacja funkcjami sklejanymi mimo pewnych wad wydaje się być jedną z lepszych metod przybliżania funkcji określonej na zbiorze dyskretnym. Cechuje ją duża szybkość otrzymywania wyników oraz duża dokładność w całym zakresie interpolacji. Metoda pozwala na tworzenie nowych funkcji, będących kombinacją funkcji pierwotnych, oraz nie nakłada większych ograniczeń na zmienną niezależną interpolowanej funkcji. W związku z powyższym łatwe jest optymalizowanie kodu obliczeniowego programu wykorzystującego podprogramy oparte na metodzie spline'ów.

2. METODA INTERPOLACJI-SPLINE KUBICZNY

Obszerne wprowadzenie do teorii spline'ów z pakietem użytecznych programów przedstawił C. de Boor w artykule [7] i książce [8]. Niektóre z podstawowych pojęć zostaną podane poniżej.

Definicja:

Niech będzie dany podział, π , przedziału $[a, b]$:

$$\pi : a = x_1 < x_2 < \dots < x_l < x_{l+1} = b$$

Spline'm kubicznym S nazywa się funkcję, która na każdym podprzedziale $[x_i, x_{i+1}] \in [a, b]$, $i = 1, 2, \dots, l$, jest wielomianem stopnia co najwyżej 3 oraz jest ciągła i posiada ciągle pochodne do drugiego rzędu włącznie na całym przedziale $[a, b]$.

Spośród wszystkich przedstawień spline'ów, w tym i kubicznych, najmniejszej pamięci w realizacji komputerowej wymaga

przedstawienie przy użyciu znormalizowanych bazowych B-spline'ów, zwanych dalej B-spline'ami. Zainteresowanych techniką wprowadzania B-spline'ów, twierdzeniami z tym związanymi a także zastosowaniami można polecić oprócz prac wymienionych powyżej, także ciekawą książkę J.S. Zawiłowa [9].

Dla B-spline'ów zachodzi następujące twierdzenie:

Jeżeli $N_{j,k}$ oznacza j-ty B-spline rzędu k , a ciąg węzłów bazowych jest zdefiniowany następująco:

$$t_i = \begin{cases} x_1 & 1 \leq i \leq k \\ x_{i+1-k} & k+1 \leq i \leq l-1+k \\ x_{l+1} & l+1 \leq i \leq l+2k-1 \end{cases}$$

wówczas

$$S(x) = \sum_{j=1}^n \alpha_j N_{j,k}(x) \quad (1)$$

gdzie:

$n = l+k-1$ - wymiar rozważanej przestrzeni,

α - współczynnik interpolacji.

W przypadku spline'ów kubicznych, $k=4$, wymiar przestrzeni wynosi $n=(l+1)+2$. Jest on o 2 większy od ilości węzłów w podziale przedziału $[a,b]$.

Z powyższego twierdzenia wynika poniższy rekurencyjny wzór pozwalający na określenie wartości funkcji bazowych:

$$N_{i,k}(x) = \frac{x - t_i}{t_{i+k-1} - t_i} N_{i,k-1}(x) + \frac{t_{i+k} - x}{t_{i+k} - t_i} N_{i+1,k}(x), \quad (2)$$

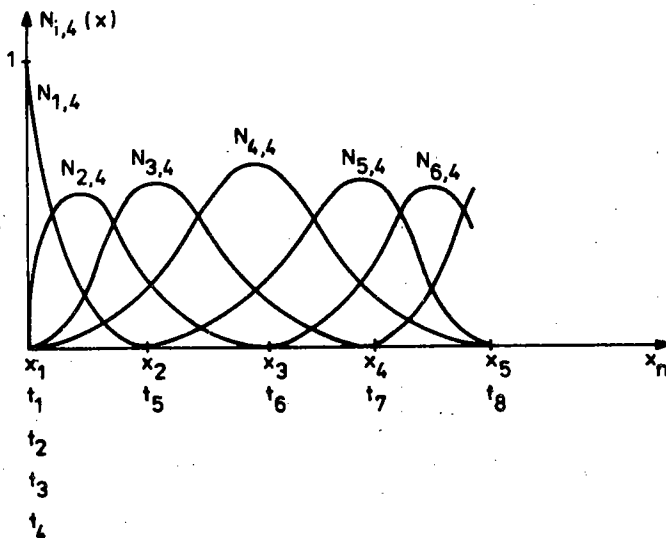
przy czym

$$N_{i,1}(x) = \begin{cases} 1 & \text{dla } x \in [t_i, t_{i+1}] \\ 0 & \text{dla } x \notin [t_i, t_{i+1}] \end{cases}$$

Ze wzoru (2) wynika, że dla każdego $x \in [t_i, t_{i+1}]$ co najwyżej k B-spline'ów jest niezerowych, a zatem (1) może być w przypadku $k=4$ zapisana następująco:

$$S(x) = \sum_{j=i-3}^i \alpha_j N_{j,4}(x), \quad i = 4, 5, \dots, l+3 \quad (3)$$

Dla ilustracji na rys.1 pokazany jest wykres funkcji bazowych.



Rys.1. Przykład funkcji bazowych w przestrzeni spline'ów kubicznych

Mając dane współczynniki $\{\alpha_j\}_{j=1}^{l+3}$ w zależności (3) można wyznaczyć wartość pochodnej spline'a kubicznego w punkcie $x \in [t_i, t_{i+1})$ jako [7]:

$$S'(x) = \sum_{j=i-2}^i \alpha_j^{(1)} N_{j,3}(x) \quad i = 4, 5, \dots, l+3$$

gdzie

$$\alpha_j^{(1)} = 3 \frac{\alpha_j - \alpha_{j-1}}{t_{j+3} - t_j}$$

lub

$$S'(x) = \sum_{j=i-3}^i \alpha_j N_{j,4}(x) \quad i = 4, 5, \dots, l+3$$

W pracy rozwiązywano zadanie interpolacji polegające na znalezieniu spline'a kubicznego S aproksymującego daną funkcję $f : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$.

Jak już wiadomo, dla danego podziału π wymiar przestrzeni wynosi $n = l+3$. Jeżeli dana jest wartość funkcji f w punktach podziału, wówczas z warunków zgodności otrzymuje się $l+1$ liniowych równań postaci (rys.1):

$$\alpha_1 N_1(x_1) = f(x_1)$$

$$\alpha_i N_i(x_i) + \alpha_{i+1} N_{i+1}(x_i) + \alpha_{i+2} N_{i+2}(x_i) = f(x_i) \quad (4)$$

$$\alpha_{l+1} N_{l+1}(x_{l+1}) = f(x_{l+1})$$

$$i = 2, 3, \dots, l$$

Dwa brakujące warunki mogą być dwojakiego rodzaju:

1) tzw. warunki brzegowe pierwszego rodzaju

$$\alpha_i N'_i(x_i) + \alpha_{i+1} N'_{i+1}(x_i) + \alpha_{i+2} N'_{i+2}(x_i) = f'(x_i) \quad (5)$$

$$i = 1, l+1$$

lub

2) warunki zgodności w punktach dodatkowych: $\tau_1 \in [a, b]$

$$i \tau_2 \in [a, b]$$

$$\begin{aligned} \alpha_i N_i(\tau_j) + \alpha_{i+1} N_{i+1}(\tau_j) + \alpha_{i+2} N_{i+2}(\tau_j) + \\ + \alpha_{i+3} N_{i+3}(\tau_j) = f(\tau_j) \end{aligned} \quad (6)$$

$$\tau_j \in (x_i, x_{i+1}), \quad j = 1, 2; \quad i = 1, 2, \dots, l.$$

Równania (4) i (5) lub (4) i (6) stanowią układ równań, z którego wyznacza się wektor współczynników interpolacji $(\alpha_i)_{i=1}^n$.

Metoda nie nakłada na podział π przedziału $[a, b]$ innych ograniczeń niż wynikające z definicji. Należy jednak dodać, że dobre uwarunkowanie macierzy zadania interpolacyjnego można uzyskać jedynie dla podziału, w którym odległości między kolejnymi węzłami nie różnią się znacznie.

3. WARTOŚCI FUNKCJI W WEZŁACH INTERPOLACJI

Przy wyborze formuł służących do wyznaczania wartości funkcji termodynamicznych autorzy kierowali się następującymi względami:

- zależności obliczeniowe muszą być dostatecznie dokładne (podstawą oceny dokładności są Międzynarodowe Tablice Ramowe Termodynamicznych Własności Wody i Pary Wodnej 1963 r. [10]),
 - zależności obliczeniowe powinny opisywać cały obszar zmiennych niezależnych (z tego punktu widzenia zależności przedstawione w [10] lub [11] są nieodpowiednie),
 - dopuszczalny obszar zmienności parametrów powinien być jak największy, by zaspokoić wymagania różnych zadań.
- Spośród dostępnych zależności wybrano przedstawione w [12].

Wartości poszczególnych parametrów wyznacza się z równania izochoryczno-izotermicznego potencjału (funkcja Helmholtza) [12]:

$$\psi(\rho, T) = \psi_0(T) + RT[\ln \rho + \rho Q(\rho, T)] \quad (7)$$

gdzie:

$$\psi_0(T) = \sum_{i=1}^6 c_i \tau^{i-1} + \left(c_7 + \frac{c_8}{\tau}\right) \ln T$$

$$Q(\rho, T) = (\tau - \tau_c) \sum_{j=1}^7 (\tau - \tau_{aj})^{j-2} \sum_{i=1}^8 A_{ij} (\rho - \rho_{aj})^{i-1} + e^{-E\rho} \sum_{i=9}^{10} A_{ij} \rho^{i-9}$$

$$E = 4,8$$

$$R = 0,46151 \frac{\text{kJ}}{\text{kg} \cdot \text{K}}$$

$$\tau = \frac{1000}{T}$$

$$\tau_c = \frac{1000}{T_{\text{crit}}}$$

$$T_{\text{crit}} = 647,286 \text{ K}$$

$$\tau_{aj} = \begin{cases} T_{\text{orit}} & \text{dla } j = 1 \\ 2,5 & \text{dla } j > 1 \end{cases}$$

$$\rho_{aj} = \begin{cases} 0,634 & \text{dla } j = 1 \\ 1,0 & \text{dla } j > 1 \end{cases}$$

Współczynniki liczbowe A_{ij} i c_i przedstawione są w [12] i [13]. Autorzy zależności (7) podają, iż jest ona słuszna dla ciśnień od 0 do 100 MPa i temperatury od 273,15 do 1773,15 K, włączając linię nasycenia od strony jednofazowej.

Stan nasycony czynnika definiuje dwa stany, (ρ_f, T) i (ρ_g, T) na izotermie podkrytycznej, dla której entalpie swobodne Gibbsa (ξ_g, ξ_f) i ciśnienia (p_g, p_f) są równe. A zatem wyznaczenie linii nasycenia to znalezienie ρ_g i ρ_f z układu równań:

$$\varphi_1(\rho_f, \rho_g, T) = p(\rho_f, T) - p(\rho_g, T) = 0 \quad (8)$$

$$\varphi_2(\rho_f, \rho_g, T) = \xi(\rho_f, T) - \xi(\rho_g, T) = 0$$

gdzie:

$$\xi = \psi + \frac{p}{\rho}$$

$$p = \rho^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)_T = \rho RT \left[1 + \rho Q + \rho^2 \left(\frac{\partial Q}{\partial \rho} \right)_T \right] \quad (9)$$

Ponieważ wyznacznik Jacobiego układu równań (8)

$$\det \begin{bmatrix} \left. \frac{\partial p}{\partial \rho_f} \right|_T & - \left. \frac{\partial p}{\partial \rho_g} \right|_T \\ \left. \frac{\partial \xi}{\partial \rho_f} \right|_T & - \left. \frac{\partial \xi}{\partial \rho_g} \right|_T \end{bmatrix} = \frac{\rho_f - \rho_g}{\rho_f \rho_g} \left. \frac{\partial p}{\partial \rho_f} \right|_T \left. \frac{\partial p}{\partial \rho_g} \right|_T$$

dąży do zera w miarę zbliżania się do punktu krytycznego, to w miejsce zależności (8) wykorzystano wzór [12]:

$$p_g = p_c \exp \left[\tau 10^{-5} (T_c - T) \sum_{i=1}^8 F_i (3,3815 - 0,01T)^{i-1} \right]$$

gdzie:

$$p_c = 22,088 \text{ MPa,}$$

F_1 - współczynniki.

W związku z tym rozwiązać należy dwa niezależne równania przedstawione poniżej:

$$p_B(T) = \rho_f^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)_T$$

$$p_B(T) = \rho_g^2 \left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)_T$$

Rozwiązanie tych równań wyznaczone zostało przy użyciu procedury ZEROIN omówionej w [14].

Pozostałe parametry określa się z następujących zależności:

$$u(\rho, T) = \psi - T \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_\rho$$

$$s(\rho, T) = - \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_\rho$$

$$h(\rho, T) = \psi - T \left(\frac{\partial \psi}{\partial T} \right)_\rho + \rho \left(\frac{\partial \psi}{\partial \rho} \right)_T$$

$$c_v(\rho, T) = \left(\frac{\partial u}{\partial T} \right)_\rho$$

$$c_p(\rho, T) = \left(\frac{\partial h}{\partial T} \right)_\rho$$

przy czym $\rho = \rho_g$ lub $\rho = \rho_f$ odpowiednio dla pary lub wody.

4. PRAKTYCZNE ZASTOSOWANIE METODY

Na podstawie zależności i metodyki opisanych wcześniej opracowano program SATGEN (na 6mc CDC-6400) generujący węzły interpolacji. Program ten pozwala na określenie wartości szeregu parametrów termodynamicznych oraz ich pochodnych względem temperatury dla wody i pary nasyconej, dla dowolnego ciągu temperatur z przedziału ograniczonego punktami: potrójnym i kry-

tycznym. Posługując się ww. programem wygenerowano zbiór wartości funkcji, dla których zamierzono rozwiązać zadanie interpolacji. Ze zbioru tego wybrano dla każdej funkcji 30 wartości, które posłużyły jako węzły do interpolacji. Wyboru dokonano metodą prób, rozwiązując zadanie interpolacji z nałożonym warunkiem nieprzekroczenia błędu 0,5% w stosunku do wartości zamieszczonych w [13].

Ostatecznie zbiór węzłów interpolacji uzyskał postać
- dla temperatury [$^{\circ}\text{C}$]

$$T^* = \left\{ \begin{array}{l} 5, 7, 12, 22, 32, 42, 52, 57, 82, 102, \\ 122, 142, 162, 182, 202, 222, 235, 248, 258, 288, \\ 308, 323, 338, 348, 353, 358, 362, 365, 368, 370 \end{array} \right\}$$

- dla ciśnienia

$$P^* = \{p_1 : p_1 = p_B(t_1) \text{ gdzie } t_1 \in T^*\}$$

Dla przedstawionych powyżej węzłów, korzystając z wcześniej zaproponowanej metody, rozwiązano zadanie interpolacji (program SPL1D na emc CDC-6400) oraz wykonano odpowiednie segmenty numeryczne szeregu parametrów termodynamicznych wody i pary nasyconej w funkcji temperatury i ciśnienia oraz pochodnych tych parametrów. Są to (nazwy podprogramów w tabl.1 i 2): ciśnienie, objętość właściwa, energia wewnętrzna właściwa, entalpia właściwa, entropia właściwa, ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu, ciepło właściwe przy stałej objętości (w funkcji temperatury) oraz temperatura (w funkcji ciśnienia).

Wszystkie podprogramy operują na tym samym wektorze węzłów oraz posiadają wewnętrzną pamięć pozwalającą na wydadne skrócenie czasu obliczeń w przypadku gdy dla tej samej wartości zmiennej niezależnej liczona jest wartość kilku różnych funkcji. Podprogramy te wchodzi w skład rozwijanego w Zakładzie Siłowni i Reaktorów Jądrowych ITC PW systemu WATPRO do określania parametrów wody i pary wodnej w różnych stanach termodynamicznych. Istnieją dwie wersje podprogramów przystosowane do pracy na maszynach Jednolitego Systemu i na maszynie CDC-6400 (główne różnice wynikają ze sposobu adresowania na powyższych typach maszyn).

T a b l i c a 1

Wykaz funkcji do określania parametrów wody i pary nasyconej oraz ich maksymalnych błędów ($\max \varepsilon^+ = \max \varepsilon_i$ dla $\varepsilon_i \geq 0$, $\max \varepsilon^- = \max |\varepsilon_i|$ dla $\varepsilon_i < 0$, x_ε - wartość zmiennej niezależnej dla której wystąpił $\max \varepsilon$)

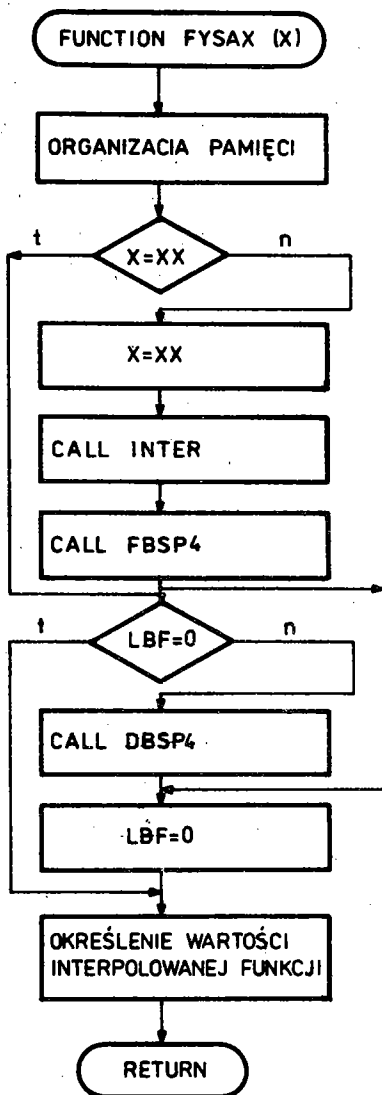
Funkcja	Nazwa fortra- nowska	$\max \varepsilon^+$	x_{ε^+}	$\max \varepsilon^-$	x_{ε^-}
		[%]	[°C lub MPa]	[%]	[°C lub MPa]
$p_g(t)$	FPSAT	0,027	59,	0,004	50,
$v_g(t)$	FVVST	0,244	93,	0,046	106,
$h_g(t)$	FHVST	0,001	321,	0,001	330,
$u_g(t)$	FUVST	0,001	321,	0,001	330,
$s'_g(t)$	FSVST	0,001	321,	<0,001	330,
$c_{pg}(t)$	FCPVT	0,224	369,	0,013	364,
$c_{vg}(t)$	FCVVT	<0,001	330,	<0,001	369,
$v_f(t)$	FVLST	0,004	369,	<0,001	321,
$h_f(t)$	FHLST	0,001	330,	<0,001	25,
$u_f(t)$	FVLST	<0,001	330,	<0,001	25,
$s_f(t)$	FSLST	<0,001	330,	<0,001	26,
$c_{pf}(t)$	FCLST	0,245	369,	0,013	364,
$c_{vf}(t)$	FCVLT	0,002	330,	0,002	17,
$t_g(p)$	FTSAP	0,036	0,12506	0,282	0,00194

Wykaz funkcji do określania pochodnych parametrów wody i pary nasyconej oraz ich maksymalnych błędów

Funkcja	Nazwa fortra- nowska	max ϵ^+	x_{ϵ^+}	max ϵ^-	x_{ϵ^-}
		[%]	[°C lub MPa]	[%]	[°C lub MPa]
$\frac{dp_g}{dt} (t)$	DPSAT	0,137	54	0,092	64
$\frac{dv_g}{dt} (t)$	DVVST	1,280	99	0,762	85
$\frac{dh_g}{dt} (t)$	DHVST	0,566	234	0,273	235
$\frac{du_g}{dt} (t)$	DUVST	0,479	235	0,259	236
$\frac{ds_g}{dt} (t)$	DSVST	0,095	365	0,119	367
$\frac{dc_{pg}}{dt} (t)$	DCPVT	1,410	368	1,010	367
$\frac{dc_{vg}}{dt} (t)$	DCVVT	0,038	326	0,044	368
$\frac{dv_t}{dt} (t)$	DVLST	0,204	325	0,221	367
$\frac{dh_f}{dt} (t)$	DHLST	0,090	365	0,117	367
$\frac{du_f}{dt} (t)$	DULST	0,088	365	0,114	367
$\frac{ds_f}{dt} (t)$	DSLST	0,092	365	0,119	367
$\frac{dc_{pf}}{dt} (t)$	DCPST	1,750	14	1,920	41
$\frac{dc_{vt}}{dt} (t)$	DCVST	3,860	310	0,494	20
$\frac{dt}{dp} (p)$	DTSAP	2,670	0,10135	1,900	0,06252

Na rys.2 przedstawiono schemat blokowy przykładowego podprogramu (wszystkie mają identyczną budowę) określającego dla danej wartości zmiennej niezależnej X wartość funkcji termodynamicznej $FYSAX$ (to jest $Y = f(X)$) metodą B-spline'ów. XX na schemacie oznacza ostatnią wartość zmiennej niezależnej, dla której była określana wartość dowolnej funkcji występującej w systemie lub jej pochodnej. Procedura $INTER$ metodą połowienia dla danego ciągu $\{x_i\}_{i=1}^n$ i $x_i \in [x_1, x_n]$ poszukuje $\max i \in [1, N] : x_i \leq x$. Procedura $FBS\bar{P}4$ określa wartości funkcji bazowych dla danej wartości zmiennej niezależnej. Zmienna LBF występująca na schemacie wskazuje, czy była liczona pochodna dowolnej z występujących w systemie funkcji dla danej wartości zmiennej niezależnej. Schemat blokowy segmentów liczących pochodne funkcji jest zbliżony do przedstawionego. Do systemu dołączona jest, oprócz wymienionych w tabl.1 i 2 oraz powyżej, procedura $DBSP4$ wołana w segmentach liczących pochodne i mająca przeznaczenie analogiczne z $FBS\bar{P}4$.

Wszystkie segmenty liczące wartości funkcji lub pochodnej zajmują po 92 słowa pamięci, w tym 82 słowa w blokach pamięci wspólnej, procedura $INTER$ - 11 słów, $FBS\bar{P}4$ - 20, $DBSP4$ - 14 słów. Łącznie cały system dotyczący linii nasycenia zajmuje 904 słowa (dużą część stanowią bloki pamięci wspólnej).



Rys.2. Schemat blokowy typowego segmentu dla stanu nasycenia wchodzącego w skład systemu WATPRO

5. OCENA WYKONANYCH PODPROGRAMÓW

Opracowany system podprogramów został poddany badaniom, których celem była ocena ich przydatności do stosowania w programach modelujących zjawiska ciepło-przepływowe. Autorów szczególnie interesowała dokładność oraz czas maszynowy potrzebny na otrzymanie wyniku.

Jako podstawę do oceny dokładności przyjęto błąd względny określony zależnością

$$\varepsilon_i = \frac{y_{oi} - y_i}{y_{oi}}$$

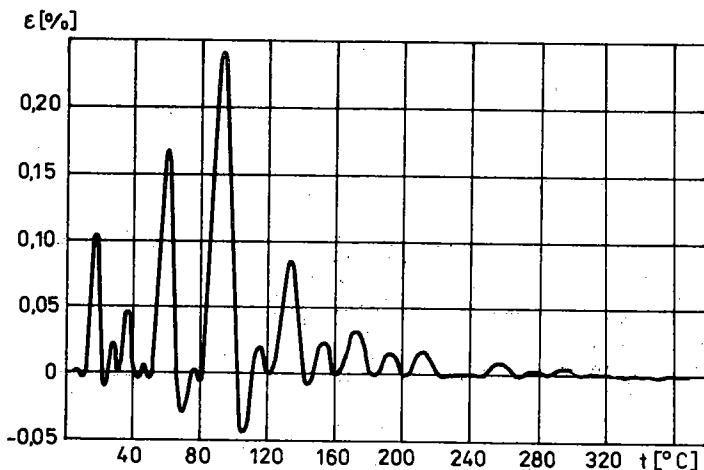
gdzie:

y_{oi} - wartość funkcji wg [13], $y_{oi} \neq 0$,

y_i - wartość funkcji otrzymanej z obliczeń metodą B-spline'ów.

Dla funkcji, których zmienną niezależną jest temperatura, badania przeprowadzono w zbiorze

$$T^* = \{t : t_{i+1} - t_i = 1 \text{ deg}, t_1 = 5 \text{ }^\circ\text{C}, i = 1, \dots, 366\}$$

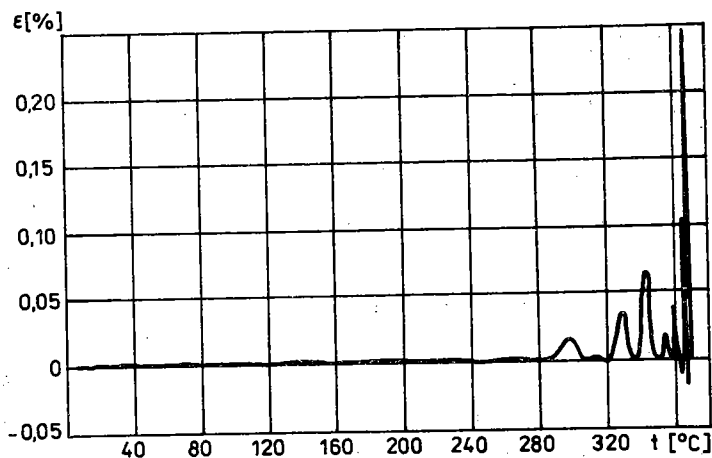


Rys.3. Błąd względny interpolacji dla funkcji $v_g = f(t)$

Dla funkcji, których zmienną niezależną jest ciśnienie, badania przeprowadzono na zbiorze

$$P^* = \{ p_i : p_i = p_S(t_i), t_i \in T^*, i = 1, \dots, 366 \}.$$

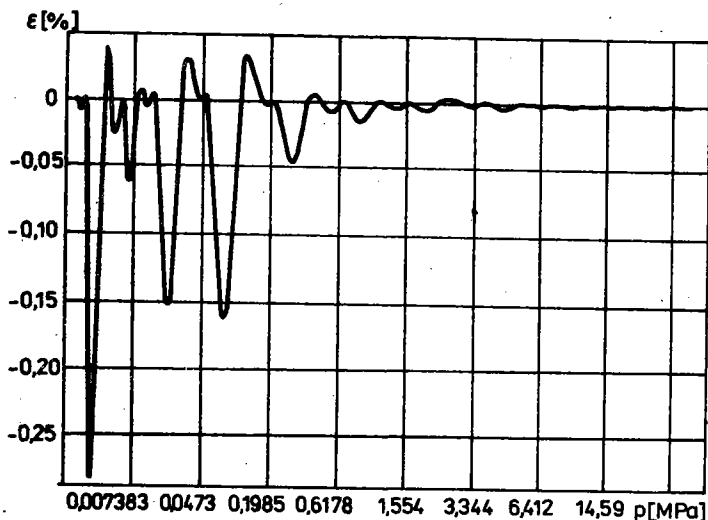
Wyniki tych badań przedstawiono w tabl.1 i 2. Wykazały one, że w przedziale temperatur od 5 do 370°C i ciśnień od 0,000872 MPa do 21,0276 MPa błąd względny nie przekracza dla funkcji 0,282%, a dla pochodnej 3,86%. Na rys.3, 4 i 5 przedstawiono wartości zaobserwowanych błędów dla trzech wybranych funkcji. Czas ob-



Rys.4. Błąd względny interpolacji dla funkcji $c_{pf} = f(t)$

liczeń jednego parametru wynosi dla maszyny CDC-6400 (system operacyjny SCOPE 3, 4.4, kompilator FTN 4.6, OPT=1) od 0,74 ms CPU do 3,77 ms CPU, a na maszynie R-32 (system oper. OS/MFT 3.2, komp. FORTIVG1) od 1,26 ms CPU do 6,46 ms CPU.

Jak wykazały badania, zastosowanie metody B-spline'ów pozwala na tworzenie wygodnych i ekonomicznych narzędzi do obliczeń parametrów termodynamicznych wody i pary wodnej. Jednocześnie potwierdziły się przypuszczenia autorów, iż metoda ta pozwala na praktyczną realizację rozsądnego kompromisu między dwoma przeciwstawnymi parametrami procesu obliczeń: czasem egzekucji i obszarem pamięci.



Rys.5. Błąd względny interpolacji dla funkcji $t_g = f(p_g)$

Wydaje się także, że istnieją potencjalne możliwości zredukowania ilości węzłów zastosowanych w interpolacji, a więc zmniejszenia obszaru pamięci. Autorom nie udało się jednak rozwiązać problemu automatycznego doboru węzłów (opracowany algorytm w praktyce numerycznej nie zdał egzaminu).

Zaprezentowane wcześniej segmenty numeryczne są jedynie przykładem możliwości zastosowania metody B-spline'ów. Równie łatwo (a właściwie w identyczny sposób) można rozwiązać zadanie interpolacji dla funkcji, których zmienną niezależną jest ciśnienie, objętość właściwa czy entropia.

Należy dodać, że w trakcie prac nad interpolacją parametrów termodynamicznych uruchomiono na maszynie CDC-6400 system programów umożliwiający automatyczną generację obrazów fortranowskich systemów interpolacyjnych. System ten [15] oblicza wartości funkcji w węzłach, rozwiązuje zadanie interpolacji, wykonuje test dokładności na węzłach pominiętych oraz generuje i zapisuje na zadanym nośniku teksty fortranowskie podprogramów dla dowolnych z wymienionych wcześniej parametrów termodynamicznych. Jedynymi ograniczeniami w stosunku do zmiennej niezależnej jest jej ścisła monotoniczność (jako funkcji temperatury) oraz zakres zmienności zawężony do obszaru położonego

między punktem potrójnym a krytycznym. Rola programisty przy współpracy z systemem ogranicza się do przygotowania zestawu dyrektyw dla systemu oraz wyboru węzłów interpolacji.

BIBLIOGRAFIA

- [1] The 1967 IFC Formulation for Industrial Use. Issued by the International Formulation Committee of the Sixth International Conference on the Properties of Steam.
- [2] The 1968 IFC Formulation for Scientific and General Use (A Formulation of the Thermodynamic Properties of Ordinary Water Substance). Issued by United Engineering Center, New York 1968.
- [3] R. Meyer-Pitroff, H. Vesper, U. Grigull: Einige Umkehrfunktionen und Näherungsgleichungen zur "1967 IFC Formulation for Industrial Use" für Wasser und Wasserdampf. BWK, Bd.21, Nr 5, Düsseldorf 1969.
- [4] R. Meyer-Pitroff, U. Grigull: Eine Umkehrfunktion zu der "1967 IFC Formulation for Industrial Use" für die Berechnung der Temperatur von überhitzten Wasserdampf, abhängig von Druck und Entalpie. BWK, Bd.21, Nr 12, Düsseldorf 1969.
- [5] L.J. Agee: An Analytical Method of Integrating the Thermal-Hydraulic Conservation Equations. Appendix B: Functional Fits of Steam Table Data. Nuclear Engineering and Design, Vol.42, 1977.
- [6] R. Matla: Optymalizacja obliczeń wielkości termodynamicznych czynnika roboczego w elektrowniach ciepłych. Pr. Nauk. PW, Elektryka nr 25, 1971.
- [7] C. de Boor: Package for Calculating with B-splines. SIAM J. Numer. Anal., Vol. 14 No 3, pp.441-472, 1977.
- [8] C. de Boor: A Practical Guide to Splines, Springer-Verlag, New York 1978.
- [9] J.S. Zawiałow i inni: Metody splajn-funkcyj. Nauka, Moskwa 1980.
- [10] C.A. Meyer i inni: Thermodynamic and Transport Properties of Steam - 1967 ASME Steam Tables. ASME, New York 1968.
- [11] M.P. Wukałowicz: Tablicy termodynamicznych swojstw wody i para. Gosenergoizdat, Moskwa 1963.
- [12] F.G. Keys i inni: A Fundamental Equation for Liquid and Vapor Water. Paper presented at the Seventh International Conference on the Properties of Steam, Tokyo, Japan, 1968.
- [13] J.H. Keenan i inni: Steam Tables - Thermodynamic Properties of Water Including Vapor, Liquid, and Solid Phases. J. Wiley and Sons, Inc., New York, London, Sydney, Toronto 1969.

- [14] R.P. Brent: Algorithms for Minimisation without Derivatives. Englewood Cliffs, New York Prentice-Hall 1972.
- [15] M. Kiełkiewicz i inni: System programów generujących "obrazy fortranowskie" segmentów do interpolacji metodą funkcji sklejaných. ITC PW, Warszawa 1983 - opracowanie nie publikowane.

ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА В-СПЛАЙНОВ В ИНТЕРПОЛЯЦИИ ТЕРМОДИНАМИЧЕСКИХ
ФУНКЦИЙ ВОДЫ И ВОДЯНОГО ПАРА В СОСТОЯНИИ НАСЫЩЕНИЯ

А н н о т а ц и я

В работе оговаривается применение метода сплайнов к интерполяции термодинамических функций воды и водяного пара в состоянии насыщения. Оговариваются теоретические основы интерполяции при помощи В-сплайнов, способ определения значений функции в интерполяционных узлах, а также практическое применение метода. Дается оценка пригодности составленных подпрограмм для вычислений на электронно-вычислительных машинах.

APPLICATION OF B-SPLINES METHOD FOR INTERPOLATION
OF THERMODYNAMIC FUNCTIONS OF SATURATED STEAM AND WATER

S u m m a r y

The application of spline function for interpolation of one variable thermodynamic functions is presented, theoretical basis of B-splines interpolation, the method of determination of the knot values and its practical application are described. The computer code based on that method has been verified. Accuracy, smoothness and quick-running make the package very useful.