

Jerzy Banaszek

Instytut Techniki Ciepłej
Politechniki Warszawskiej

PROGRAM METODY ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH DLA USTALONYCH PROBLEMÓW PRZEWODZENIA CIEPŁA W TRÓJWYMIAROWYCH ZŁOŻONYCH GEOMETRYCZNIE OBSZARACH ¹⁾

W pracy przedstawiono model, algorytm i program metody elementów skończonych dla ustalonych zagadnień przewodzenia ciepła w ośrodkach heterogenicznych i anizotropowych. Równania MES oparte na procesie rezydualnym Galerkina zapisano ogólnie w dowolnym ortogonalnym układzie współrzędnych krzywoliniowych. W budowie algorytmu programu wykorzystano specjalną oszczędną technikę zbierania macierzy rzadkich. Podano szczegółowy opis organizacji programu i zasady jego użytkowania, zaś jego praktyczną przydatność zilustrowano trzema przykładami rozwiązań zagadnień ustalonego przewodzenia ciepła w złożonych geometrycznie obszarach.

1. WSTĘP

Specyficzną cechą zagadnień teorii pola jest wrażliwość ich rozwiązań na zmiany kształtów powierzchni brzegowych rozważanych obszarów oraz warunki postawione na granicach tych obszarów. Szczególne więc zainteresowanie w poszukiwaniu przybliżonych rozwiązań tych problemów muszą budzić te metody numeryczne, które pozwalają dobrze aproksymować złożone kształty powierzchni brzegowych na siatce dyskretyzacji. Należą do nich metody bilansów elementarnych oraz elementów skończonych, któ-

1) Pracę wykonano w ramach Problemu Międzyresortowego MR.I.10 "Optymalizacja procesów termodynamicznych i przepływowych" koordynowanego przez Instytut Techniki Ciepłej i Silników Spalinowych Politechniki Poznańskiej.

re oparte są na sformułowaniach całkowych, dzięki czemu ich równania mogą być budowane w nierównych, nieortogonalnych siatkach podziału. Druga z metod jest szczególnie atrakcyjna ze względu na uniwersalność jej algorytmu, wyrażającą się jego niewrażliwością na zmiany sposobu dyskretyzacji, zmiany kształtu obszaru i warunków brzegowych. Technika izoparametrycznych elementów skończonych umożliwia ponadto dobrą aproksymację krzywoliniowych granic w rzadkich siatkach podziału.

Choć metoda elementów skończonych (MES) jest od wielu lat powszechnie uznanym efektywnym narzędziem przybliżonej analizy naprężeń w złożonych układach strukturalnych, rozwój jej zastosowań w zagadnieniach wymiany ciepła i mechaniki płynów przypada na ostatnie dziesięciolecie. Wynika to z faktu, iż klasyczne sformułowania MES bazowały na ekstremalnych zasadach wariacyjnych nie istniejących dla niesamosprężonych operatorów różniczkowych, występujących w opisie lokalnym wielu zagadnień teorii pola. W latach siedemdziesiątych jednakże powszechne stało się wykorzystywanie metod rezydualnych, a w szczególności atrakcyjnej techniki ortogonalizacyjnej Galerki-*na*, dla uzyskania ekwiwalentnych sformułowań całkowych w zagadnieniach ciepłno-przepływowych.

W ITC od kilku lat prowadzone są w ramach realizacji tematów 1.1.5 (w latach 1978 + 80) oraz 2.04 (w latach 1980 + 82) problemu MR.I.10 analizy poprawności fizycznej modeli numerycznych dla tych zagadnień. W ramach tych analiz opracowano zespół programów metody elementów skończonych dla problemów konwekcyjno-dyfuzyjnej wymiany ciepła.

Znaczne zainteresowanie tą metodą oraz fakt, iż dostępne w kraju systemy programów MES nie zawierają części dotyczącej wymiany ciepła, skłonił autora do przygotowania cyklu trzech publikacji poświęconych opisowi metody, jej algorytmu, zakresu zastosowań użytkowania opracowanego zespołu programów.

Pierwsza z nich dotyczy trójwymiarowych ustalonych problemów przewodzenia ciepła w złożonych geometrycznie obszarach, dwie następne będące w przygotowaniu poświęcone są niustalonym, nieliniowym zagadnieniom przewodzenia w dwuwymiarowych obszarach oraz konwekcyjno-dyfuzyjnej wymianie ciepła.

Ze względu na stosunkowo niewielkie pola pamięci operacyjnych dostępnych w kraju maszyn cyfrowych, algorytmy programów oparto na specjalnej technice zbierania macierzy rzadkich, co stanowi zasadniczą różnicę w ich organizacji w porównaniu z klasyczną organizacją programów MES. Ta oszczędna technika zapisu macierzy bądź całkowicie eliminuje potrzebę użycia pamięci zewnętrznej, bądź znacznie zmniejsza czasy komunikacji między nią a pamięcią centralną. Użyta w połączeniu z iteracyjnymi metodami rozwiązywania układów liniowych równań algebraicznych umożliwia dowolną numerację globalną węzłów siatki elementów skończonych, znacznie ułatwiając żmudny proces przygotowania danych. Jest to szczególnie istotne w trójwymiarowych złożonych geometriach, dla których programy optymalizujące numerację węzłów pod kątem najmniejszego pasma macierzy nie są dostępne, a specjalne procedury rozwiązywania układów równań z macierzą pasmową nie mogą być efektywnie wykorzystane.

Ze względu na odmienny sposób zbierania macierzy rzadkich i algorytm rozwiązywania układów równań algebraicznych opracowane programy nie mogą być bezpośrednio zaadoptowane do dostępnych w kraju systemów programów MES.

W pracy przedstawiono najogólniejszy zapis równań MES w dowolnym ortogonalnym układzie krzywoliniowych współrzędnych globalnych dla tych trójwymiarowych zagadnień teorii pola, które opisywane są lokalnie liniowym równaniem eliptycznym uzupełnionym liniowymi warunkami brzegowymi pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju. Dotyczy to zwłaszcza ustalonych niejednorodnych problemów przewodzenia ciepła, filtracji wody, analizy pól elektrostatycznych oraz przewodzenia elektrycznego. Analogie w opisie różniczkowym tych zagadnień oznaczają w praktyce możliwość bezpośredniego wykorzystania do numerycznej analizy każdego z nich programu MES opracowanego dla problemów przewodzenia ciepła.

W części trzeciej pracy opisano sposób tworzenia macierzy elementowych w lokalnych krzywoliniowych układach współrzędnych dla trzech rodzajów elementów super- i izoparametrycznych, zaś w następnej przedstawiono organizację omawianego programu i szczegółowy opis sposobu jego użytkowania. Wydruk maszynowy programu zamieszczono w p.6 pracy.

Dla ilustracji praktycznej przydatności opracowanego programu przedstawiono wyniki numerycznej analizy pola temperatury dla trzech zagadnień trójwymiarowego przewodzenia ciepła w tak złożonych geometrycznie obszarach, iż metoda elementów skończonych była jedynym ekonomicznym narzędziem tej analizy, pozwalającym na dobre przybliżenie krzywoliniowych powierzchni brzegowych w rzadkich siatkach podziału.

2. RÓWNANIA MES DLA ZAGADNIENI PRZEWODZENIA CIEPŁA W ANIZOTROPOWYM OŚRODKU HETEROGENICZNYM

Niech w rozważanym obszarze V ośrodka heterogenicznego i anizotropowego dany będzie globalny (wspólny dla całego obszaru lub znacznej jego części) układ krzywoliniowych współrzędnych ortogonalnych ξ_i zdefiniowany wzajemnie jednoznacznie transformacją

$$\left. \begin{array}{l} x_i = x_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \\ \det [\partial x_i / \partial \xi_j] \neq 0 \end{array} \right\}, \quad (1)$$

gdzie x_i - współrzędne układu kartezjańskiego.

Przyjmując dalej problem ustalonego przewodzenia ciepła jako modelowy dla wszystkich analogicznych w sensie opisu różniczkowego problemów teorii pola, lokalny bilans energii wewnętrznej w dowolnym punkcie obszaru V opisano w układzie ξ_i równaniem eliptycznym

$$\frac{1}{H_1 H_2 H_3} \frac{\partial}{\partial \xi_i} \left(H_k H_l \lambda_{ij}^* \frac{1}{H_j} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j} \right) + Q = 0 \quad \text{w } V, \quad (2)$$

dla $i, j = 1, 2, 3,$

$k, l \neq i = 1, 2, 3,$

uzupełnionym warunkami brzegowymi pierwszego, drugiego i trzeciego rodzaju

$$\varphi(\xi_{1b}, \xi_{2b}, \xi_{3b}) = \varphi_b(\xi_{1b}, \xi_{2b}, \xi_{3b}) \quad \text{na } S_1, \quad (3)$$

$$\lambda_{ij}^* \frac{1}{H_j} \frac{\partial \varphi}{\partial \xi_j} n_i + q + \alpha(\varphi - \varphi_{OSR}) = 0 \quad \text{na } S_2, \quad (4)$$

gdzie: φ , Q , q , α , n_i oznaczają odpowiednio temperaturę, gęstość mocy źródeł ciepła w objętości obszaru, gęstość powierzchniową strumienia ciepła, współczynnik przejmowania ciepła od ośrodka o temperaturze φ_{OSR} oraz składowe unormowanej normalnej zewnętrznej. Składowe fizyczne tensora przewodności cieplnej w ξ_i określa związek

$$\lambda_{ij}^* = \frac{1}{H_i} \frac{1}{H_j} \frac{\partial x_m}{\partial \xi_i} \frac{\partial x_n}{\partial \xi_j} \lambda_{mn}, \quad (5)$$

gdzie λ_{mn} są składowymi tensora w układzie kartezjańskim, a współczynniki Lamé mają postać

$$H_j = \left(\sum_{k=1}^3 \left(\frac{\partial x_k}{\partial \xi_j} \right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (6)$$

Dla skrócenia zapisów we wzorach (2), (4) i (5) a także i dalszych użyto konwencji sumacyjnej, w której powtarzające się indeksy oznaczają sumowanie. Gęstość mocy źródeł ciepła Q , tensor przewodności cieplnej λ , gęstość powierzchniowa strumienia ciepła q oraz wielkości α i φ_{OSR} są w ogólnym przypadku ośrodka heterogenicznego funkcjami współrzędnych położenia ξ_i .

Zakładając interpolację poszukiwanego pola temperatury w postaci

$$\varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) = N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\varphi_i, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N \quad (7)$$

i żądając ortogonalności rezyduów równania różniczkowego (2) do wszystkich funkcji $N_k(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$ otrzymuje się, po wykorzystaniu twierdzenia Greena, najbardziej ogólny zapis równań metody Galerkinia dla problemu (2) - (4) w dowolnym globalnym krzywoliniowym układzie współrzędnych ortogonalnych ξ_i w postaci

$$\left(\int_V \frac{1}{H_i} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_i} \lambda_{ij}^* \frac{1}{H_j} \frac{\partial N_m}{\partial \xi_j} H_1 H_2 H_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \right) \varphi_m - \int_V N_k Q H_1 H_2 H_3 d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 + \int_S N_k (q + \alpha(N_m \varphi_m - \varphi_{OSR})) ds = 0, \quad (8)$$

dla $k, m = 1, 2, \dots, N$,

$i, j = 1, 2, 3$,

gdzie N - jest liczbą węzłów siatki, przez które interpoluje się pole temperatury zgodnie z zależnością (7). Forma ogólnego zapisu (8) jest szczególnie przydatna, gdy w rozważanym obszarze V wybiera się dla różnych jego części różne globalne układy ortogonalne.

Identyfikując w obszarze V skończoną liczbę punktów N zwanych węzłami i łącząc je w wybrany sposób, otrzymuje się podział przestrzeni na NE dowolnych podobszarów V_e zwanych elementami skończonymi. Choć zmiany temperatury w całym obszarze V nie są na ogół prostą funkcją położenia, to uzasadnione wydaje się założenie, iż wewnątrz każdego dostatecznie małego podobszaru zmiany te mogą być aproksymowane prostym wielomianowym wyrażeniem. W każdym elemencie skończonym V_e zakłada się więc lokalną interpolację pola temperatury

$$\left. \begin{aligned} \varphi_e(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)\varphi_i, \text{ dla } i=1,2,\dots,N_e \\ \text{zaś } \varphi(\xi_1, \xi_2, \xi_3) &= \sum_{elem} \varphi_e(\xi_1, \xi_2, \xi_3) \end{aligned} \right\} \quad (9)$$

gdzie φ_i są jej wartościami w węzłach siatki.

Wielomiany interpolacyjne $N_i(\xi_1, \xi_2, \xi_3)$, będące zarazem funkcjami wagowymi w zastosowanej metodzie Galerkina, są klasy C^0 w obszarze V oraz C^1 w podobszarze V_e każdego elementu skończonego. Zakładając, iż zdefiniowane są one w lokalnej bazie [1] w taki sposób, iż poprawne jest sumowanie udziałów poszczególnych elementów w całkach globalnych

$$\int_V F(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dV = \sum_{elem} \int_{V_e} F_e(\xi_1, \xi_2, \xi_3) dV_e, \quad (10)$$

układ liniowych równań algebraicznych (8) staje się końcowym układem równań metody elementów skończonych dla problemu różniczkowego (2) - (4) opartym na ortogonalizacyjnej technice Galerkina. Zapisać go można w postaci macierzowej

$$[K] \{\varphi\} = \{R\}, \quad (11)$$

gdzie

$$\begin{aligned}
 K_{km} &= \sum_{elem.} K_{1,km}^{(e)} + \sum_{el. brzeg.} K_{2,km}^{(e)} = \\
 &= \sum_{elem} \int_{V_e} \frac{1}{H_i} \frac{\partial N_k}{\partial \xi_i} \lambda_{ij}^{*(e)} \frac{1}{H_i} \frac{\partial N_m}{\partial \xi_j} dV_e + \\
 &+ \sum_{el. brzeg.} \int_{V_e} N_k \alpha N_m dS_e \quad (12)
 \end{aligned}$$

- jest symetryczną macierzą przewodności cieplnej uzupełnioną udziałami elementów brzegowych z warunkiem trzeciego rodzaju, zaś

$$R_k = \sum_{elem} \int_{V_e} N_k Q_e dV_e + \sum_{el. brzeg.} \int_{S_e} N_k (q_e + \alpha \varphi_{OSR}) dS_e \quad (13)$$

jest wektorem (macierzą kolumnową) węzłowych wartości prawych stron równania (11) wynikających z warunków brzegowych drugiego i trzeciego rodzaju oraz źródeł ciepła w objętości obszaru.

Wielkość dV_e dana jest jako

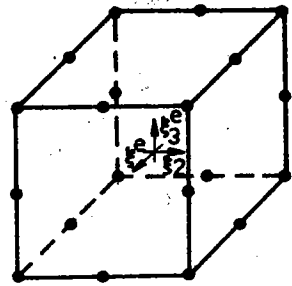
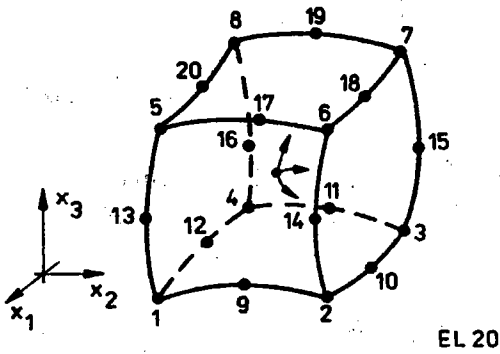
$$dV_e = H_1^{(e)} H_2^{(e)} H_3^{(e)} d\xi_1 d\xi_2 d\xi_3 \quad (14)$$

3. MACIERZE ELEMENTOWE

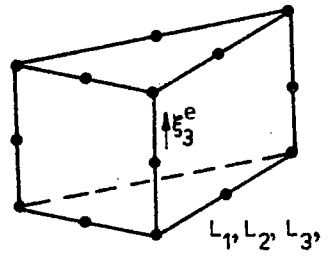
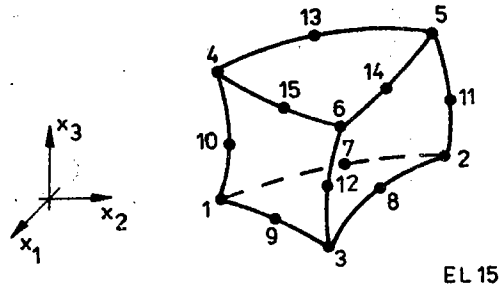
W celu wyznaczenia całek występujących we wzorach (12) oraz (13) w objętościach elementów V_e wygodnie jest zdefiniować funkcje interpolacyjne N_i w lokalnym układzie współrzędnych krzywoliniowych ξ_i^e związanych z każdym elementem [1]. Interpolacja temperatury w elemencie "e" przyjmuje wówczas postać

$$\varphi_e(\xi_1^e, \xi_2^e, \xi_3^e) = N_i(\xi_1^e, \xi_2^e, \xi_3^e) \varphi_i, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N_e, \quad (15)$$

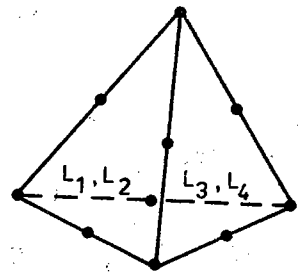
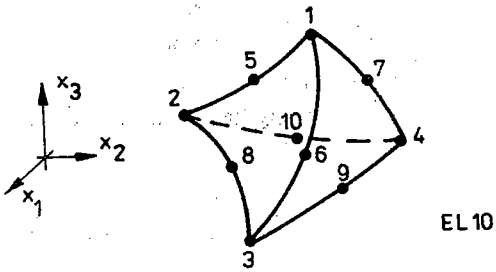
gdzie N_e - liczba węzłów aproksymujących funkcję φ w podobszarze V_e , zaś współrzędne ξ_i^e lokalnego krzywoliniowego układu określone są wzajemnie jednoznacznie transformacją



EL 20



EL 15



EL 10

Rys.1. Elementy skończone w układach globalnym i lokalnym

$$\left. \begin{aligned} \xi_{1,e}(\xi_1^e, \xi_2^e, \xi_3^e) &= M_m(\xi_1^e, \xi_2^e, \xi_3^e) \xi_{1,m} \\ \det \left\{ \partial \xi_i / \partial \xi_j^e \right\} &\neq 0 \end{aligned} \right\} \quad (16)$$

dla $i = 1, 2, 3$,

$$m = 1, 2, \dots, M_e,$$

gdzie M_e jest liczbą węzłów interpolujących geometrię podobszaru "e". Dla dobrego przybliżenia złożonych kształtów trójwymiarowych obszarów oraz krzywizn ich brzegów zastosowano w omawianym programie trzy rodzaje elementów izoparametrycznych ($M_e = N_e$) oraz superparametrycznych ($M_e > N_e$). Ich kształty w układach kartezjańskim globalnym i lokalnym wraz z przyjętą numeracją lokalną węzłów pokazano na rys.1.

Dla elementu EI20 funkcje N_i oraz M_i podane są w układzie ξ_i^e

$$\left. \begin{aligned} N_i(\xi_1^e, \xi_2^e, \xi_3^e) &= P_i(\xi_1^e, \xi_2^e, \xi_3^e) (1 + (1-\epsilon)Q_i(\xi_1^e, \xi_2^e, \xi_3^e)) \\ M_i(\xi_1^e, \xi_2^e, \xi_3^e) &= P_i(\xi_1^e, \xi_2^e, \xi_3^e) (1 + (1-\eta)Q_i(\xi_1^e, \xi_2^e, \xi_3^e)) \end{aligned} \right\} \text{ dla } i=1, 2, \dots, 8$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} N_i(\xi_1^e, \xi_2^e, \xi_3^e) &= (1-\epsilon)(1-\frac{\epsilon^2}{5_k})(1 + \xi_1^e \xi_{1,i}^e)(1 + \xi_m^e \xi_{m,i}^e) / 4 \\ M_i(\xi_1^e, \xi_2^e, \xi_3^e) &= (1-\eta)(1-\frac{\eta^2}{5_k})(1 + \xi_1^e \xi_{1,i}^e)(1 + \xi_m^e \xi_{m,i}^e) / 4 \end{aligned} \right\}$$

dla $1, m \neq k = 1, 2, 3$;

$$k = \begin{cases} 1 & \text{dla } i = 9, \dots, 12 \\ 2 & \text{dla } i = 13, \dots, 16 \\ 3 & \text{dla } i = 17, \dots, 20 \end{cases}$$

gdzie

$$\left. \begin{aligned} P_i &= (1 + \xi_1^e \xi_{1,i}^e)(1 + \xi_2^e \xi_{2,i}^e)(1 + \xi_3^e \xi_{3,i}^e) / 8 \\ Q_i &= \xi_1^e \xi_{1,i}^e + \xi_2^e \xi_{2,i}^e + \xi_3^e \xi_{3,i}^e - 3 \end{aligned} \right\}$$

$$\left\{ \begin{aligned} \epsilon = 0, \eta = 0, M_e = N_e = 20, & \text{ dla dwudziestowęzłowego elementu} \\ & \text{ izoparametrycznego,} \\ \epsilon = 1, \eta = 1, M_e = N_e = 8, & \text{ dla ośmiowęzłowego elementu izo-} \\ & \text{ parametrycznego,} \\ \epsilon = 1, \eta = 0, M_e = 20, N_e = 8, & \text{ dla elementu superparametrycznego,} \end{aligned} \right.$$

a $\xi_{i,m}^e$ jest m -tą lokalną współrzędną węzła o lokalnym numerze "i" (rys.1).

Do opisu zmienności temperatury i krzywoliniowych krawędzi w elemencie EL15 wykorzystano współrzędne prostokątne i powierzchniowe [1]. Zmienne niezależne mają postać: $\xi_1^e = L_1$, $\xi_2^e = L_2$, ξ_3^e , zaś $L_3 = 1 - L_1 - L_2$, gdzie L_i współrzędne powierzchniowe, a funkcje interpolacyjne M_j i N_j zdefiniowano następująco:

$$\left. \begin{aligned} N_j(L_1, L_2, L_3, \xi_3^e) &= L_i(1 + \xi_3^e \xi_{3,j}^e) \\ (\varepsilon + (1-\varepsilon)(2L_i-1))/2 - L_i(1-\varepsilon)(1-\xi_3^e)^2/2 \\ M_j(L_1, L_2, L_3, \xi_3^e) &= L_i(1 + \xi_3^e \xi_{3,j}^e) \\ (\eta + (1-\eta)(2L_i-1))/2 - L_i(1-\eta)(1-\xi_3^e)^2/2 \end{aligned} \right\}$$

dla $j, i = 1, 2, 3$ oraz $j = 3+i, i = 1, 2, 3$

$$\left. \begin{aligned} N_j(L_1, L_2, L_3, \xi_3^e) &= L_i(1 - \xi_3^e)(1 - \varepsilon) \\ M_j(L_1, L_2, L_3, \xi_3^e) &= L_i(1 - \xi_3^e)(1 - \eta) \end{aligned} \right\}, \text{ dla } j=7,8,9, i=1,2,3$$

$$\left. \begin{aligned} N_j(L_1, L_2, L_3, \xi_3^e) &= 2L_i L_k(1 + \xi_3^e \xi_{3,j}^e)(1 - \varepsilon) \\ M_j(L_1, L_2, L_3, \xi_3^e) &= 2L_i L_k(1 + \xi_3^e \xi_{3,j}^e)(1 - \eta) \end{aligned} \right\}, \begin{array}{l} \text{dla } j=10, \dots, 15 \\ i, k = 1, 2, 3 \\ i \neq k \end{array}$$

gdzie $\xi_{3,j}^e$ jest lokalną współrzędną węzła o numerze j , zaś:

$\varepsilon = 0, \eta = 0, M_e = N_e = 15$, dla piętnastowęzłowego elementu izoparametrycznego,

$\varepsilon = 1, \eta = 1, M_e = N_e = 6$, dla sześciowęzłowego elementu izoparametrycznego,

$\varepsilon = 1, \eta = 0, M_e = 15, N_e = 6$, dla elementu superparametrycznego.

Dla elementu EL10 (rys.1) funkcje interpolacyjne określone są w lokalnym układzie współrzędnych objętościowych [1] $\xi_1^e = L_1$, $\xi_2^e = L_2$, $\xi_3^e = L_3$, $L_4 = 1 - L_1 - L_2 - L_3$ poprzez związki

$$\left. \begin{aligned} N_i(L_1, L_2, L_3, L_4) &= L_i(\varepsilon(1-\varepsilon)(2L_i-1)) \\ M_i(L_1, L_2, L_3, L_4) &= L_i(\eta(1-\eta)(2L_i-1)) \end{aligned} \right\}, \text{ dla } i = 1, 2, 3, 4$$

$$\left. \begin{aligned} N_i(L_1, L_2, L_3, L_4) &= 4L_k L_m (1-\varepsilon) \\ M_i(L_1, L_2, L_3, L_4) &= 4L_k L_m (1-\eta) \end{aligned} \right\}, \quad \text{dla } k = \begin{cases} 1, & m = 2, 3, 4 \\ 2, & m = 3, 4 \\ 3, & m = 9 \\ i = 5, 6, 7 \\ i = 8, 10 \\ i = 9 \end{cases}$$

gdzie:

$$\begin{aligned} \varepsilon = 0, \eta = 0, M_e = N_e = 10, & \quad \text{dla dziesięciowęzłowego ele-} \\ & \quad \text{mentu izoparametrycznego,} \\ \varepsilon = 1, \eta = 1, M_e = N_e = 4, & \quad \text{dla czterowęzłowego elemen-} \\ & \quad \text{tu izoparametrycznego,} \\ \varepsilon = 1, \eta = 0, M_e = 10, N_e = 4, & \quad \text{dla elementu superparame-} \\ & \quad \text{trycznego} \end{aligned}$$

Transformacje (16) współrzędnych w każdym podobszarze "e" odwzorowują złożone kształty elementu w układzie globalnym ξ_i na proste obszary geometryczne (rys.1) w układach lokalnych ξ_i^e , zaś dla zadanej lokalnej interpolacji (15) i (16) wyrazy macierzy przewodności elementu "e" wyznacza się poprzez całkowanie

$$K_{1,km}^{(e)} = \int_{V_e} \frac{1}{H_i} \frac{1}{H_j} \lambda_{ij}^* \frac{\partial N_k}{\partial \xi_i} \frac{\partial N_m}{\partial \xi_j} H_1 H_2 H_3 \cdot |\det[J]| d\xi_1^e, d\xi_2^e, d\xi_3^e \quad (17)$$

w prostych granicach zmienności ξ_i^e .

Pochodne funkcji N_k w układzie globalnym ξ_i określone są

$$\left\{ \frac{\partial N_k}{\partial \xi_i} \right\} = [J]^{-1} \left\{ \frac{\partial N_k}{\partial \xi_i^e} \right\}, \quad \begin{aligned} & \text{dla } i = 1, 2, 3, \\ & k = 1, 2, \dots, N_e, \end{aligned}$$

a macierz Jacobiego ma postać

$$[J] = \begin{bmatrix} \frac{\partial M_j}{\partial \xi_1^e} \xi_{1,j}, & \frac{\partial M_j}{\partial \xi_2^e} \xi_{1,j}, & \frac{\partial M_j}{\partial \xi_3^e} \xi_{1,j} \\ \frac{\partial M_j}{\partial \xi_1^e} \xi_{2,j}, & \frac{\partial M_j}{\partial \xi_2^e} \xi_{2,j}, & \frac{\partial M_j}{\partial \xi_3^e} \xi_{2,j} \\ \frac{\partial M_j}{\partial \xi_1^e} \xi_{3,j}, & \frac{\partial M_j}{\partial \xi_2^e} \xi_{3,j}, & \frac{\partial M_j}{\partial \xi_3^e} \xi_{3,j} \end{bmatrix}$$

gdzie $\xi_{i,j}$ oznacza i -tą współrzędną globalną j -tego węzła.

Ze względu na złożoną postać funkcji podcałkowych we wzorze (17), wynikająca z nieregularnych kształtów elementu dla obliczenia całek objętościowych, zastosowano kwadratury numeryczne [1]: 2 x 2 x 2 punktową Gaussa dla elementu EL20, dwupunktową Gaussa i siedmiopunktową Hammera dla elementu EL15, czteropunktową Hammera dla elementu EL10.

Występujące we wzorach (12) oraz (13) sumy całek powierzchniowych dotyczą tylko tych elementów, w których przynajmniej jedna z jego powierzchni bocznych aproksymuje rzeczywisty brzeg obszaru z warunkiem granicznym drugiego bądź trzeciego rodzaju. Na te części powierzchni nakłada się elementy o zerowej objętości będące w układzie globalnym ξ_1 trójwymiarowymi płatkami powierzchniowymi (rys.2), zaś w lokalnym krzywoliniowym układzie współrzędnych (ξ_p^e, ξ_s^e , dla $p, s = 1, 2$ lub 3) wiązanym z każdym elementem brzegowym dwuwymiarowymi figurami geometrycznymi pokazanymi na rys.2. Równania parametryczne powierzchni płata w układzie ξ_p^e, ξ_s^e zakłada się w postaci

$$\xi_i(\xi_p^e, \xi_s^e) = M_m(\xi_p^e, \xi_s^e) \xi_{i,m}, \quad \text{dla } \begin{cases} i = 1, 2, 3 \\ m = 1, 2, \dots, M_e \end{cases} \quad (18)$$

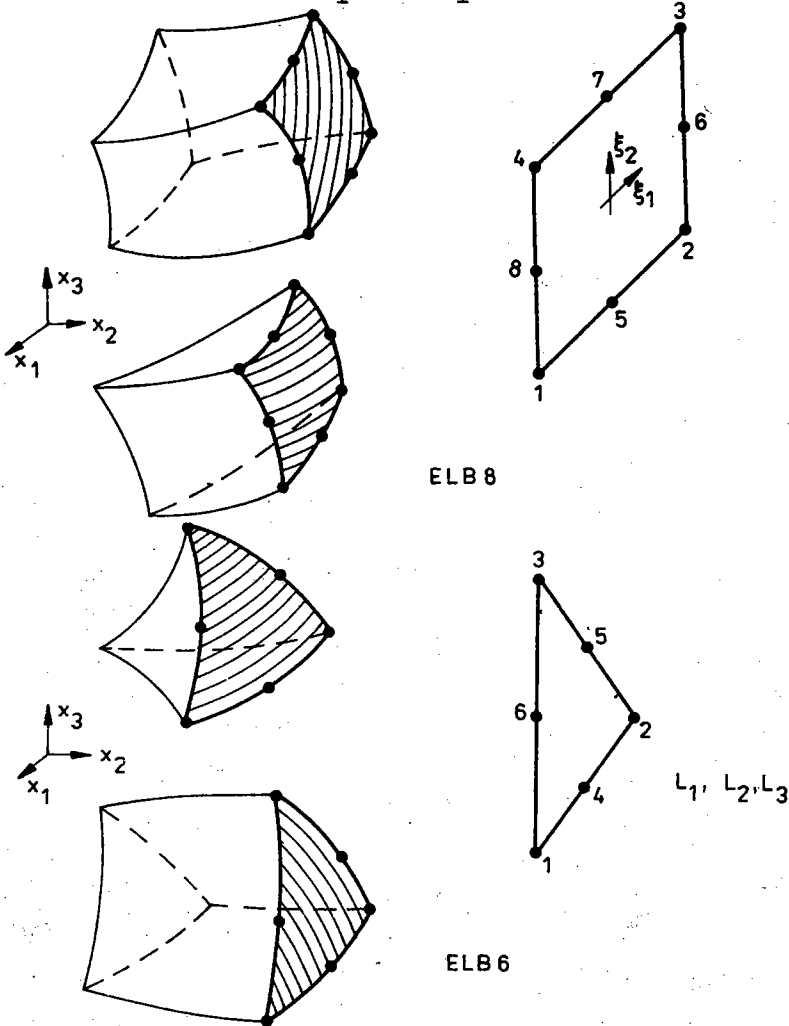
zaś element jego pola powierzchni określony jest zależnością

$$ds = \left\{ \left(\frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_p^e} \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_s^e} - \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_s^e} \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_p^e} \right)^2 + \left(\frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_p^e} \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_s^e} - \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_p^e} \frac{\partial \xi_3}{\partial \xi_s^e} \right)^2 + \right. \\ \left. - \left(\frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_p^e} \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_s^e} - \frac{\partial \xi_1}{\partial \xi_s^e} \frac{\partial \xi_2}{\partial \xi_p^e} \right)^2 \right\}^{\frac{1}{2}} d\xi_p^e d\xi_s^e.$$

Poszukiwane pole temperatury jest interpolowane na powierzchni brzegowej elementu

$$\varphi_e(\xi_p^e, \xi_s^e) = N_i(\xi_p^e, \xi_s^e)\varphi_i, \text{ dla } i = 1, 2, \dots, N_e,$$

gdzie N_e - liczba węzłów interpolacyjnych w elemencie brzegowym, a wyrazy macierzy przejmowania $K_{2,km}^{(e)}$ oraz wektora prawych stron $R_k^{(e)}$ (wzory (12) i (13)) oblicza się w oparciu o zależność (18) i (19) po uprzednim zdefiniowaniu postaci wielomianów interpolacyjnych N_i oraz M_i .



Rys.2. Elementy brzegowe w układach globalnym i lokalnych

Na rys.2 pokazano dwa rodzaje elementów parametrycznych zastosowanych do podziału powierzchni granicznych z warunkami brzegowymi Cauchy'ego i Neumanna.

Dla elementu ELB8 funkcje interpolacyjne mają w układzie lokalnym ξ_i postaci

$$\left. \begin{aligned} N_i(\xi_p^e, \xi_s^e) &= P_i(\xi_p^e, \xi_s^e)(1 + (1-\varepsilon)Q_i(\xi_p^e, \xi_s^e)) \\ M_i(\xi_p^e, \xi_s^e) &= P_i(\xi_p^e, \xi_s^e)(1 + (1-\eta)Q_i(\xi_p^e, \xi_s^e)) \end{aligned} \right\} \text{dla } i=1, \dots, 4,$$

$$\left. \begin{aligned} N_i(\xi_p^e, \xi_s^e) &= (1 - \xi_k^e)(1 + \xi_1^e \xi_{1,i}^e)(1-\varepsilon)/2 \\ M_i(\xi_p^e, \xi_s^e) &= (1 - \xi_k^e)(1 + \xi_1^e \xi_{1,i}^e)(1-\eta)/2 \end{aligned} \right\} \text{dla } i=5, \dots, 8$$

$1 \neq k=p, s$
 $p, s=1, 2 \text{ lub } 3$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} P_i(\xi_p^e, \xi_s^e) &= (1 + \xi_p^e \xi_{p,i}^e)(1 + \xi_s^e \xi_{s,i}^e)/4 \\ Q_i(\xi_p^e, \xi_s^e) &= \xi_p^e \xi_{p,i}^e + \xi_s^e \xi_{s,i}^e - 2 \end{aligned} \right\},$$

- $\varepsilon = 0, \eta = 0, N_e = M_e = 8$, dla ośmiowęzłowego elementu izoparametrycznego,
 $\varepsilon = 1, \eta = 1, N_e = M_e = 4$, dla czterowęzłowego elementu izoparametrycznego,
 $\varepsilon = 1, \eta = 0, N_e = 4, M_e = 8$, dla elementu superparametrycznego.

W elemencie ELB6 funkcje interpolacyjne zdefiniowane są we współrzędnych powierzchniowych L_1, L_2, L_3 poprzez zależności

$$\left. \begin{aligned} N_i(L_1, L_2, L_3) &= L_i(\varepsilon + (1-\varepsilon)(2L_i-1)) \\ M_i(L_1, L_2, L_3) &= L_i(\eta + (1-\eta)(2L_i-1)) \end{aligned} \right\} \text{dla } i=1, 2, 3$$

$$\left. \begin{aligned} N_i &= 4 L_k L_m (1-\varepsilon) \\ M_i &= 4 L_k L_m (1-\eta) \end{aligned} \right\}, \text{ dla } i = \begin{cases} 4, 6, & k = 1, m = 2, 3 \\ 5, & k = 2, m = 3 \end{cases}$$

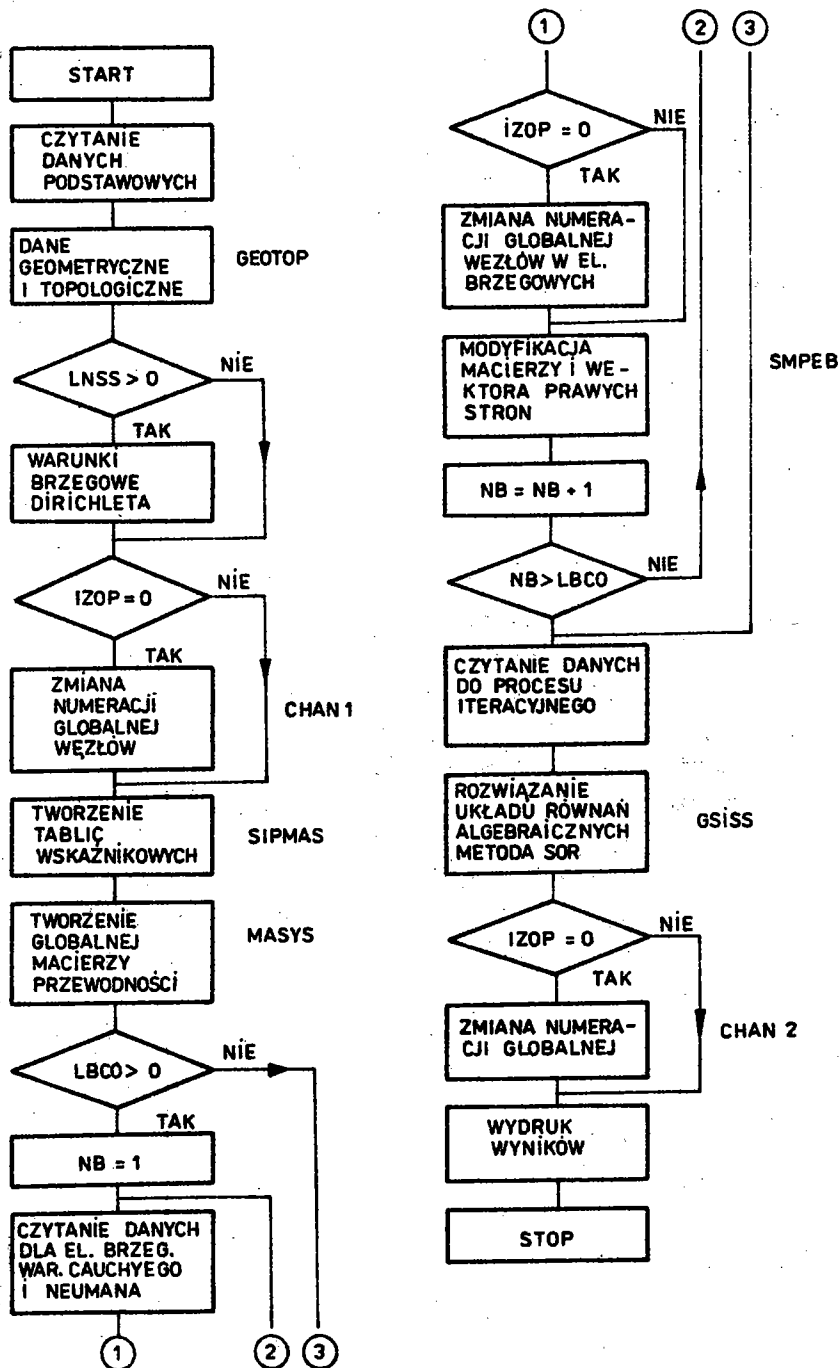
- $\varepsilon = 0, \eta = 0, N_e = M_e = 6,$ dla sześciowęzłowego elementu izoparametrycznego,
 $\varepsilon = 1, \eta = 1, N_e = M_e = 3,$ dla trójwęzłowego elementu izoparametrycznego,
 $\varepsilon = 1, \eta = 0, N_e = 3, M_e = 6,$ dla elementu superparametrycznego.

Do obliczenia całek występujących we wzorach (12) i (13) na elementach płatów powierzchniowych S_e użyto 2×2 punktowej kwadratury Gaussa dla podobszaru ELB8 oraz siedmiopunktowej kwadratury Hammera w obszarze trójkąta ELB6.

4. ORGANIZACJA PROGRAMU

Opracowany program metody elementów skończonych przystosowany jest do rozwiązywania trójwymiarowych ustalonych problemów pól skalarnych opisywanych lokalnie równaniami (2) - (4). Napisany w języku FORTRAN IV nie ma w prezentowanej wersji struktury programów nakładanych lub segmentowych i nie wykorzystuje do zapisu danych zewnętrznej pamięci maszyny cyfrowej. Zastosowanie jednak w budowie jego algorytmu specjalnej techniki zbierania symetrycznych macierzy rzadkich umożliwia rozwiązywanie wielu praktycznych problemów pól skalarnych w pamięci centralnej maszyny cyfrowej. W zagadnieniach o dużej (na ogół większej od tysiąca) liczbie niewiadomych, gdy konieczne staje się użycie zewnętrznych pamięci dyskowych bądź taśmowych, technika ta pozwala na znaczne zmniejszenie czasu komunikacji między tymi jednostkami pamięci masowej a centralną pamięcią operacyjną. Wersja programu mająca strukturę programów nakładanych i wykorzystująca do zapisu danych, przygotowanych w bardziej zwartej formie, zewnętrzną pamięć taśmową jest obecnie tworzona przy współpracy z Instytutem Energii Atomowej w Świerku.

Schemat blokowy prezentowanej wersji programu głównego przedstawiono na rys.3, zaś wydruk komputerowy programu w punkcie 6 pracy. Proces rozwiązania jest podzielony na cztery części:



Rys.3. Schemat blokowy programu głównego

- wprowadzenie danych dla siatki elementów, danych materiałowych i warunków brzegowych pierwszego rodzaju;
- tworzenie macierzy wskaźnikowych i globalnej macierzy przewodności cieplnej;
- wprowadzenie danych dla warunków brzegowych drugiego i trzeciego rodzaju i modyfikacje macierzy i prawych stron równań wynikające z tych warunków;
- iteracyjne rozwiązanie układu liniowych równań algebraicznych i wydruk wyników.

4.1. DANE PODSTAWOWE, SIATKA ELEMENTÓW SKOŃCZONYCH I WARUNKI BRZEGOWE DIRICHLETA

Dane podstawowe wczytywane w programie głównym zawierają informacje o:

- liczbie elementów, na które podzielono obszar - LE,
- liczbie węzłów wyróżnionych w obszarze - LW,
- liczbie stopni swobody równej liczbie węzłów interpolacyjnych temperatury - NOF,
- maksymalnej liczbie węzłów w elemencie - NDFCM,
- maksymalnej liczbie węzłów interpolacyjnych temperatury w elemencie NDFM,
- liczbie węzłów na brzegu obszaru z warunkiem brzegowym Dirichleta równej liczbie nieruchomych stopni swobody - LNSS,
- maksymalnej liczbie elementów mających wspólny węzeł wierzchołkowy - MLSAS,
- liczbie rodzajów materiałów o różnych przewodnościach cieplnych - LMAT,
- liczbie brzegów z warunkiem granicznym Cauchy'ego lub Neumanna - LBCO.

Wartość LMAT określa jednocześnie liczbę różnych grup elementów, z których każdą rozróżnia się tylko ze względu na odmienne własności ośrodka wypełniającego przestrzeń dyskretyzowaną tą grupą elementów.

Dane dotyczące siatki podziału wprowadzane są procedurą GEOTOP opracowaną przez użytkownika, w której należy w kolejności podać:

- wartości LMAT wyrazów tablicy IMAT, z których każdy określa maksymalny numer elementu skończonego dla danej grupy elementów,
- tablicę NOP powiązań węzłowych elementów zawierającą globalne numery węzłów w każdym elemencie, w kolejności zgodnej z numeracją lokalną podaną na rys.1,
- współrzędne X, Y, Z każdego węzła w układzie kartezjańskim przyjętym w omawianym programie jako układ globalny,
- tablicę NNS zawierającą LNSS numerów globalnych węzłów z zadaną temperaturą na brzegu.

Każda kolumna macierzy NOP powinna zawierać dwadzieścia liczb całkowitych określających numery globalne węzłów. W przypadku użycia elementów o mniejszej od dwudziestu liczbie węzłów pozostałe numery przyjmuje się za zerowe. Jest to istotne, gdyż ilość niezerowych numerów w każdej kolumnie tablicy NOP określa typ użytego elementu, a tym samym wybór właściwej procedury generującej funkcje kształtu i ich pochodne w układzie lokalnym oraz wybór właściwej kwadratury numerycznej. W programie głównym, w oparciu o dane zawarte w tablicy NNS, wprowadza się znaki minus w macierzy NOP dla wszystkich globalnych numerów węzłów z zadaną temperaturą brzegową. Wykorzystywane są one w programie dla wyróżnienia numerów nieruchomych stopni swobody, dla których eliminuje się odpowiednie wiersze i kolumny z globalnej macierzy przewodności.

Zmienne w rozważanej przestrzeni składowe tensora przewodności cieplnej dla każdego z LMAT materiałów wprowadzane są procedurą funkcyjną TNS, zaś zmienne na brzegu warunki Dirichleta procedurą BOUND.

Numeracja globalna węzłów jest dowolna. W przypadku jednak użycia elementów superparametrycznych ($NDFCM > NDFM$) konieczne jest aby pierwsze NOF numerów węzłów odpowiadało węzłom narożnikowym. W tym celu zastosowano wewnętrzną zmianę globalnej numeracji. Procedura CHAN1 wprowadza odpowiednie zmiany w tablicach NOP, NNS, X, Y, Z i wektory wartości brzegowych temperatury oraz tworzy dwie tablice odpowiedności nowych i starych numerów węzłów IA oraz IB o wymiarach \leq NOF.

4.2. TWORZENIE MACIERZY WSKAŹNIKOWYCH I GLOBALNEJ MACIERZY PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ

Dla oszczędnego zapisu symetrycznej macierzy przewodności cieplnej S wykorzystano specjalną technikę zbierania macierzy rzadkich [2]. W procedurze SIPMAS, w oparciu o dane dotyczące powiązań węzłowych elementów, tworzone są dwie jednowymiarowe tablice wskaźnikowe. W tablicy NWS zapisuje się numery kolumn wszystkich niezerowych wyrazów górnej trójkątnej części macierzy przewodności cieplnej zbieranych wierszami, zaś tablica ILE określa położenie kolejnych wyrazów przekątniowych macierzy S w NWS. Wymiar tablicy NWS określić można a priori poprzez analizę siatki elementów [2]. W złożonych geometrycznie trójwymiarowych strukturach analiza taka staje się jednak kłopotliwa i żmudna. W takich przypadkach należy niezależnie wykorzystać procedurę SIPMAS, której jednym z wyjściowych parametrów jest wyliczona liczba niezerowych wyrazów LEM w macierzy globalnej S . Wymiar tablicy ILE jest o jeden większy od liczby równań końcowego układu równań algebraicznych analogu numerycznego i wynosi $NOF - LNSS + 1$. W procedurze SIPMAS podczas tworzenia wektorów wskaźnikowych NWS i ILE eliminowane są wiersze i kolumny macierzy globalnej odpowiadające numerom nieruchomych stopni swobody.

Wyrazy globalnej macierzy przewodności cieplnej S oblicza się zgodnie ze wzorem (12), sumując całki w objętościach poszczególnych elementów. W prezentowanej wersji programu układem globalnych współrzędnych jest układ kartezjański ($H_i = 1$, $\xi_i = x_i$, dla $i = 1, 2, 3$). W procedurze FE3DI dla każdego elementu z kolejnych grup elementowych wyznaczane są pochodne lokalne funkcji interpolujących (procedury PLFK1, PLFK2, PLFK3) i wyznacznik macierzy Jacobiego (procedura JAC 3D) w poszczególnych punktach kwadratury numerycznej oraz wyrazy elementowej macierzy przewodności cieplnej. W oparciu o dane zawarte w zgenerowanych wektorach wskaźnikowych ILE i NWS wyrazy elementowej macierzy przewodności cieplnej umieszczane są w odpowiednich miejscach macierzy globalnej S (procedura MASYS). W procedurze FE3DI tworzony jest także wektor prawych stron (13) wynikający z obecności źródeł ciepła w objętości poszczegól-

nych elementów. Ich zmienne z położeniem wartości określone są w procedurze funkcyjnej VOLF.

4.3. WARUNKI BRZEGOWE

Sposób tworzenia danych dla warunków brzegowych Dirichleta opisany został w punkcie 4.1. Konieczność ich wprowadzenia przed generację macierzy wynika z faktu, iż są one wykorzystywane w procesie tworzenia wektorów wskaźnikowych.

Jedną z danych podstawowych wczytywanych w programie głównym jest LBCO - liczba brzegów z warunkiem granicznym Cauchy'ego lub Neumanna. Proponuje się przy tym rozróżnianie brzegów tak ze względu na rodzaj warunku brzegowego, jak również ze względu na geometrię brzegu, różne współczynniki przejmowania ciepła i różne temperatury ośrodków otaczających badany obszar. Dla każdego tak wyodrębnionego brzegu wprowadza się w programie głównym dane określające ilość elementów brzegowych - LEB oraz wartość wskaźnika LPO identyfikującego typ warunku brzegowego ($LPO = 0$, dla warunku trzeciego rodzaju, $LPO \neq 0$ dla warunku drugiego rodzaju).

Dla każdego elementu brzegowego wczytuje się kolejno: tablicę NWB numerów globalnych jego węzłów w kolejności zgodnej z numeracją lokalną podaną na rys.2, wartości węzłowe temperatur ośrodka otaczającego dla warunku trzeciego rodzaju (tablica TO) lub wartości węzłowe powierzchniowej gęstości strumienia ciepła wnikającego do obszaru przez powierzchnię elementu dla warunku drugiego rodzaju (tablica TO) oraz dla $LPO = 0$ wartości węzłowe współczynnika przejmowania ciepła (ALFA). W tym miejscu pożądane jest wprowadzenie stosownych procedur funkcyjnych generujących dane elementowe. Tablica NWB powinna zawierać osiem liczb całkowitych określających numery globalne węzłów w elemencie brzegowym. Jeśli element ma mniejszą ilość wyróżnionych węzłów, pozostałe numery przyjmuje się za zerowe. Po zamianie numeracji globalnej w tablicy NWB, zgodnie z przyjętą numeracją wewnętrzną, wyznaczone są wartości funkcji interpolacyjnych N_i oraz M_i i ich pochodnych (procedura BRZEG)

oraz wartości pola elementu płata powierzchniowego (procedura PPP) w punktach odpowiednich kwadratur numerycznych, a następnie obliczane są wartości wyrazów elementowej macierzy przejmowania ciepła (procedura SMPPEB). W oparciu o dane zawarte w tablicach ILE i NWS wyrazy macierzy elementowej wprowadzane są w odpowiednie miejsca globalnej macierzy S (procedura SMPEB).

4.4. ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH I WYDRUK WYNIKÓW

Do rozwiązania końcowego układu równań algebraicznych (11) modelu numerycznego wykorzystano metodę iteracyjną Gaussa-Seidela z nadrelaksacją. Tylko bowiem metody iteracyjne zapewniają niezmiennosc charakteru rzadkiej macierzy w trakcie rozwiązywania układu równań. Proces iteracyjny jest przerywany, gdy norma różnicy dwóch kolejnych przybliżeń jest mniejsza od zadanego ułamka normy wektora ostatniego przybliżenia rozwiązania, tzn. gdy spełniona jest nierówność

$$\sum_{i=1}^{\text{NOF-LN55}} \left| R_i^{n+1} - R_i^n \right| \leq \text{EPS} \sum_{i=1}^{\text{NOF-LN55}} \left| R_i^{n+1} \right|$$

lub gdy liczba iteracji przekroczy maksymalną dopuszczalną wartość - NCYC.

Parametr nadrelaksacji RELAX, dopuszczalną liczbę iteracji NCYC oraz wielkość EPS wczytuje się w programie głównym wraz z wartością wskaźnika IC. Jeśli IC = 0 wówczas początkowe przybliżenie DIS poszukiwanego rozwiązania R przyjmowane jest za zerowe, w innym zaś przypadku użytkownik powinien wprowadzić w formie danych wartości tablicy DIS. Uzyskany z procedury GSISS wektor rozwiązania jest rozszerzany o wartości temperatury w nieruchomych stopniach swobody (procedura EXPAND) i po powrocie do numeracji globalnej zgodnej z podaną przez użytkownika (procedura CHAN 2) jest drukowany instrukcją w programie głównym.

4.5. ZASADY UŻYTKOWANIA PROGRAMU

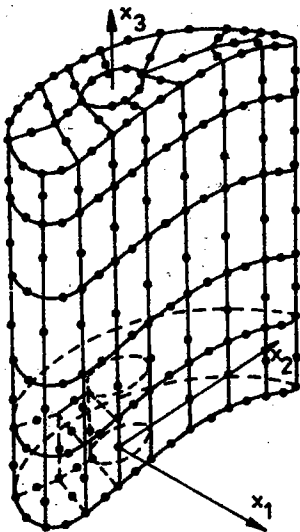
W omawianej wersji programu nie wykorzystuje się zewnętrznych jednostek pamięci maszyny cyfrowej, a wszystkie dane trzymane są w czasie egzekucji, w pamięci operacyjnej, co determinuje wybrany sposób ich wprowadzenia. By uruchomić program dla konkretnego zadania użytkownik powinien:

- określić rozmiary tablic instrukcją DIMENSION w programie głównym w następujący sposób:
 NWS(LEMI), ILE(NOF - LNSS + 1)
 S(LEMI), R(NOF), RR(NOF), X(LW), Y(LW), Z(LW)
 NOP(20, LE), NNS(LNSS), IMAT(LMAT)
 IA(\leq NOF), IB(\leq NOF) - tylko w przypadku użycia elementów superparametrycznych,
 DIS(NOF - LNSS),
- wczytać dane podstawowe LE, LW, NOF, NDFCM, NDFM, LNSS, MLSAS, LMAT, LBCO instrukcją w programie głównym,
- opracować procedurę GEOTOP (LE, LW, NDFCM, LNSS, LMAT, IMAT, NOP, NNS, X, Y, Z) generującą tablice NOP, IMAT, NNS, X, Y, Z,
- wczytać instrukcjami programu głównego (tylko gdy LBCO > 0) dla każdego brzegu LE_B i LPO zaś dla każdego elementu NWB i TO oraz gdy LPO = 0 tablicę ALFA,
- wczytać instrukcją programu głównego parametry procesu iteracyjnego rozwiązywania układu równań algebraicznych, a mianowicie: RELAX, EPS, NCYC, IC oraz DIS w przypadku gdy IC \neq 0,
- opracować procedury funkcyjne: BOUND (X, Y, Z) - określającą wartości temperatur brzegowych (tylko dla LNSS > 0),
 TNS(L, MMAT, X, Y, Z) - wyznaczającą składowe tensora przewodności cieplnej w lokalnym układzie elementu dla materiału o numerze MMAT,
 VOLP(X, Y, Z) - definiującą zmienność przestrzenną gęstości mocy strumieni ciepła.

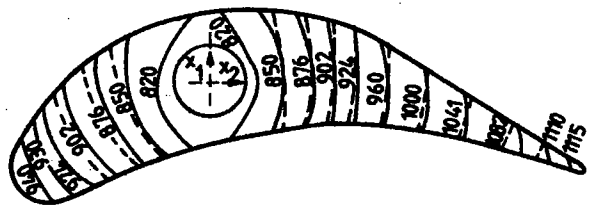
Znaczenia parametrów formalnych procedur oraz rozmiary tablic omówiono w poprzednich punktach rozdziału.

5. PRZYKŁADY NUMERYCZNE

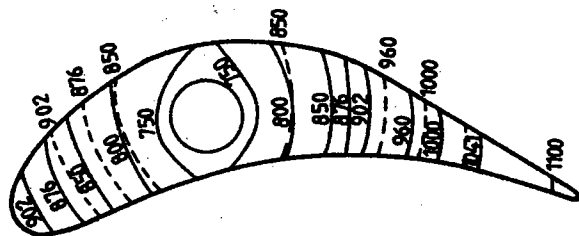
Dla ilustracji praktycznej przydatności opracowanego programu przedstawiono wyniki numerycznej analizy pola temperatury dla trzech zagadnień ustalonego trójwymiarowego przewodzenia ciepła w tak złożonych geometrycznie obszarach, iż metoda elementów skończonych była jedynym ekonomicznym narzędziem tej analizy pozwalającym na dobre przybliżenie krzywoliniowych powierzchni brzegowych na rzadkich siatkach podziału.



Rys.4. Geometria kopatki kierowniczej z wewnętrznym kanałem chłodzącym na 65 dwudziestowęzłowych izoparametrycznych elementów skończonych o 469 węzłach.



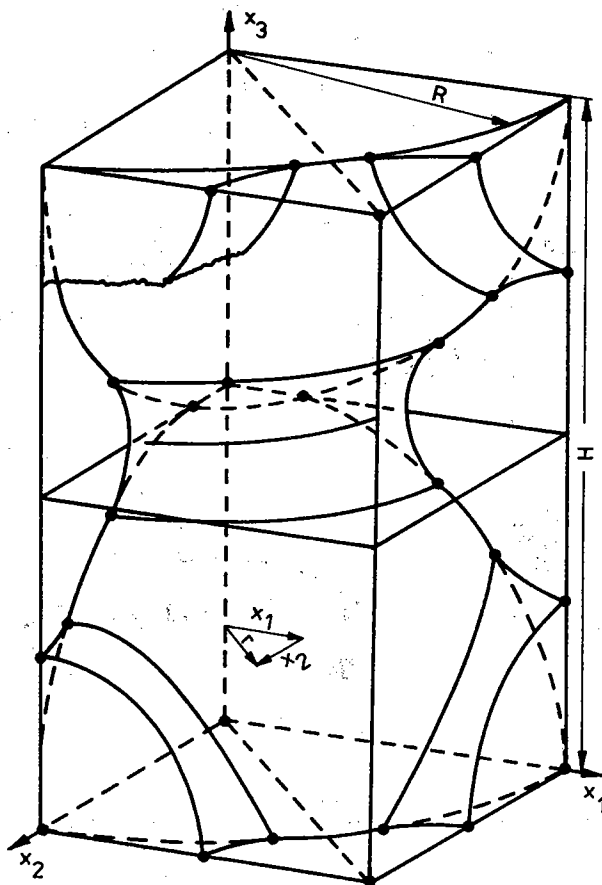
— rozw. numeryczne
- - - analogia elektrolityczna



Rys.5. Pola temperatury w przekrojach podstawy i wierzchołka kopatki

Na rys.4 przedstawiono geometrię oraz podział obszaru kopatki kierowniczej z wewnętrznym kanałem chłodzącym na 65 dwudziestowęzłowych izoparametrycznych elementów skończonych o 469 węzłach. Ze względu na zmienność temperatury czynnika chłodzącego oraz zmienność współczynnika przejmowania ciepła wzdłuż osi kanału o przekroju kołowym pole temperatur jest trójwymiarowe. Dane fizyczne i geometryczne problemu oraz przebieg zmienności współczynnika α i temperatury φ_{OSR} wokół profilu

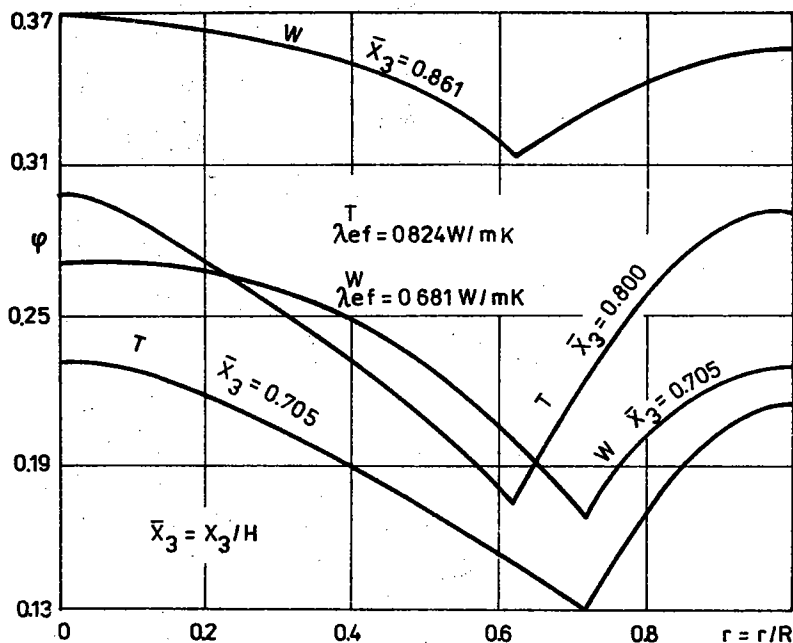
łopatki przyjęto analogicznie jak w [3]. Pozwoliło to na dokonanie porównań rozwiązania numerycznego MES z wynikami pomiarów w metodzie analogii elektrolitycznej [3]. Przedstawiono je na rys.5 w postaci linii izoterm dla przekrojów granicznych w podstawie i wierzchołku łopatki.



Rys.6. Geometryczny schemat EK wilgotnego ośrodka ziarnistego o krzywoliniowym profilu pierścieni cieczych

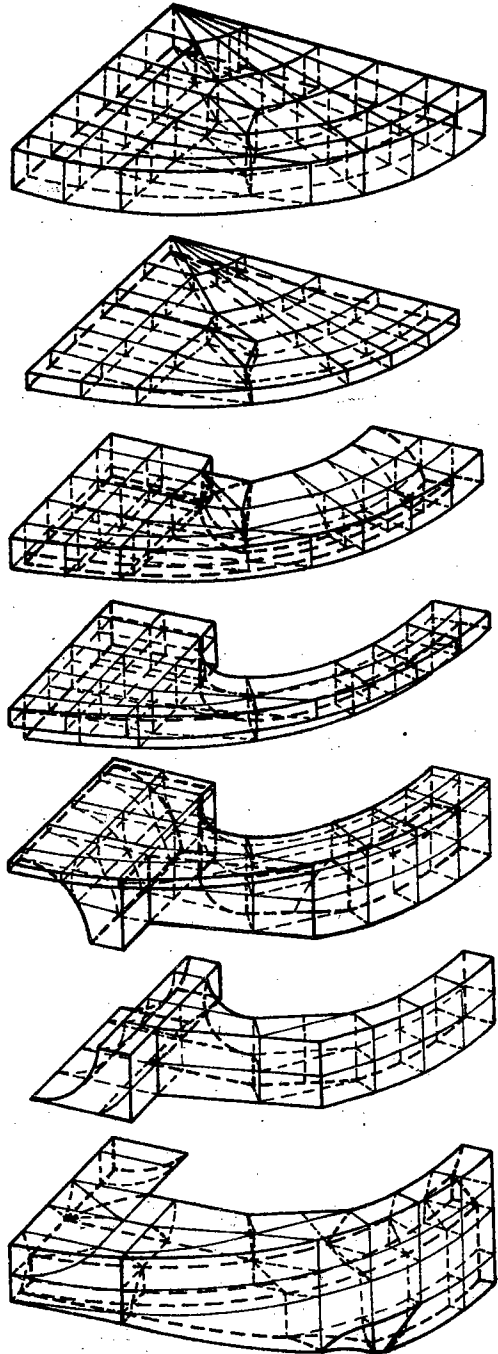
Prezentowany program wykorzystano także do analizy ustalonego pola temperatury w modelu wilgotnego ośrodka ziarnistego przewodzącego ciepło. Struktura ośrodka heterogenicznego, jakim jest wilgotny materiał ziarnisty ze względu na skomplikowane ukształtowanie powierzchni międzyfazowych rozgraniczają-

cych składniki uniemożliwia zastosowanie metod analitycznych dla określenia pola temperatury i efektywnej przewodności cieplnej. Na ich wielkości istotnie wpływa obecność cieczy skupiającej się wokół pól kontaktowych stykających się ziaren w postaci pierścieni o krzywoliniowym profilu menisku [4]. Ścisłe uwzględnienie wpływu kształtu menisku cieczy na pole temperatury i efektywną przewodność cieplną ośrodka wymaga użycia takiej metody numerycznej, która pozwala dobrze aproksymować krzywoliniowe granice cieczy i ziarna w strefie pierścienia cieczowego. Warunek ten uzasadnia wybór metody elemen-

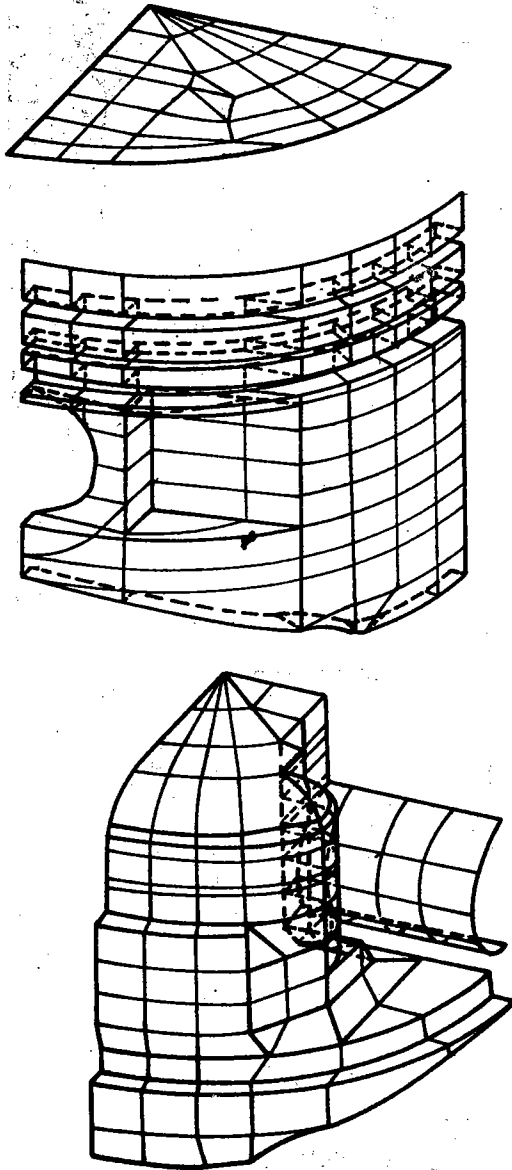


Rys.7. Bezwymiarowe pole temperatury (φ) w modelu EK wilgotnego ośrodka ziarnistego z krzywoliniowym (T) i prostoliniowym (W) profilem pierścienia cieczowego, dla $R = 1.01734$ mm, $\lambda_S = 1.687$ W/(m·K), $\lambda_L = 0.594$ W/(m·K), $\lambda_E = 0.026$ W/(m·K)

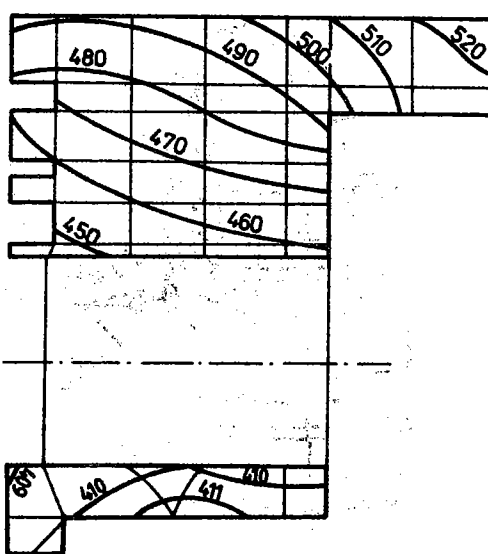
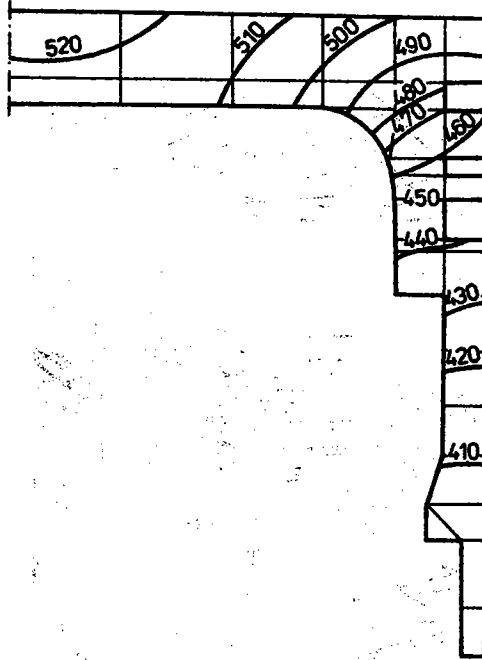
tów skończonych. Ze względu na symetrię wydzielonej z ośrodka ziarnistego reprezentatywnej dla niego pod względem fizycznym i geometrycznym elementarnej komórki (EK) [4] pokazanej na rys.6, jej połowa podzielona została na 420 elementów piętnasto- i dwudziesto-węzłowych o 2071 węzłach [4].



Rys. 8. Dyskretyzacja obszaru tłożka elementami skończonymi



Rys.9. Siatka elementów na powierzchniach brzegowych tłoka



Rys.10. Pola izoterm w przekrojach osiowych tloka

Szczegóły modelu numerycznego przedstawiono w pracy [5], zaś rozwiązanie w postaci porównawczych przebiegów pól temperatury w EK dla dwóch kształtów profilu menisku cieczy: krzywoliniowego i prostoliniowego na rys.7. Pełny opis wszystkich rozważanych przypadków i analizę wyników znaleźć można w pracy [4].

W Instytucie Lotnictwa w Warszawie konstruktorzy prowadzą badania zmierzające do zwiększenia mocy lotniczego silnika spalinowego PZL FRANKLIN poprzez zastosowanie turbodoładowania bądź przejście na zapłon samoczynny. Dla określenia zwiększonych naprężeń termicznych i obciążeń cieplnych w tłoku silnika konieczne jest wyznaczenie pola temperatury w trójwymiarowym geometrycznie złożonym obszarze rozważanego elementu silnika. Ze względu na symetrię geometrii tłoka oraz sformułowanych, w oparciu o badania prowadzone w Instytucie Lotnictwa warunków brzegowych drugiego i trzeciego rodzaju dokonano dyskretyzacji tylko czwartej części objętości tłoka. Siatkę dziesięcio-, piętnasto- i dwudziestowęzłowych superparametrycznych elementów skończonych (272 elementy i 1658 węzłów) pokazano na rys.8, zaś podział na ośmio- i sześciowęzłowe elementy tych powierzchni brzegowych, na których sformułowany jest warunek brzegowy trzeciego rodzaju przedstawiono na rys.9. Otrzymane pole temperatury zilustrowano przebiegami izoterm dla dwóch przekrojów osiowych (rys.10): przekroju przechodzącego przez osie tłoka i kanału sworznia oraz przekroju prostopadłego do poprzedniego. Szczegółowy opis modelu numerycznego dla analizowanego problemu i uzyskanych wyników znaleźć można w pracy [6].

6. PROGRAM

```

C      PROGRAM DLA TRÓJWYMIAROWEGO USTALONEGO PROBLEMU
C      PRZEWODZENIA CIEPŁA Z LINIOWYMI WARUNKAMI BRZEGOWYMI
C      DIRICHLETA, CAUCHY'EGO, NEUMANNA
C      * * * * *
C      DIMENSION NWS(1000), ILE(251), S(1000), R(250), RR(250)
C      DIMENSION X(250), Y(250), Z(250), NOP(20,70), NNS(20)
C      DIMENSION IMAT(5), IA(100), IB(100), DIS(230)
C      * * * * *
C      COMMON /EL/ A(210), FK(3,20), FKC(3,20)
C      COMMON /ELB/ F(20), FC(20), NNB(8), TO(8), ALFA(8)
C      COMMON /GAU/ WG(21), ZZ(3,21), IPG
C
C      DANE PODSTAWOWE
C
C      LE, LW - LICZBY ELEMENTÓW I WEZŁÓW
C      NOP, LNNS - CAŁKOWITA LICZBA STOPNI SWOBODY I LICZBA
C      STOPNI NIERUCHOMYCH
C      NDFCM, NDFM - MAKSYMALNE LICZBY WEZŁÓW INTERPOLUJĄCYCH
C      KSZTAŁTY GEOMETRYCZNE I POLE TEMPERATURY
C      W ELEMENTACH
C      MLSAS - MAKSYMALNA LICZBA ELEMENTÓW DO KTOREJ NALEŻY
C      WEZŁ TEMPERATURY
C      LMAT - LICZBA MATERIAŁÓW O RÓŻNYCH PRZEWODNOŚCIACH
C      CIEPLNYCH
C      LBGO - LICZBA BRZEGÓW Z WARUNKAMI CAUCHY'EGO I/LUB
C      NEUMANNA
C      * * * * *
C      READ(S,1000) LE,LW,NOP,NDFCM,NDFM,LNNS,MLSAS,LMAT,LBGO
1000 FORMAT(15I5)
C      * * * * *
C
C      DANE GEOMETRYCZNE, SIATKA ELEMENTÓW, WARUNKI BRZEGOWE
C      DIRICHLETA
C
C      IMAT(LMAT) - TABLICA MAKSYMALNYCH NUMERÓW ELEMENTÓW
C      W RÓŻNYCH MATERIAŁACH
C      NOP(NDFCM,LE) - TABLICA GLOBALNYCH NUMERÓW WEZŁÓW W
C      POSZCZEGÓLNYCH ELEMENTACH
C      NNS(LNNS) - TABLICA GLOBALNYCH NUMERÓW NIERUCHOMYCH
C      STOPNI SWOBODY
C      X(LW), Y(LW), Z(LW) - WSPÓŁRZĘDNE GLOBALNE WEZŁÓW
C      FUNCTION BOUND(X,Y,Z) - PROCEDURA FUNKCYJNA OKREŚLA-
C      JĄCA WARTOŚCI TEMPERATUR NA
C      BRZEGU Z WARUNKIEM DIRICHLETA
C      R(NOP) - TABLICA WARTOŚCI WEZŁOWYCH TEMPERATURY
C
C      CALL GEOTOP(LE,LW,NDFCM,LNNS,LMAT,IMAT,NOP,NNS,X,Y,Z)
C      IF(LNNS) 4,4,1

```

```

1 DO 20 J=1,LE
  DO 20 I=1,NDFM
  INEL=NOP(I,J)
  DO 18 K=1,LNSS
  IF(NNS(K)-INEL) 18,2,18
18 CONTINUE
  GO TO 3
  2 NOP(I,J)=-INEL
  3 CONTINUE
20 CONTINUE
  DO 30 I=1,LNSS
  IW=NNS(I)
  XA=X(IW)

```

YA=Y(IW)

ZA=Z(IW)

30 R(IW)=BOUND(XA,YA,ZA)

NUMERACJA WĘDROWY

4 IZOP=0

IF(NDFM.EQ.NDFCM) IZOP=1

IF(IZOP) 5,5,6

5 CALL CHANILE(LK,NOP,NDFM,NDFCM,NOP,LNSS,NNS,IZOP,X,Y,Z,
* R,IA,I6,INEL)

GENERACJA MACIERZY PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ

LEM - LICZBA NIEZEROWYCH WYRAZOW MACIERZY GLOBALNEJ

NNS(LEM),ILE(NOP-LNSS+1) - TABLICE WSKAZNIKOWE

S(LEM) - MACIERZ PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ

RR(NOP) - WEKTOR PRĄDÓW STRÓM

6 CALL STPMAS(LE,NOP,NDFCM,NDFM,IZOP,NOP,LNSS,NNS,ALSAS,
* MAS,ILE,LEM)

CALL MASYS(LE,NOP,NDFCM,IZOP,NOP,LNSS,NNS,LEM,ILE,NNS,
* LMAT,IMAT,X,Y,Z,S,R,RR)

WARUNKI BRZEGOWE CAUCHY'EGO I BEUMMANA

LEB - LICZBA ELEMENTÓW BRZEGOWYCH NA KOLEJNYCH BRZEGACH

LPO - WSKAZNIK RODZAJU WARUNKU BRZEGOWEGO

LPO = 0 - WARUNEK CAUCHY'EGO

LPO = 1 - WARUNEK BEUMMANA

IND(B) - TABLICA GLOBALNYCH NUMERÓW WEZŁÓW KOLEJNYCH
ELEMENTÓW BRZEGOWYCH

TD(B) - TEMPERATURY OSRODKA W WEZŁACH ELEMENTU DLA
WARUNKU CAUCHY'EGO LUB POWIERZCHNIOWE GĘSTOŚCI

PRĘDY STRUJENIA W WEZŁACH ELEMENTU DLA
WARUNKU BEUMMANA

ALFAC(B) - WEZŁOWE WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKA PRZEJĘCZNOŚCI

IF(LBOO) 51,51,7

7 DO 50 I=1,LBOO

READ(S,1000) LEB,LPO

```

      DO 49 N=1,LEB
C     * * * * *
      READ(5,1000) (NWB(I),I=1,8)
C     * * * * *
      IF(IZOP) 8,8,9
      8 IW=NWB(7)
      NDFB=4
      IF(IW.EQ.0) NDFB=3
      DO 48 K=1,NDFB
      IW=NWB(K)
      DO 46 L=1,INEL
      IG=IB(L)
      IO=IA(L)
      IF(IG-IW) 46,47,46
      46 CONTINUE
      GO TO 48
      47 NWB(K)=IO
      48 CONTINUE
      NDFBC=8
      IND=5
      IW=NWB(7)
      IF(IW) 44,44,45
      44 NDFBC=6
      IND=4
      45 DO 43 K=IND,NDFBC
      IW=NWB(K)
      DO 41 L=1,INEL
      IG=IA(L)
      IO=IB(L)
      IF(IG-IW) 41,42,41
      41 CONTINUE
      GO TO 43
      42 NWB(K)=IO
      43 CONTINUE
C     * * * * *
      9 READ(5,1010) (TO(I),I=1,8)
      IF(LPO.EQ.0) READ(5,1010) (ALFA(I),I=1,8)
      1010 FORMAT(8F10.5)
C     * * * * *
      CALL SMPER(ILE,NRS,IZOP,LNSS,NNS,LPO,X,Y,Z,S,RR)
      49 CONTINUE
      50 CONTINUE
      51 CONTINUE
C
C     ITERACYJNE ROZWIĄZANIE UKŁADU RÓWNAŃ ALGEBRAICZNYCH
C     METODA SUR
C
C     NCYC - MAKSYMALNA LICZBA ITERACJI
C     RELAX - PARAMETR NADRELAKSACJI
C     EPS - DOPUSZCZALNA NORMA HLEDU KOLEJNYCH ITERACJI
C     DLA IG > 0 WCZYTAĆ POCZĄTKOWE PRZYBLIŻENIE ROZWIĄZANIA
C     * * * * *
      READ(5,1500) NCYC,IG,RELAX,EPS
      1500 FORMAT(2I5,2E10.3)
C     * * * * *
      LR=OF-LNSS

```



```

IF(IG) 10,10,11
10 DO 60 N=1,LR
60 DIS(N)=0.0
GO TO 12
C *****
11 READ(5,1010) (DIS(I),I=1,LR)
C *****
12 CALL MESS(R,NOF,LNSS,NNS)
CALL MESS(RR,NOF,LNSS,NNS)
CALL GSISS(LR,NWS,ILE,NCYC,RELAX,EPS,DIS,S,RR,R,IW)
CALL EXPAND(R,NOF,LNSS,NNS)
C
C WYDRUK WYNIKOW
C
IF(IZOP) 13,13,14
13 CALL CHAN2(INEL,IA,IB,R,X,Y,Z)
14 WRITE(6,2000)
WRITE(6,2010) LE,LW,NDFM,NDFCM,LNSS,LMAT,LBCO,LEM
WRITE(6,2020) IW
WRITE(6,2030)
WRITE(6,2040)
WRITE(6,2050)
WRITE(6,2060) (K,X(K),Y(K),Z(K),R(K),K=1,NOF)
2000 FORMAT(1H1,15X,20HD A N E P O D S T A W O W E,/)
2010 FORMAT(1H0,22HLICZBA ELEMENTOW LE =,I5,/,
*1X,19HLICZBA WEZLOW LW =,I5,/,1X,
*19HLICZBA WEZLOW LW =,I5,/,
*60HMAKSYMALNA LICZBA WEZLOW TEMPERATUROWYCH W ELEMENCIE NDFM =,
*I5,/,1X,45HMAKSYMALNA LICZBA WEZLOW W ELEMENCIE NDFCM =,I3,/,1X,
*42HLICZBA NIERUCHOMYCH STOPNI SWOBODY LNSS =,I5,/,
*1X,25HLICZBA MATERIALOW LMAT =,I3,/,1X,
*56HLICZBA BRZEGOW Z WARUNKAMI CAUCHY,EGO I NEUMANNA LBCO =,I3,/,
*1X,42HLICZBA NIEZEROWYCH WYRAZOW MACIERZY LEM =,I5)
2020 FORMAT(1H0,22HLICZBA ITERACJI ITER =,I5,/)
2030 FORMAT(1H1,50X,30HP O L E T E M P E R A T U R Y,/)
2040 FORMAT(1H0,30X,4H NR.,10X,1HX,13X,1HY,13X,1HZ,20X,1HT)
2050 FORMAT(1H0,30X,5HWEZLA,8X,3H(M),11X,3H(M),11X,3H(M),18X,3H(K),/)
2060 FORMAT(1H0,30X,I4,5X,E10.4,4X,E10.4,4X,E10.4,11X,E10.4)
STOP
END

```

```

SUBROUTINE GEOTOP(LE,LW,NDFM,LNSS,LMAT,IMAT,NOP,NNS,X,Y,Z)
DIMENSION NOP(NDFM,1),NNS(1),IMAT(1),X(1),Y(1),Z(1)
C WPROWADZIC DANE DOTYCZACE SIATKI,RUDZAJOW MATERIALOW,
C WARUNKOW BRZEGOWYCH DIRICHLETA NP:
C *****
READ(5,1000) (IMAT(I),I=1,LMAT)
C *****
DO 50 N=1,LE
50 READ(5,1000) (NOP(I,N),I=1,NDFM)
IF(LNSS.GT.0) READ(5,1000) (NNS(I),I=1,LNSS)
READ(5,2000) (X(I),Y(I),Z(I),I=1,LW)
1000 FORMAT(10I5)
2000 FORMAT(3F10.5)

```

```

C      KONTROLNY WYDRUK DANYCH      NP:
      WRITE(6,3000) TITLE
      WRITE(6,4000) ((NOP(I,J),I=1,NDFM),J=1,LE)
      WRITE(6,5000) (I,X(I),Y(I),Z(I),I=1,Lw)
3000  FORMAT(20A5)
4000  FORMAT(1X,20I5)
5000  FORMAT(1X,I5,20X,3E15.7)
      RETURN
      END

      FUNCTION TNS(L,NMAT)
C      PODAC SKLADOWE SYMETRYCZNEGO TENSORA PRZEWODNOSCI
C      CIEPLNEJ DLA MATERIALU O NUMERZE NMAT
C      L = KOLEJNE NUMERY WYRAZOW GORNEJ TROJKATNEJ CZESCI
C      MACIERZY TENSORA ZBIERANE KOLUMNAMI, L OD 1 DO 5
C      * * * * *
C      DLA ZAGADNIENIA IZOTROPOWEGO      NP:
      TNS=1.64
      IF(L.EQ.2.OR.L.EQ.4.OR.L.EQ.5) TNS=0.0
C      * * * * *
C      W ZAGADNIENIACH ANIZOTROPOWYCH NALEZY UNZGLEDNIC
C      TRANSFORMACJE SKLADOWYCH TENSORA DO UKLADU LOKALNEGO
      RETURN
      END

      FUNCTION BOUND(X,Y,Z)
C      PODAC WARTOSCI TEMPERATURY W WEZLACH BRZEGOWYCH O WSPOL-
C      RZEDNYCH X,Y,Z NA POWIERZCHNI BRZEGOWEJ Z WARUNKIEM
C      DIRICHLETA      NP:
C      * * * * *
      BOUND=100.
C      * * * * *
      RETURN
      END

      FUNCTION VOLF(X,Y,Z)
C      PODAC ZALEZNOSC GESTOSCI MOCY ZRODEL OD WSPOLRZEDNYCH      NP:
C      * * * * *
      VOLF=0.0
C      * * * * *
      RETURN
      END

      SUBROUTINE SIPMAS(LE,NDF,NDFCM,NDFM,IZOP,NDEG,LNSS,NNS,MLSAS,NWS,
      *ILE,LEM)
      DIMENSION NDEG(NDFCM,1),NNS(1),NNS(1),ILE(1)
      LR=NDF-LNSS
      II=1
      JA=1
      NN=0
      DO 100 N=1,NDF

```

```
11=II
IF(LNSS.EQ.0) GO TO 6
DO 10 J=1,LNSS
IN=NNS(J)-N
JB=J
IF(IN)10,99,6
10 CONTINUE
6 CONTINUE
JA=JB
NN=NN+J
NNS(II)=NN
ILF(NN)=II
LC=0
DO 90 IL=1,LE
DO 65 L=1,NDFM
IW=NDEG(L,IL)
IF(IW-N) 65,66,65
65 CONTINUE
GO TO 90
66 LC=LC+1
IF(IZOP.EQ.1) GO TO 78
IF(15-NDFCM) 72,74,76
72 IW=NDEG(16,IL)
IF(IW.EQ.0) GO TO 74
LSE=8
GO TO 89
74 IW=NDEG(11,IL)
IF(IW.EQ.0) GO TO 76
LSE=6
GO TO 89
76 LSE=4
GO TO 89
78 IF(15-NDFCM) 80,82,84
80 IW=NDEG(16,IL)
IF(IW.EQ.0) GO TO 82
LSE=20
GO TO 89
82 IW=NDEG(11,IL)
IF(IW.EQ.0) GO TO 84
LSE=15
GO TO 89
84 IW=NDEG(9,IL)
IF(IW.EQ.0) GO TO 85
LSE=10
GO TO 89
85 IW=NDEG(7,IL)
IF(IW.EQ.0) GO TO 86
LSE=8
GO TO 89
86 IW=NDEG(5,IL)
IF(IW.EQ.0) GO TO 88
LSE=6
GO TO 89
88 LSE=4
89 DO 70 I=1,LSE
IW=NDEG(I,IL)
```

```

IF(IW.LE.0) GO TO 70
IR=0
IF(LNSS.EQ.0) GO TO 8
DO 50 J=1,LNSS
IQ=NNS(J)
IF(IW-IQ) 8,7,7
7 IR=IR+1
50 CONTINUE
8 IW=IW-IR
IF(IW-NN) 70,13,13
13 DO 60 II=1,II
IH=NNS(II)
IF(IW-IH) 60,70,60
60 CONTINUE
II=II+1
NNS(II)=IW
70 CONTINUE
IF(LC-PLSAS) 90,98,98
90 CONTINUE
98 II=II+1
99 JA=JB
100 CONTINUE
ILE(LR+1)=II
LEM=II-1
DO 200 N=1,LR
IL=ILE(N)+1
IL1=ILE(N+1)-1
IL2=IL1-1
IF(IL.GI.IL2) GO TO 200
DO 150 K=IL,IL2
IM=NNS(K)
K1=K+1
IP=IM
JJ=0
DO 140 J=K1,IL1
IN=NNS(J)
IF(IN.GI.IM) GO TO 140
IN=IP
JJ=J
140 CONTINUE
IF(JJ.EQ.0) GO TO 150
NNS(K)=IM
NNS(JJ)=IP
150 CONTINUE
200 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE WASYSLC(NOP,CDFCM,IZOP,LOP,LNSS,NNS,LEM,ILE,
* NNS,LEMAI,IPAI,X,Y,Z,S,R,RR)

```

```

EXTERNAL PLEK1,PLEK2,PLEK3
DIMENSION NOP(CDFCM,1),NNS(1),ILE(1),NNS(1),LEMAI(1)
DIMENSION X(1),Y(1),Z(1),S(1),R(1),RR(1)
COMMON ZEL/ A(210)

```

```

    600 S(1)=0.0
    610 S(10)=1, S(11)=0.0
    IFL=0
    I=1
    620 600 NMAT=1, LNMAT
    IN=LNMAT(NMAT)
    630 700 S=10, IN
    IF (IZOP.EQ.1) GO TO 650
    ELEMENT SUPERPARAMETRYCZNY
    IF (15-NDFCM) 620,622,624
    620 I=NOP(16,N)
    IF (IW.EQ.0) GO TO 622
    LSE=6
    CALL FE3DI(N,NMAT,NIEL,NOP,NDFCM,X,Y,Z,PLFK1,6,20,1,RR)
    GO TO 6
    622 I=NOP(11,N)
    IF (IW.EQ.0) GO TO 624
    LSE=6
    CALL FE3DI(N,NMAT,NIEL,NOP,NDFCM,X,Y,Z,PLFK2,6,15,2,RR)
    GO TO 6
    624 LSE=4
    CALL FE3DI(N,NMAT,NIEL,NOP,NDFCM,X,Y,Z,PLFK3,4,10,3,RR)
    GO TO 6
    ELEMENT IZOPARAMETRYCZNY
    650 IF (15-NDFCM) 660,662,664
    660 I=NOP(16,N)
    IF (IW.EQ.0) GO TO 662
    LSE=20
    CALL FE3DI(N,NMAT,NIEL,NOP,NDFCM,X,Y,Z,PLFK1,20,20,1,RR)
    GO TO 6
    662 I=NOP(11,N)
    IF (IW.EQ.0) GO TO 664
    LSE=15
    CALL FE3DI(N,NMAT,NIEL,NOP,NDFCM,X,Y,Z,PLFK2,15,15,2,RR)
    GO TO 6
    664 I=NOP(9,N)
    IF (IW.EQ.0) GO TO 666
    LSE=10
    CALL FE3DI(N,NMAT,NIEL,NOP,NDFCM,X,Y,Z,PLFK3,10,10,3,RR)
    GO TO 6
    666 I=NOP(7,N)
    IF (IW.EQ.0) GO TO 668
    LSE=8
    CALL FE3DI(N,NMAT,NIEL,NOP,NDFCM,X,Y,Z,PLFK1,8,8,1,RR)
    GO TO 6
    668 I=NOP(5,N)
    IF (IW.EQ.0) GO TO 670
    LSE=6
    CALL FE3DI(N,NMAT,NIEL,NOP,NDFCM,X,Y,Z,PLFK2,6,6,2,RR)
    GO TO 6

```

```

670 LSE=4
   CALL FE3DI(N,MMAT,NIEL,NOP,NOPCW,X,Y,Z,PLFK3,4,4,3,RR)
6  DO 450 L=1,LSE
   JW=NOP(L,N)
   IF (JW) 450,450,7
7  IR=0
   IF (LNSS) 10,10,8
8  DO 420 K=1,LNSS
   IH=MNS(K)
   IF (JW-IH) 10,9,9
9  IR=IR+1
420 CONTINUE
10  IW=JW-IR
   IL=ILE(NQ)
   IL1=ILE(NQ+1)-1
   DO 400 J=1,LSE
   IW=NOP(J,N)
   IF (IW-JW) 400,11,11
11  IR=0
   IF (LNSS) 14,14,12
12  DO 380 K=1,LNSS
   IH=MNS(K)
   IF (IW-IH) 14,13,13
13  IR=IR+J
380 CONTINUE
14  IW=IW-IR
   DO 390 IQ=IL,IL1
   IF (MNS(IQ)-IW) 390,15,390
390 CONTINUE
   GO TO 400
15  IF (L-J) 16,16,17
16  LL=L+J*(J-1)/2
   GO TO 18
17  LL=J+L*(L-1)/2
18  S(IQ)=S(IQ)+A(LL)
400 CONTINUE
450 CONTINUE
   IF (LNSS.EQ.0) GO TO 500
   DO 480 K=1,LSE
   IW=NOP(K,N)
   IF (IW) 21,480,480
21  IW=-IW
   DO 470 L=1,LSE
   JW=NOP(L,N)
   IF (JW) 470,470,22
22  IF (K-L) 23,23,24
23  LL=K+L*(L-1)/2
   GO TO 25
24  LL=L+K*(K-1)/2
25  PC=A(LL)
   RR(JW)=RR(JW)-PC*(IW)
470 CONTINUE
480 CONTINUE
500 CONTINUE
700 CONTINUE
   IM=IM+1

```

```
800 CONTINUE
RETURN
END
```

```

SUBROUTINE FE3DI(N,NMAT,NIEL,NOP,NDFCM,X,Y,Z,PLFK,NDF,NDFC,IELEM,
*          RR)
DIMENSION NOP(NDFCM,1),X(1),Y(1),Z(1),RR(1)
DIMENSION TENSOR(6),FA(3,20)
COMMON /EL/ A(210),FK(3,20),FKC(3,20)
COMMON /ELB/ F(20),FC(20)
COMMON /GAU/ WG(21),ZZ(3,21),IPG
COMMON /TRANS/ XYZ(3,3)
IA=NDF*(NDF-1)/2+NDF
DO 520 J=1,IA
520 A(J)=0.0
CALL NINT(IELEM)
DO 400 IM=1,IPG
PP=ZZ(1,IM)
PR=ZZ(2,IM)
SS=ZZ(3,IM)
WG1=WG(IM)
CALL PLFK(PP,PR,SS,NDF,NDFC)
CALL JAC3D(N,NDFCM,NOP,NDFC,X,Y,Z,DE)
IF (ABS(DE).LE.1.E-30) GO TO 15
XA=0.0
YA=0.0
ZA=0.0
DO 120 K=1,NDFC
IW=IABS(IW)
PC=FC(K)
XA=XA+X(IW)*PC
YA=YA+Y(IW)*PC
120 ZA=ZA+Z(IW)*PC
GF=VOLF(XA,YA,ZA)
P1=XYZ(1,1)
P2=XYZ(1,2)
P3=XYZ(1,3)
P4=XYZ(2,1)
P5=XYZ(2,2)
P6=XYZ(2,3)
P7=XYZ(3,1)
P8=XYZ(3,2)
P9=XYZ(3,3)
DO 130 I=1,NDF
PC=(P5*P9-P8*P6)*FK(1,I)+(P7*P6-P4*P9)*FK(2,I)+(P4*P8-P7*P5)*FK(
*3,I)
PW=(P8*P3-P2*P9)*FK(1,I)+(P1*P9-P3*P7)*FK(2,I)+(P7*P2-P8*P1)*
*FK(3,I)
PZ=(P2*P6-P3*P5)*FK(1,I)+(P4*P3-P6*P1)*FK(2,I)+(P1*P5-P4*P2)*
*FK(3,I)
FA(1,I)=PC/DE
FA(2,I)=PW/DE
130 FA(3,I)=PZ/DE

```

```

DO 200 M=1,3
DO 200 K=1,3
L=M+K*(K-1)/2
200 TENSOR(L)=TNS(L,NMAT)
DO 250 J=1,NDF
IN=NOP(J,N)
IA=IABS(IN)
RR(IA)=RR(IA)+F(J)*ABS(DF)*GF*WG1
DO 250 I=J,NDF
LL=J+I*(I-1)/2
DO 240 M=1,3
DO 240 K=1,3
IF(K=M) 2,2,3
2 L=K+M*(M-1)/2
GO TO 4
3 L=M+K*(K-1)/2
4 PC=FA(M,J)*FA(K,I)*TENSOR(L)*ABS(DF)
240 A(LL)=A(LL)+WG1*PC
250 CONTINUE
400 CONTINUE
IF(NIEL.FD.0) RETURN
WRITE(6,1000)N
1000 FORMAT(1X,12HELEMENT NO =,15 / )
WRITE(6,1010) (A(I),I=1,IA)
1010 FORMAT(1X,10E12.5)
RETURN
15 WRITE(6,1200)
1200 FORMAT(1H0,24HZEROSA WARTOSC JACOBIANU)
STOP 01
END

```

```

SUBROUTINE JAC3D(N,NDFCM,NOP,NDF,X,Y,Z,DET)
DIMENSION NOP(NDFCM,1),X(1),Y(1),Z(1)
COMMON /EL/ A(210),FKC(3,20),FK(3,20)

COMMON /TRANS/ XYZ(3,3)
DO 100 J=1,3
DO 100 I=1,3
100 XYZ(J,I)=0.0
DO 150 J=1,NDF
IN=NOP(J,N)
IF(IA)2,4,3
2 IA=-IA
3 PA=X(IA)
PB=Y(IA)

```



```

PC=7(1)
DO 140 L=1,3
  PP=FK(L,J)
  XYZ(1,L)=XYZ(1,L)+PP*PP
  XYZ(2,L)=XYZ(2,L)+PP*PP
140 XYZ(3,L)=XYZ(3,L)+PC*PP
4 CONTINUE
150 CONTINUE
P1=XYZ(1,1)
P2=XYZ(1,2)
P3=XYZ(1,3)
P4=XYZ(2,1)
P5=XYZ(2,2)
P6=XYZ(2,3)
P7=XYZ(3,1)
P8=XYZ(3,2)
P9=XYZ(3,3)
DET=P1*P5*P9+P2*P6*P7+P3*P4*P8-P7*P5*P3-P6*P8*P1-P9*P4*P2
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE PLFK1(PP,RR,SS,NUFC,PDF)
COMMON /EL/ A(210),FKC(3,20),FK(3,20)
COMMON /EL6/ FC(20),F(20)
P1=0.5*(1.-PP)
P2=0.5*(1.-RR)
P3=0.5*(1.-SS)
R1=0.5*(1.+PP)
R2=0.5*(1.+RR)
R3=0.5*(1.+SS)
Q1=1.-PP*PP
Q2=1.-RR*RR
Q3=1.-SS*SS
FK(1,1)=-0.5*P2*P3
FK(2,1)=-0.5*P1*P3
FK(3,1)=-0.5*P1*P2
FK(1,2)=0.5*P2*P3
FK(2,2)=-0.5*R1*P3
FK(3,2)=-0.5*R1*P2
FK(1,3)=0.5*R2*P3
FK(2,3)=0.5*R1*P3
FK(3,3)=-0.5*R1*R2
FK(1,4)=-0.5*R2*P3
FK(2,4)=0.5*P1*P3
FK(3,4)=-0.5*P1*R2
FK(1,5)=-0.5*P2*R3
FK(2,5)=-0.5*P1*R3
FK(3,5)=0.5*P1*P2
FK(1,6)=0.5*P2*R3
FK(2,6)=-0.5*R1*R3
FK(2,6)=-0.5*R1*R3
FK(3,6)=0.5*R1*P2
FK(1,7)=0.5*R2*R3
FK(2,7)=0.5*R1*R3

```

```

FK(3,7)=0.5*R1*R2
FK(1,8)=-0.5*R2*R3
FK(2,8)=0.5*P1*R3
FK(3,8)=0.5*P1*R2
F(1)=P1*P2*P3
F(2)=R1*P2*P3
F(3)=R1*R2*P3
F(4)=P1*R2*P3
F(5)=P1*P2*R3
F(6)=R1*P2*R3
F(7)=R1*R2*R3
F(8)=P1*R2*R3
DO 5 K=1,NDFC
DO 4 J=1,3
4  FKC(J,K)=FK(J,K)
5  FC(K)=F(K)
   IF(NDF.EQ.8) RETURN
   PA=PP+RR+SS
   DO 10 K=1,3
   FK(K,1)=FK(K,1)*(-PA-2.)-P1*P2*P3
10  FK(K,7)=FK(K,7)*(PA-2.)+R1*R2*R3
   PA=PP-RR-SS-2.0
   FK(1,2)=FK(1,2)*PA+R1*P2*P3
   FK(2,2)=FK(2,2)*PA-F1*P2*P3
   FK(3,2)=FK(3,2)*PA-R1*P2*P3
   PA=PP+RR-SS-2.0
   FK(1,3)=FK(1,3)*PA+R1*R2*P3
   FK(2,3)=FK(2,3)*PA+R1*R2*P3
   FK(3,3)=FK(3,3)*PA-R1*R2*P3
   PA=-PP+RR-SS-2.0
   FK(1,4)=FK(1,4)*PA-P1*R2*P3
   FK(2,4)=FK(2,4)*PA+P1*R2*P3
   FK(3,4)=FK(3,4)*PA-F1*R2*P3
   PA=-PP-RR+SS-2.0
   FK(1,5)=FK(1,5)*PA-P1*P2*R3
   FK(2,5)=FK(2,5)*PA-P1*P2*R3
   FK(3,5)=FK(3,5)*PA+F1*P2*R3
   PA=PP-RR+SS-2.0
   FK(1,6)=FK(1,6)*PA+R1*P2*R3
   FK(2,6)=FK(2,6)*PA-R1*P2*R3
   FK(3,6)=FK(3,6)*PA+R1*P2*R3
   PA=-PP+RR+SS-2.0
   FK(1,8)=FK(1,8)*PA-P1*R2*R3
   FK(2,8)=FK(2,8)*PA+P1*R2*R3
   FK(3,8)=FK(3,8)*PA+P1*R2*R3
   FK(1,9)=-2.*P2*P3*PP
   FK(1,11)=-2.*R2*P3*PP
   FK(1,19)=-2.*R2*R3*PP
   FK(1,17)=-2.*P2*R3*PP
   PC=-.5*R1*P3
   FK(2,9)=PC
   FK(2,11)=-PC
   PC=.5*R1*R3
   FK(2,19)=PC
   FK(2,17)=-PC
   PC=-.5*R1*P2

```

$FK(3,9)=PC$
 $FK(3,17)=-PC$
 $PC=-.5*Q1*R2$
 $FK(3,11)=PC$
 $FK(3,19)=-PC$
 $PC=-.5*Q2*P3$
 $FK(1,12)=PC$
 $FK(1,10)=-PC$
 $PC=.5*Q2*R3$
 $FK(1,18)=PC$
 $FK(1,20)=-PC$
 $FK(2,12)=-2.*P1*P3*RR$
 $FK(2,10)=-2.*R1*P3*RR$
 $FK(2,18)=-2.*R1*R3*RR$

$FK(2,20)=-2.*P1*R3*RR$
 $PC=-.5*P1*Q2$
 $FK(3,17)=PC$
 $FK(3,20)=-PC$
 $PC=-.5*R1*Q2$
 $FK(3,10)=PC$
 $FK(3,18)=-PC$
 $PC=-.5*Q3*P2$
 $FK(1,13)=PC$
 $FK(1,14)=-PC$
 $PC=.5*Q3*R2$
 $FK(1,15)=PC$
 $FK(1,16)=-PC$
 $PC=-0.5*P1*Q3$
 $FK(2,13)=PC$
 $FK(2,16)=-PC$
 $PC=-0.5*R1*Q3$
 $FK(2,14)=PC$
 $FK(2,15)=-PC$
 $FK(3,13)=-2.*P1*P2*SS$
 $FK(3,14)=-2.*R1*P2*SS$

$FK(3,15)=-2.*R1*R2*SS$

$FK(3,16)=-2.*P1*R2*SS$
 $F(1)=F(1)*(-PP-RR-SS-2.)$
 $F(2)=F(2)*(PP-RR-SS-2.)$
 $F(3)=F(3)*(PP+RR-SS-2.)$
 $F(4)=F(4)*(-PP+RR-SS-2.)$
 $F(5)=F(5)*(-PP-RR+SS-2.)$
 $F(6)=F(6)*(PP-RR+SS-2.)$
 $F(7)=F(7)*(PP+RR+SS-2.)$
 $F(8)=F(8)*(-PP+RR+SS-2.)$

$F(9)=Q1*P2*P3$
 $F(10)=Q2*R1*P3$
 $F(11)=Q1*R2*P3$
 $F(12)=Q2*P1*P3$
 $F(13)=Q3*P1*P2$
 $F(14)=Q3*R1*P2$
 $F(15)=Q3*R1*R2$
 $F(16)=Q3*P1*R2$

```

F(17)=Q1*P2*R3
F(18)=Q2*R1*R3
F(19)=Q1*R2*R3
F(20)=Q2*P1*R3
IF(NDFC-NDF) 17,13,17
13 DO 15 K=1,NDF
DO 14 J=1,3
14 FK(J,K)=FK(J,K)
15 FC(K)=F(K)
17 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE PLFK2(P1,P2,ZA,NDF,NDFC)
COMMON /EL/ A(210),FK(3,20),FKC(3,20)
COMMON /ELB/ F(20),FC(20)
ZP=(1.+ZA)
ZM=(1.-ZA)
ZQ=ZP*ZM
P3=1.-P1-P2
IF(NDF.NE.6) GO TO 15
F(1)=0.5*P1*ZM
F(2)=0.5*P2*ZM
F(3)=0.5*P3*ZM
F(4)=0.5*P1*ZP
F(5)=0.5*P2*ZP
F(6)=0.5*P3*ZP
FK(1,1)=0.5*ZM
FK(1,2)=0.0
FK(1,3)=-0.5*ZM
FK(1,4)=0.5*ZP
FK(1,5)=0.0
FK(1,6)=-0.5*ZP
FK(2,1)=0.0
FK(2,2)=0.5*ZM
FK(2,3)=-0.5*ZM
FK(2,4)=0.0
FK(2,5)=0.5*ZP
FK(2,6)=-0.5*ZP
FK(3,1)=-0.5*P1
FK(3,2)=-0.5*P2
FK(3,3)=-0.5*P3
FK(3,4)=0.5*P1
FK(3,5)=0.5*P2
FK(3,6)=0.5*P3

DO 10 K=1,NDF
DO 7 J=1,3
7 FK(J,K)=FK(J,K)
10 FC(K)=F(K)
IF(NDFC.EQ.NDF) RETURN
15 PA=4.*P1-1.
PB=4.*P2-1.
PC=4.*P3-1.
FKC(1,1)=0.5*(PA*Z4-Z6)

```

```

FKC(2,1)=0.0
FKC(1,2)=0.0
FKC(2,2)=0.5*(PH*ZM-ZG)
FKC(1,3)=0.5*(ZQ-ZM*PC)
FKC(2,3)=0.5*(ZQ-ZM*PC)
FKC(1,4)=0.5*(PA*ZP-ZQ)
FKC(2,4)=0.0
FKC(1,5)=0.0
FKC(2,5)=0.5*(PB*ZP-ZQ)
FKC(1,6)=0.5*(ZQ-PC*ZP)
FKC(2,6)=0.5*(ZQ-PC*ZP)
FKC(1,7)=2.*P2*ZM
FKC(2,7)=2.*P1*ZM
FKC(3,7)=-2.*P1*P2
FKC(1,8)=-2.*P2*ZM
FKC(2,8)=2.*ZM*(P3-P2)
FKC(3,8)=-2.*P2*P3
FKC(1,9)=2.*ZM*(P3-P1)
FKC(1,9)=2.*ZM*(P3-P1)
FKC(2,9)=-2.*P1*ZM
FKC(3,9)=-2.*P1*P3
FKC(1,10)=ZQ
FKC(2,10)=0.0
FKC(3,10)=-2.*ZM*P1
FKC(1,11)=0.0
FKC(2,11)=ZQ
FKC(3,11)=-2.*ZM*P2
FKC(1,12)=-ZQ
FKC(2,12)=-ZQ
FKC(3,12)=-2.*ZM*P3
FKC(1,13)=2.*P2*ZP
FKC(2,13)=2.*P1*ZP
FKC(3,13)=2.*P1*P2
FKC(1,14)=-2.*P2*ZP
FKC(2,14)=2.*ZP*(P3-P2)
FKC(3,14)=2.*P2*P3
FKC(1,15)=2.*ZP*(P3-P1)
FKC(2,15)=-2.*P1*ZP
FKC(3,15)=2.*P1*P3
PA=2.*P1-1.
PB=2.*P2-1.
PC=2.*P3-1.
FKC(3,1)=P1*(ZA-0.5*PA)
FKC(3,2)=P2*(ZA-0.5*PB)
FKC(3,3)=P3*(ZA-0.5*PC)
FKC(3,4)=P1*(ZA+0.5*PA)
FKC(3,5)=P2*(ZA+0.5*PB)
FKC(3,6)=P3*(ZA+0.5*PC)
FC(1)=0.5*P1*(P4*ZM-ZQ)
FC(2)=0.5*P2*(PB*ZM-ZQ)
FC(3)=0.5*P3*(PC*ZM-ZQ)
FC(4)=0.5*P1*(PA*ZP-ZQ)
FC(5)=0.5*P2*(PB*ZP-ZQ)
FC(6)=0.5*P3*(PC*ZP-ZQ)
FC(7)=2.*P1*P2*ZM
FC(8)=2.*P2*P3*ZM

```

```

FC(9)=2.*P1*P3*ZP
FC(10)=-1*ZP
FC(11)=P2*ZP
FC(12)=P3*ZP
FC(13)=2.*P1*P2*ZP
FC(14)=2.*P2*P3*ZP
FC(15)=2.*P1*P3*ZP
IF(ODFC.NE.ODF) RETURN
DO 20 K=1,ODFC
  DO 17 J=1,3
17 FK(J,K)=FKC(J,K)
20 F(K)=FC(K)
RETURN
END

SUBROUTINE PLFK3(PP,RR,SS,ODF,ODFC)
COMMON ZEL/ A(210),FK(3,20),FKC(3,20)
COMMON ZELN/ F(20),FC(20)
OO=1.-PP-RR-SS
DO 50 J=1,20
  DO 45 K=1,3
45 FKC(K,J)=0.0
  F(J)=0.0
50 FC(J)=0.0
  FK(1,1)=1.
  FK(2,2)=1.
  FK(3,3)=1.
  DO 70 K=1,3
70 FK(K,4)=-1.
  F(1)=PP
  F(2)=RR
  F(3)=SS
  F(4)=OO
  IF(ODFC.NE.4) GO TO 1
  DO 80 J=1,ODFC
  DO 75 K=1,3
75 FKC(K,J)=FK(K,J)
80 FC(J)=F(J)
RETURN
1 PA=4.*PP-1.
  PB=4.*RR-1.
  PC=4.*SS-1.
  PD=4.*OO-1.
  FKC(1,1)=PA
  FKC(1,4)=-PD
  FKC(2,2)=PB
  FKC(2,4)=-PD
  FKC(3,3)=PC
  FKC(3,4)=-PD
  PA=4.*PP
  PB=4.*RR
  PC=4.*SS
  PD=4.*OO
  FKC(1,5)=PB
  FKC(1,6)=PC
  FKC(1,7)=PD-PA

```

```

FKC(1,9)=-PC
FKC(1,10)=-PB
FKC(2,5)=PA
FKC(2,7)=-PA
FKC(2,8)=PC
FKC(2,9)=-PC
FKC(2,10)=PD-PB
FKC(3,6)=PA
FKC(3,7)=-PA
FKC(3,8)=PB
FKC(3,9)=PD-PC
FKC(3,10)=-PB
IF(NDFC=NDF) 3,2,3
2 DO 90 K=1,3
  DO 90 J=1,NDF
90 FK(K,J)=FKC(K,J)
  F(1)=PP*(2.*PP-1.)
  F(2)=RR*(2.*RR-1.)
  F(3)=SS*(2.*SS-1.)
  F(4)=QQ*(2.*QQ-1.)
  F(5)=PA*RR
  F(6)=PA*SS
  F(7)=PA*QQ
  F(8)=PB*SS
  F(9)=PC*QQ
  F(10)=PB*QQ
  DO 95 K=1,NDFC
95 FC(K)=F(K)
3 RETURN
END

```

```

SUBROUTINE SMPEB(ILE,NWS,IZOP,LNSS,WNS,LPO,X,Y,Z,S,RR)
DIMENSION ILE(1),NWS(1),NNS(1),X(1),Y(1),Z(1),S(1),RR(1)
COMMON /EL/ A(210)
COMMON /ELB/ F(20),FC(20),NWB(8),TO(8),ALFA(8)
COMMON /GAU/ WG(21),ZZ(3,21),IPG
NDFB=8
NDFB1=NDFB*(NDFB-1)/2+NDFB
DO 63 K=1,NDFB1
63 A(K)=0.
  IF(IZOP) 25,25,30
25 IA=NWB(8)
  IF(IA.NE.0) GO TO 27
  NDFB=3
  NDFBC=6
  IELEM=5
  GO TO 37
27 NDFB=4
  NDFBC=8
  IELEM=4
  GO TO 37
30 IA=NWB(7)
  IF(IA.EQ.0) GO TO 32
  NDFB=8

```

```

NDFBC=8
IELEM=4
GO TO 37
32 IA=NWB(5)
IF(IA.EQ.0) GO TO 34
NDFB=6
NDFBC=6
IELEM=5
GO TO 37
34 IA=NWB(4)
IF(IA.EQ.0) GO TO 35
NDFB=4
NDFBC=4
IELEM=4
GO TO 37
35 NDFB=3
NDFBC=3
IELEM=5
37 CALL NINT(IELEM)
DO 50 IG=1,IPG
WG2=WG(IG)
PP=ZZ(1,IG)
SS=ZZ(2,IG)
CALL BRZEG(NDFBC,NDFB,IELEM,PP,SS)
CALL PPP(NDFBC,NWB,X,Y,Z,POLE)
TOS=0.0
ALF=0.0
DO 40 K=1,NDFB
40 TOS=TOS+F(K)*TO(K)
IF(LPO.NE.0) GO TO 44
DO 42 K=1,NDFB
DO 42 K=1,NDFB
42 ALF=ALF+F(K)*ALFA(K)
44 CONTINUE
DO 47 K=1,NDFB
IW=NWB(K)
IF(LPO.NE.0) GO TO 46
DO 45 J=K,NDFB
LL=K+J*(J-1)/2
A(LL)=A(LL)+ALF*F(K)*F(J)*WG2*POLE
45 CONTINUE
GO TO 47
46 ALF=-1.0
47 RR(IW)=RR(IW)+ALF*F(K)*WG2*TOS*POLE
50 CONTINUE
IF(LPO.NE.0) RETURN
DO 60 J=1,NDFB
JW=NWB(J)
IF(JW) 60,60,4
4 IR=0
IF(LNSS) 7,7,5
5 DO 54 K=1,LNSS
IH=NNS(K)
IF(JW-IH) 7,6,6
6 IR=IR+J
54 CONTINUE

```



```

7  NQ=JW-IR
   IL=ILE(60)
   IL1=ILE(NQ+1)-1
   IF(IL.GT.IL1) GO TO 60
   DO 57 I=1,NDFB
   IW=NWB(I)
   IF(IW-J) 57,8,8
8  IR=0
   IF(LN55) 11,11,9
9  DO 53 K=1,LN55
   IH=IWS(K)
   IF(IW-IH) 11,10,10
10 IR=IR+J
53 CONTINUE
11 IW=IW-IR
   DO 55 K=IL,IL1
   IF(IWS(K)-IW) 55,12,55
55 CONTINUE
   GO TO 57
12 IF(J-1) 13,13,14
13 LL=J+I*(I-1)/2
   GO TO 15
14 LL=I+J*(J-1)/2
15 S(K)=S(K)+A(LL)
57 CONTINUE
60 CONTINUE
   RETURN
   END
SUBROUTINE PPP (NDFB,NWB,X,Y,Z,POLE)
DIMENSION NWB(1),X(1),Y(1),Z(1)
COMMON /EL/ A(210),FKC(3,20),FK(3,20)
X1=0.0
X2=0.0
Y1=0.0
Y2=0.0
Z1=0.0
Z2=0.0
DO 100 J=1,NDFB
IW=NWB(J)
IF(IW.EQ.0) GO TO 100
PA=FK(1,J)
PB=FK(2,J)
PC=X(IW)
X1=X1+PA*PC
X2=X2+PB*PC
PC=Y(IW)
Y1=Y1+PA*PC
Y2=Y2+PB*PC
PC=Z(IW)
Z1=Z1+PA*PC
Z2=Z2+PB*PC
100 CONTINUE
PA=Y1*Z2-Y2*Z1
PB=Z1*X2-X1*Z2
PC=X1*Y2-X2*Y1
POLE=SQRT(PA*PA+PB*PB+PC*PC)

```

```

IF(POLE.LE.1.E-30) GO TO 5
RETURN
5 WRITE(6,1000)
1000 FORMAT(1H0,31HNIEJEDNOZNACZNOSC TRANSFORMACJI)
STOP 07
END

```

```

SUBROUTINE BRZEG(NDFB,NDFBC,IELEM,RR,SS)
COMMON /EL/ A(210),FKC(3,20),FK(3,20)
COMMON /ELN/ FC(20),F(20)
DO 500 I=1,NDFB
DO 450 K=1,2
450 FK(K,1)=0.
F(I)=0.
500 FC(I)=0.
IF(IELEM.NE.4) GO TO 5
R1=1.-RR
R2=1.+RR
RK=1.-RR*RR
S1=1.-SS
S2=1.+SS
NK=1.-SS*SS
F(1)=0.25*R1*S1
F(2)=0.25*R2*S1
F(3)=0.25*RK*S2
F(4)=0.25*R1*S2
DO 530 K=1,4
530 FC(K)=F(K)
PC=0.25*S1
FK(1,1)=-PC
FK(1,2)=PC
PC=0.25*S2
FK(1,3)=PC
FK(1,4)=-PC
PC=0.25*NK
FK(2,1)=-PC
FK(2,4)=PC
PC=0.25*F2
FK(2,2)=-PC
FK(2,3)=PC
IF(NDFB.EQ.4) RETURN
F(5)=0.5*S1*NK
F(6)=0.5*R2*SK
F(7)=0.5*S2*RK
F(8)=0.5*R1*SK
F(1)=F(1)-0.5*(F(5)+F(6))
F(2)=F(2)-0.5*(F(5)+F(6))
F(3)=F(3)-0.5*(F(7)+F(8))
F(4)=F(4)-0.5*(F(7)+F(8))
FK(1,5)=-RR*S1
FK(2,5)=-0.5*RK
FK(1,7)=-RR*S2
FK(2,7)=0.5*RK
FK(1,6)=0.5*SK

```

```

FK(2,6)=-SS*RR2
FK(1,8)=-0.5*SK
FK(2,8)=-SS*RR1
DO 550 IN=1,2
FK(IN,1)=FK(IN,1)-0.5*(FK(IN,5)+FK(IN,6))
FK(IN,2)=FK(IN,2)-0.5*(FK(IN,5)+FK(IN,6))
FK(IN,3)=FK(IN,3)-0.5*(FK(IN,7)+FK(IN,6))
550 FK(IN,4)=FK(IN,4)-0.5*(FK(IN,7)+FK(IN,8))
IF(NDFB.NE.NDFBC) RETURN
DO 560 K=1,NDFB
560 FC(K)=F(K)
RETURN
5 QQ=1.-RR-SS
F(1)=RR
F(2)=SS
F(3)=QQ
FK(1,1)=1.
FK(1,3)=-1.
FK(2,2)=1.
FK(2,3)=-1.
DO 570 K=1,3
570 FC(K)=F(K)
IF(NDFB.EQ.3) RETURN
F(1)=RR*(2.*RR-1.)
F(2)=SS*(2.*SS-1.)
F(3)=QQ*(2.*QQ-1.)
F(4)=4.*RR*SS
F(5)=4.*SS*QQ
F(6)=4.*QQ*RR
FK(1,1)=4.*RR-1.
FK(1,3)=-4.*QQ+1.
FK(1,4)=4.*SS
FK(1,5)=-4.*SS
FK(1,6)=4.*(QQ-RR)
FK(2,2)=4.*SS-1.
FK(2,3)=-4.*QQ+1.
FK(2,4)=4.*RR
FK(2,5)=4.*(QQ-SS)
FK(2,6)=-4.*RR
IF(NDFB.NE.NDFBC) RETURN
DO 580 K=1,NDFB
580 FC(K)=F(K)
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE NINT(IELEM)
DIMENSION WA(3),ZA(3)
COMMON /GAU/ WG(21),ZZ(3,21),IPG
DO 10 K=1,21
WG(K)=0.0
DO 10 J=1,3
10 ZZ(J,K)=0.0
IF (IELEM=3) 11,20,30
11 IF (IELEM=2) 12,17,20

```

12 IPG=8

```
IPH=2
WA(1)=1.
WA(2)=1.
ZA(1)=-0.5773502692
ZA(2)=0.5773502692
IP=1
DO 15 K=1,IPH
W1=WA(K)
PA=ZA(K)
DO 15 J=1,IPH
W2=WA(J)
PB=ZA(J)
DO 15 M=1,IPH
WG(IP)=W1*W2*WA(M)
ZZ(1,IP)=ZA(M)
ZZ(2,IP)=PB.
ZZ(3,IP)=PA
IP=IP+1
```

15 CONTINUE

RETURN

17 IPG=6

```
IPH=3
PC=0.5773502692
DO 18 K=1,IPG
```

18 WG(K)=1./6.

```
DO 19 J=1,2
```

```
DO 19 K=1,IPH
```

```
KJ=K+(J-1)*IPH
```

```
ZZ(1,KJ)=0.5
```

```
ZZ(2,KJ)=0.5
```

```
ZZ(3,KJ)=PC
```

```
IF (KJ.LT.4) ZZ(3,KJ)=-PC
```

19 CONTINUE

```
ZZ(1,2)=0.
```

```
ZZ(2,3)=0.
```

```
ZZ(1,5)=0.
```

```
ZZ(2,6)=0.
```

RETURN

20 IPG=4

```
PC=0.13819660
```

```
DO 25 K=1,IPG
```

```
WG(K)=0.25/6.
```

```
DO 25 J=1,3
```

25 ZZ(J,K)=PC

```
PC=0.58541020
```

```
DO 27 K=1,3
```

27 ZZ(K,K)=PC

RETURN

30 IF (IELEM-4) 32,32,40

32 IPG=9

```
IPH=3
```

```
ZA(1)=-0.77459666924
```

```
ZA(2)=0.0
```

```
ZA(3)=0.77459666924
```

```
WA(1)=0.55555556
WA(2)=0.88888889
WA(3)=0.55555556
IP=1
DO 35 K=1,IPH
W1=WA(K)
PA=ZA(K)
DO 35 J=1,IPH
WG(IP)=W1*WA(J)
ZZ(1,IP)=ZA(J)
ZZ(2,IP)=PA
IP=IP+1
35 CONTINUE
RETURN
40 IPG=7
WG(1)=9./40.
PC=1./15.
WG(2)=PC
WG(3)=PC
WG(4)=PC
PC=1./40.
WG(5)=PC
WG(6)=PC
WG(7)=PC
ZZ(1,1)=1./3.
ZZ(2,1)=1./3.
ZZ(1,2)=0.5
ZZ(1,3)=0.5
ZZ(2,3)=0.5
ZZ(2,4)=0.5
ZZ(1,6)=1.
ZZ(2,7)=1.
RETURN
END
```

```
SUBROUTINE MESS(N,NOF,LNSS,NNS1
DIMENSION NNS(1),R(1)
IF(LNSS.EQ.0) RETURN
NOF1=NOF-1
IP=0
DO 10 K=1,LNSS
L=NNS(K)
LA=L-IP
PC=R(LA)
IF(LA.GT.NOI1) RETURN
DO 5 M=LA,NOF1
5 R(M)=R(M+1)
R(NOF)=PC
IP=IP+1
10 CONTINUE
RETURN
END
```

```

SUBROUTINE EXPAND (P,NOF,LNBS,NBS)
DIMENSION NBS(1),R(1)
IF(LNBS.EQ.0) RETURN
NA=NOF-LNBS
DO 10 K=1,LNBS
L=NBS(K)
A1=A+A
A2=A1-1
PC=R(L)
R(L)=R(N1)
L1=L+1
IF(L1.EQ.1,1,2)
1 DO 5 N=L1,M2
P=R(N)
Q(N)=PC
PC=P
5 CONTINUE
2 R(M1)=PC
10 CONTINUE
RETURN
END

```

```

SUBROUTINE GSIS(NEQ,ITEM,ILE,NCYC,RELAX,TOL,DIS,A,B,R,NO)
DIMENSION A(1),ITEM(1),R(1),ILE(1),B(1),DIS(1)
DO 320 M=1,NEQ
IL=ILE(M)
IF(A(IL).EQ.0.) A(IL)=1./A(IL)
320 CONTINUE
3 CONTINUE
DO 500 NC=1,NCYC
SUM=.0
SUMD=.0
DO 470 N=1,NEQ
470 R(N)=B(N)

DO 450 M=1,NEQ
IL=ILE(M)
IL1=IL+1
IL2=ILE(N+1)-1
IF(IL2.LT.IL1) GO TO 2
DO 330 M=IL1,IL2
IW=ITEM(M)
330 R(N)=R(N)-A(M)*DIS(IW)
2 DX=A(IL)*R(N)-DIS(N)
DIS(N)=DIS(N)+DX*RELAX
IF(IL2.LT.IL1) GO TO 4

DO 350 M=IL1,IL2
IW=ITEM(M)
350 R(IW)=R(IW)-A(M)*DIS(N)
4 CONTINUE
SUM=SUM+ABS(DX)
SUMD=SUMD+ABS(R(N))

```

```

450 CONTINUE
   ND=NC
   5 IF (SUM.LT.SUMD*TOL) GO TO 550
500 CONTINUE
550 CONTINUE
   DO 600 N=1,NEQ
600 R(N)=DIS(N)
   RETURN
   END

```

```

SUBROUTINE CHANI (LE,LW,NOF,NDFM,NDFCM,NOP,LNSS,NNS,ISTER,X,Y,
*
  R,IA,IB,I)
  DIMENSION NOP(NDFCM,1),NNS(1),R(1),X(1),Y(1),Z(1),IA(1),IB(1)
  IF (ISTER) 15,5,15
  5 I=1
  J=1
  DO 50 N=1,LW
  DO 40 L=1,LE
  LSE=4
  IF (NDFM-6) 9,7,8
  7 LSE=6
  IF (NOP(11,L).EQ.0) LSE=4
  GO TO 9
  8 LSE=8
  IF (NOP(16,L).EQ.0) LSE=6
  IF (NOP(11,L).EQ.0) LSE=4
  9 DO 40 K=1,LSE
  IW=IABS(NOP(K,L))
  IF (IW=N) 40,10,40
  40 CONTINUE
  IF (N.GT.NOF) GO TO 50
  IA(I)=N
  I=I+1
  GO TO 50
  10 IF (N.LE.NOF) GO TO 50
  IB(J)=N
  J=J+1
  50 CONTINUE
  I=I-1
  IF (I.EQ.0) RETURN
  DO 80 N=1,I
  ID=IA(N)
  IG=IB(N)
  PC=X(ID)
  X(ID)=X(IG)
  X(IG)=PC
  PC=Y(ID)
  Y(ID)=Y(IG)
  Y(IG)=PC
  PC=Z(ID)
  Z(ID)=Z(IG)
  Z(IG)=PC
  DO 75 L=1,LE
  DO 75 K=1,NDFCM
  IW=NOP(K,L)

```

```

      IF (IA.EQ.ID) NOP(K,L)=IG
      IF (JB.EQ.IG) NOP(K,L)=ID
75  CONTINUE
80  CONTINUE
15  IF (LNSS) 20,20,16
16  IF (ISTER) 18,17,18
17  DO 90 N=1,I
      ID=IA(N)
      IG=IB(N)
      DO 85 L=1,LNSS
        I#=NNS(L)
        IF (IN.EE.IG) GO TO 85
        NNS(L)=ID
        PC=R(ID)
        R(ID)=R(IG)
        R(IG)=PC
85  CONTINUE
90  CONTINUE
18  DO 100 J=1,LE
      DO 100 L=1,NDFM
        IN=NOP(L,J)
        DO 95 K=1,LNSS
          IF (NNS(K)-IW) 95,19,95
95  CONTINUE
        GO TO 100
19  NOP(L,J)=-IW
100 CONTINUE
20  RETURN
    END

```

```

SUBROUTINE CHAN2(L,IA,IB,R,X,Y,Z)
DIMENSION IA(1),IB(1),R(1),X(1),Y(1),Z(1)
IF(L.EQ.0) RETURN
DO 10 K=1,L
  ID=IA(K)
  IG=IB(K)
  PC=R(ID)
  R(ID)=R(IG)
  R(IG)=PC
  PC=X(ID)
  X(ID)=X(IG)
  X(IG)=PC
  PC=Y(ID)
  Y(ID)=Y(IG)
  Y(IG)=PC
  PC=Z(ID)
  Z(ID)=Z(IG)
10  Z(IG)=PC
  RETURN
END

```


BIBLIOGRAFIA

- [1] O. C. Zi en k i e w i c z: Metoda elementów skończonych. Arkady, Warszawa 1972.
- [2] J. B a n a s z e k: O pewnym sposobie zbierania symetrycznych macierzy rzadkich w metodzie elementów skończonych. Biuletyn Informacyjny ITC, Nr 51, 1978.
- [3] J. P a k l e z a: O pewnej metodzie badania przestrzennego rozkładu temperatur w łopatkach turbin gazowych. Praca doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1965.
- [4] A. P r ó c h n i a k: Analiza procesu przewodzenia ciepła w ośrodku ziarnistym z uwzględnieniem obecności cieczy w strefie kontaktowej. Praca doktorska, Politechnika Warszawska, Warszawa 1983.
- [5] J. B a n a s z e k, A. P r ó c h n i a k: Numeryczny model wilgotnego ośrodka ziarnistego przewodzącego ciepło. Materiały Sympozjum Wymiany Ciepła i Masy, Jabłonka k. Warszawy 1983.
- [6] B. S t a n i s z e w s k i, J. B a n a s z e k, A. D e b s k a, W. K o w a l i k: Numeryczna analiza pola temperatury w trójwymiarowej geometrii tłoka silnika spalinowego. Przyjęte do publikacji w Archiwum Termodynamiki.

**ПРОГРАММА МЕТОДА КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ ДЛЯ
СТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ В ТРЕХМЕРНЫХ
ГЕОМЕТРИЧЕСКИ СЛОЖНЫХ ОБЛАСТЯХ**

К р а т к о е с о д е р ж а н и е

В работе приводится модель, алгоритмы и программа метода конечных элементов для стационарных задач теплопроводности в гетерогенных и анизотропных средах. Уравнения модели, основанные на методе Галеркина, записываются в общей форме в любой ортогональной системе криволинейных координат. В построении алгоритма программы используются специальные экономные техники составления симметричных редких матриц. Дается также подробное описание организации программы и принцип ее применения. Практическая пригодность этой программы иллюстрируется тремя примерами решения задач установленной теплопроводности в геометрически сложных областях.

A FINITE ELEMENT PROGRAM FOR STEADY-STATE HEAT CONDUCTION PROBLEMS IN COMPLEX THREE-DIMENSIONAL GEOMETRY

S u m m a r y

The paper is concerned with the finite element model and computer program for steady - state inhomogeneous and anisotropic heat conduction problems. FEM equations based on the Galerkin orthogonalization technique are established in general form referred to any orthogonal curvilinear system of global coordinates. The considerable saving of computer storage is achieved due to using the effective technique of storing sparse symmetric matrices. Description of the program organization is presented along with concise instructions for possible users. Eventually three illustrative technical problems dealt with complex geometry are solved to demonstrate usefulness of the presented program.

Rękopis dostarczono w październiku 1983 r.