

Krzysztof Karaśkiewicz

Instytut Techniki Ciepłej PW

ALGEBRAICZNE MODELE WARSTWY PRZYŚCIENNEJ NA WIRUJĄCEJ TARCZY

W pracy dokonano oceny najbardziej charakterystycznych modeli algebraicznych trójwymiarowej warstwy przyściennej. Zbadano ich przydatność do opisu zjawisk hydromechanicznych na wirującej tarczy. Porównano najczęściej stosowane modele i zaproponowano własny.

WYKAZ OZNACZEŃ

- C_E - stała rozkładu logarytmicznego
 $k = V_\varphi(r, s/2)/V_\varphi^W(r)$ - współczynnik krążenia
 l - długość drogi mieszania
 P - ciśnienie uśrednione w czasie
 r, φ, z - współrzędne w układzie walcowym
 r_t - promień zewnętrzny tarczy
 s - odległość między wirującą tarczą i nieruchomą osłoną
 v - wypadkowa prędkość chwilowa w przepływie burzliwym
 $V = \frac{1}{T} \int_{t-\frac{T}{2}}^{t+\frac{T}{2}} v dt$ - wypadkowa prędkość uśredniona po czasie
 V_φ - składowa obwodowa prędkości
 V_r - składowa promieniowa prędkości
 V_z - składowa osiowa prędkości
 V_φ^W - prędkość wirowania ścianki
 $\Delta V_\varphi = V_\varphi^W - V_\varphi$ - składowa obwodowa prędkości względnej

- V_i - i -ta składowa prędkości we współrzędnych kartezjańskich
 $V_r = \sqrt{\tau^W/\rho}$ - prędkość dynamiczna
 $V_r^+ = V_r/V_\tau$ - bezwymiarowa składowa promieniowa prędkości
 x_1 - współrzędna układu kartezjańskiego w kierunku wektora τ^W
 x_2 - współrzędna układu kartezjańskiego w kierunku prostopadłym do wektora τ^W równoległa do ścianki
 y - odległość od ścianki we współrzędnych kartezjańskich
 z - odległość od ścianki we współrzędnych walcowych ($z = y$)
 z^+ - zV_τ/ν - bezwymiarowa odległość od ścianki
 α - stała Karmana
 ρ - gęstość płynu
 ν - lepkość kinematyczna płynu
 $\tau_{ij} = -\rho \overline{v'_i v'_j}$ naprężenia Reynoldsa
 τ^W - całkowite naprężenia na ściance
 τ_i^W - i -ta składowa naprężeń na ściance
 $\tau_{\varphi z}^W$ - składowa obwodowa naprężeń na wirującej tarczy
 τ_{rz}^W - składowa promieniowa naprężeń na wirującej tarczy
 $\overline{\tau}_{rz} = \frac{1}{z} \int_0^z \tau_{rz} dz$ - składowa promieniowa naprężeń średnich

1. WSTĘP

Zagadnienie modelowania warstwy przyściennej na wirującej tarczy pojawia się przy projektowaniu maszyn wirnikowych, takich jak np. pompy, sprężarki, turbiny wodne, sprzęgła i przekładnie hydrokinetyczne, turbiny gazowe, młyny do mas celulozowo-papierniczych itp. W większości przypadków pracy tych urządzeń przepływ ma charakter burzliwy. Jeżeli do opisu takiego przepływu stosuje się dwuparametrowe modele turbulencji, jak np. $k-\varepsilon$, bądź bardziej wyrafinowane oparte na równaniach

bilansu naprężeń Reynoldsa, trzeba określić sposób modelowania warstwy przyściennej.

W praktyce obliczeniowej wykorzystywane są dwie metody. W obszarze przejściowym warstwy przyściennej i jego bliskim sąsiedztwie zmiany wielkości hydromechanicznych są największe. Aby osiągnąć pożądaną dokładność obliczeń, można zastosować bardzo gęstą siatkę. W modelach turbulencji musi być wtedy uwzględniony dodatkowo wpływ lepkości molekularnej (laminarnej) porównywalnej tutaj z turbulentną. Oba te zabiegi znacznie wydłużają czas obliczeń i stawiają duże wymagania jeśli chodzi o pamięć komputera.

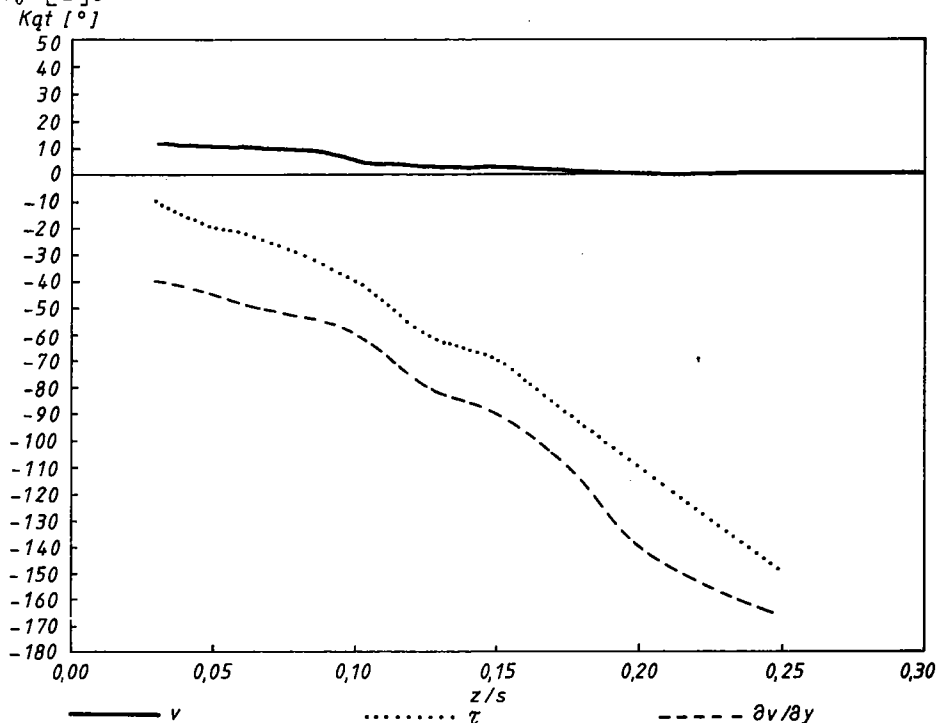
Alternatywą jest zastosowanie rzadkiej siatki, z węzłami tylko w obszarze w pełni rozwiniętej turbulencji i niewielkich gradientów wielkości hydromechanicznych. Część warstwy przyściennej leżąca między ścianką a najbliższym węzłem jest wtedy opisywana za pomocą funkcji przyściennych (wall functions). Są to zależności algebraiczne wiążące, w przypadku równań pędu, pole prędkości z naprężeniami na ściankach. Dla dwuwymiarowych warstw przyściennych funkcje przyścienne są prostymi i dobrze znanymi rozkładami bądź potęgowymi, bądź logarytmicznymi. Jeżeli stosuje się rozkład logarytmiczny, to można pokazać [7, 10], że składowe prędkości dadzą się opisać zależnością

$$V_i = \frac{\tau_i}{\rho g V_\tau} \ln C_E \frac{y V_\tau}{\nu}, \quad i = 1, 2 \quad (1.1)$$

Ta zależność opiera się na założeniu, że kierunek wektora prędkości w przekroju warstwy jest stały, tj. $\tau_1^W/\tau_2^W = V_1/V_2 = \text{const}$, jednocześnie składowe gradientu prędkości są w stałej proporcji, tj. $\tau_1^W/\tau_2^W = \partial V_1/\partial y/\partial V_2/\partial y = \text{const}$.

W przestrzeniach przywirnikowych pomp wirowych mamy do czynienia z ciśnieniowymi (pressure-driven) trójwymiarowymi warstwami przyściennymi. W takich warstwach kierunki wektorów naprężeń stycznych, prędkości (względnej) i gradientu prędkości [4, 8] nie pokrywają się, lecz znacznie różnią, przy czym nachylenie wektora naprężeń stycznych $\gamma_\tau = \text{arctg}(\tau_{rz}/\tau_{\varphi z})$ jest większe od nachylenia wektora prędkości $\gamma_V = \text{arctg}(V_r/\Delta V_\varphi)$ i

mniejsze od nachylenia wektora gradientu prędkości $\gamma_\delta = \arctg(\partial V_r/\partial z/\partial V_\varphi/\partial z)$. Na rysunku 1.1 pokazane są kąty nachylenia wymienionych wektorów dla przepływu na wirującej w osłonie tarczy ($r/r_t = 0,8$, $s/r_t = 0,08$). Dane pochodzą z pracy [8].



Rys.1.1. Kąty nachylenia wektorów: prędkości, naprężenia tnącego i deformacji prędkości w warstwie przyściennej na wirującej tarczy

W przypadku takich przepływów rozkłady prędkości nie dają się opisać znanymi zależnościami charakterystycznymi dla dwuwymiarowych warstw przyściennych, ponieważ na kształt profili składowych równoległych prędkości ma wpływ ta trzecia składowa normalna do ścianki, związana z istnieniem przepływów wtórnych. Uwzględnienie jej w równaniach pędu opisujących warstwę przyścienną uniemożliwia otrzymanie rozwiązań analitycznych bez poczynienia szeregu założeń upraszczających.

Mimo pesymizmu niektórych badaczy, co do możliwości stworzenia funkcji przyściennych dla warstwy trójwymiarowej, po-

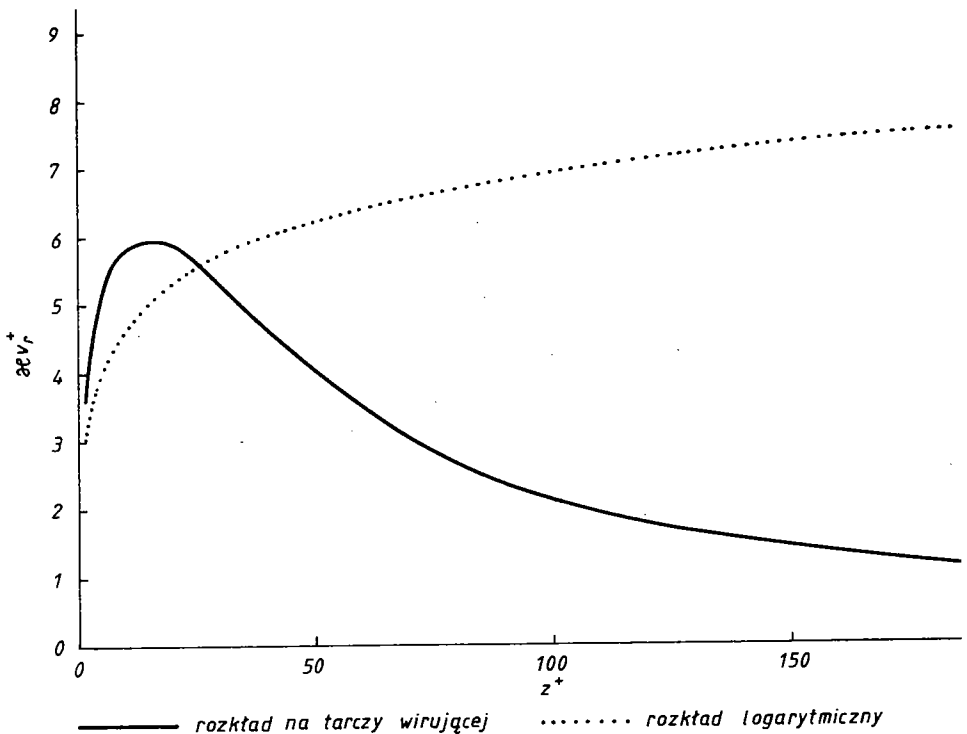
dejmowane są próby budowania zależności algebraicznych, drogą bądź licznych uproszczeń, bądź korekcji znanych rozkładów dla warstwy dwuwymiarowej. W związku z tym dają się wyróżnić dwie metody: analityczna i półempiryczna.

2. METODA ANALITYCZNA

Metoda analityczna nie była wykorzystywana do opisu warstwy przyściennej na wirującej tarczy. Stosowano ją jednak w zagadnieniach zbliżonych. Dlatego wymaga ona omówienia. Metoda ta jest reprezentowana np. przez van den Berga [2, 3] i R y h m i n g a i F a n n e l o p a [13] (przegląd modeli sprzed 1975 r. zawarty jest w pracy P i e r c e'a [12]). Podejście to polega na rozwiązaniu równań pędu, w których składowa prędkości normalna do ścianki określana jest z równania ciągłości, zaś związek między naprężeniami a polem prędkości jest wyprowadzony na podstawie hipotezy drogi mieszania Prandtla:

$$\tau_{ij} = \rho l^2 \sqrt{\left(\frac{\partial v_i}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial v_j}{\partial y}\right)^2} \frac{\partial v_i}{\partial y} \quad (2.1)$$

Długość drogi mieszania określa znana funkcja liniowa $l = \alpha y$. Taka prosta funkcja jest wygodna przy całkowaniu równań pędu, jednakże jest mało dokładna. Dodatkową słabością metody analitycznej jest konieczność założenia profili składowych prędkości równoległych do ścianki aby określić naprężenia na ściance. Zazwyczaj przyjmuje się profil logarytmiczny, chociaż przynajmniej jedna składowa związana z recyrkulacją ma profil wyraźnie się od niego różniący. Na rysunku 2.1 pokazano rozkład składowej promieniowej prędkości na wirującej tarczy i dla porównania typowy rozkład prędkości powstający przy opływie powierzchni nieruchomej.



Rys.2.1. Typowy rozkład V_r na wirującej tarczy

Jak wykazują pomiary [1, 5, 8, 11], dla przepływów, w których ruch promieniowy jest wymuszony tylko wirowaniem tarczy, V_r ma swoje maksimum bardzo blisko ścianki i w dalszej części warstwy maleje do zera. Również w układzie współrzędnych lokalnych, jakich często używa się w tej metodzie, składowa normalna prędkości na wirującej tarczy ma rozkład znacznie odbiegający od logarytmicznego.

Kolejne założenia czynione w metodzie analitycznej to niewielkie zmiany naprężeń Reynoldsa w przekroju poprzecznym warstwy w porównaniu z wartością naprężeń na ściance lub znany, zazwyczaj liniowy ich rozkład. I te założenia są trudne do utrzymania w świetle eksperymentów [6, 8]. Otrzymane metodą analityczną funkcje przyścienne, jakkolwiek poprawniejsze od stosowanych do opisu warstwy dwuwymiarowej, są jeszcze mało dokładne [13], przy tym są bardzo skomplikowane, również ze

względem na niewygodne współrzędne lokalne. Przykładem takich funkcji mogą być zależności otrzymane przez van den Berga [2]:

$$v_{x1}^+ = \frac{1}{x} \left[\ln y^+ + a + \frac{1}{2} \alpha_{x1} y^+ + \frac{1}{2} \beta_{x1} \frac{(\ln y^+)^2 y^+}{x^2} \right] \quad (2.2)$$

$$v_{x2}^+ = \frac{1}{x} \left[\alpha_{x2} (y^+ + b) + \beta_{x2} \frac{(\ln y^+)^2 y^+}{x^2} \right]$$

Opis użytych współczynników α_{x1} , β_{x1} , α_{x2} , β_{x2} , oraz wartości przyjętych stałych a, b zostały zamieszczone w Dodatku.

3. METODA PÓLEMPIRYCZNA

Alternatywne podejście przy formułowaniu funkcji przyściennych polega na korygowaniu rozkładów w warstwach dwuwymiarowych za pomocą odpowiednio dobranych funkcji. Tak otrzymane związki są zazwyczaj bardzo proste i zapewniają stabilność algorytmu numerycznego. W niniejszej pracy skoncentrowano się na metodzie półempirycznej. Porównano trzy najbardziej reprezentatywne dla tej klasy funkcje przyścienne i zaproponowano bardzo prostą, nową. Pierwszą zbadaną zależnością była użyta przez K u r o k a w ę i innych [11]. Autorzy ci przyjęli rozkłady:

$$\frac{\Delta V_\varphi}{\sqrt{\tau_{\varphi z}^w/g}} = \frac{1}{x} \ln C_E \frac{z \sqrt{\tau_{\varphi z}^w/g}}{\nu} \quad (3.1)$$

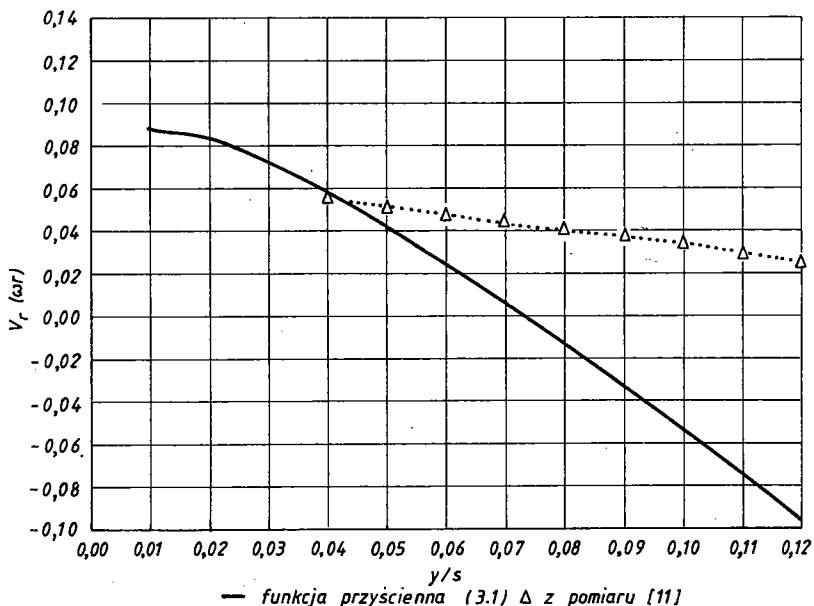
$$\frac{v_r}{\sqrt{\tau_{rz}^w/g}} = \frac{f(z)}{x} \ln C_E \frac{z \sqrt{\tau_{rz}^w/g}}{\nu}$$

Funkcja korekcyjna $f(z)$ została przyjęta tak, jak u Karmana jako zależność liniowa typu $f(z) = c \left(1 - \frac{z}{\delta}\right)$, z ustaloną empirycznie stałą $c = \left(\frac{\tau_{rz}^w}{\tau_{\varphi z}^w}\right)^{1/2} = 0,612$. Grubość warstwy przyściennej autorzy określili na podstawie propozycji D a i l y ' e g o i innych

$$\delta = \frac{\alpha(1-k)^2 r}{(rV_{\varphi}^w/\nu)^{1/5}} \quad (3.2)$$

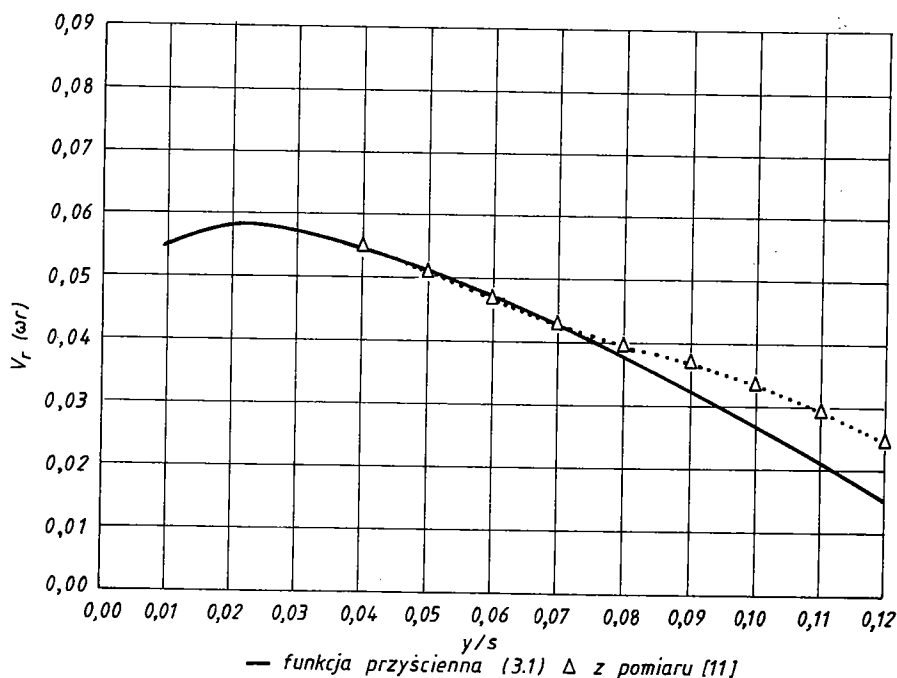
gdzie $\alpha = 0,4$.

Rozkład $V_r(z)$ określony zależnością (3.1) został obliczony w niniejszej pracy na podstawie danych empirycznych zamieszczonych w [11]. Ustalono, na podstawie znajomości rozkładu zmierzonego V_r i obliczonej wartości δ , wielkość składowej τ_{rz}^w naprężeń na ścianie. Do tego celu wybrano arbitralnie punkt pomiarowy $z/s = 0,042$ możliwie blisko ścianki. Na rysunku 3.1 pokazany jest rozkład V_r zmierzony [10] i obliczony na podstawie funkcji przyściennej (3.1). Widać dużą róż-



Rys.3.1. Rozkład V_r na podstawie zależności (3.1)

nicę w nachyleniu obu krzywych. Trzeba zaznaczyć, że otrzymana ze wzoru (3.2) wartość δ jest mniejsza od zmierzonej. Dwukrotne powiększenie δ do wartości $\delta = 0,15$ s prowadzi do znacznie bardziej poprawnego rozkładu (rys.3.2). Ta nowa war-



Rys.3.2. Rozkład V_r po korekcji wartości δ

tość δ jest też bliższa wartości wynikającej z pomiarów i wynoszącej $\delta \cong 0,2$ s. Wydaje się, że słabą stroną zaproponowanej przez autorów [11] funkcji przyściennej jest mała dokładność, z jaką można określić δ . Na podstawie danych pomiarowych można oczekiwać, że będzie ona dodatkowo funkcją odległości s między powierzchniami: wirującej tarczy i nieruchomej obudowy.

Drugą funkcją przyścienną, jaką zbadano, była wprowadzona przez Karmana zależność oparta na rozkładzie potęgowym, z pewnymi modyfikacjami stosowana przez wielu autorów. Testowana była funkcja przyścienna proponowana przez Dally, Nece'a [5]

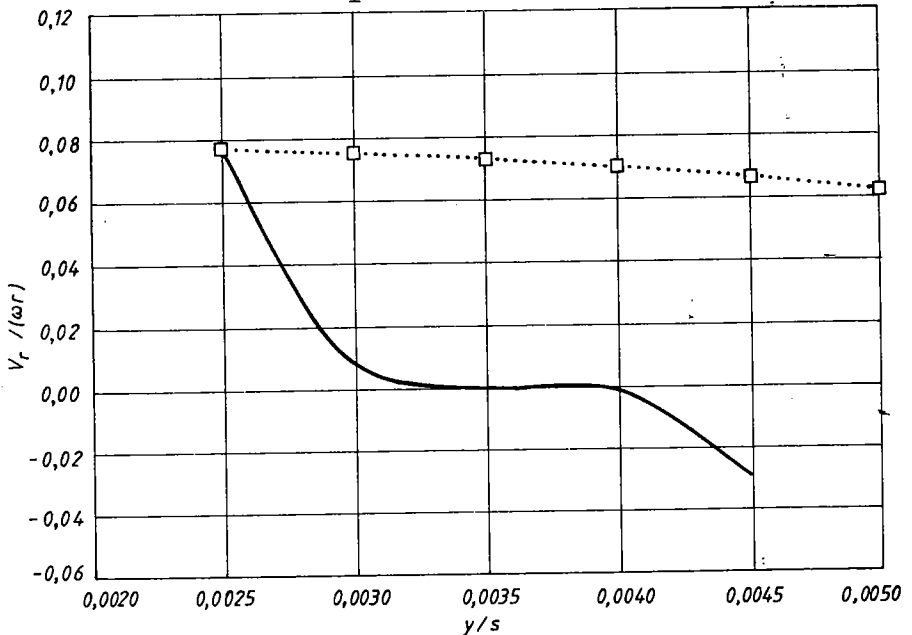
$$V_r = f(r, z) \left(\frac{z}{\delta}\right)^{1/7} \quad (3.3)$$

$$\Delta V_\varphi = V_\varphi \left(r, \frac{s}{2}\right) \left(\frac{z}{\delta}\right)^{1/7}$$

gdzie funkcja korekcyjna $f(r, z)$ wynosiła

$$f(r, z) = A_r \left(1 - \frac{z}{\delta}\right)^4 \quad (3.4)$$

W metodzie stosowanej w pracy [5] $A_r(r)$ było niewiadomą funkcją tylko promienia r wyznaczaną z uproszczonych równań pędu. Podobnie wyznaczano $\delta(r)$ – grubość warstwy przyściennej. W przeprowadzonym teście, ze względu na znajomość rozkładów zmierzonych V_r, V_φ , można było łatwo określić dla ustalonego w pomiarach [5] promienia r wartości funkcji $A_r, V_\varphi(s/2), z/\delta$ i tym samym obliczyć rozkład składowej promieniowej V_r prędkości (przyjęto za punkt odniesienia z/δ ten, na podstawie którego określono A_r). Jak wynika z rys.3.3, otrzymany



— funkcja przyścienne (3.4) □ z pomiaru [5]
Rys.3.3. Rozkład V_r na podstawie zależności (3.4)

rozkład pokrywa się dość słabo ze zmierzonym. Istotnym mankamentem funkcji przyściennej wymagających znajomości grubości warstwy przyściennej δ jest, jeśli korzysta się z metody $k-\varepsilon$ lub porównywalnej, brak możliwości dokładnego określenia wartości δ . W trakcie kolejnych iteracji granica między rdzeniem turbulentnym a warstwą przyścinną wciąż ulega zmianie, nie można więc wyznaczyć δ_{99} . Pozostaje tylko korzystanie z formuł empirycznych, które są mało dokładne.

Jako trzecią sprawdzono metodę zastosowaną przez S p a l d i n g a w pracy [15] i wykorzystaną później przez innych autorów [9, 14] do obliczeń przepływów z dużym dodatnim gradientem ciśnienia:

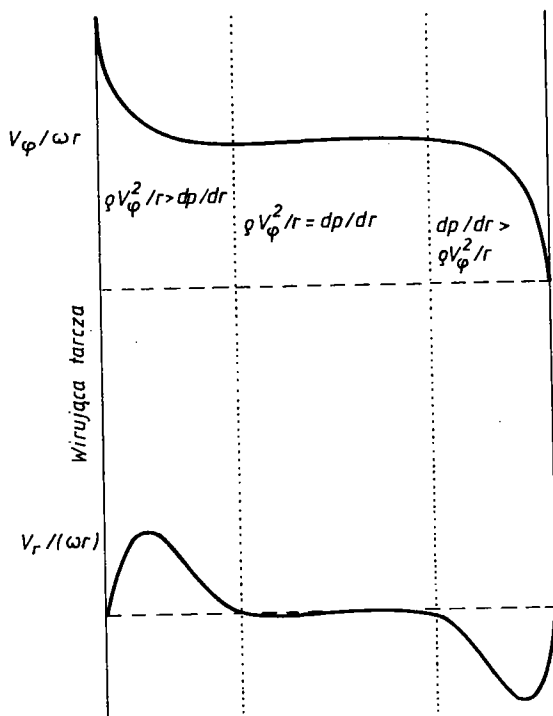
$$\frac{V_r}{\sqrt{\tau_{rz}^w/\rho}} = \frac{1}{\kappa} \ln C_E \frac{z(\overline{\tau_{rz}}/\rho)^{1/2}}{\nu} \quad (3.5)$$

Otrzymane w wyniku testu rozkłady były mniej dokładne od poprzednich. Może to wynikać z faktu, że zależność (3.5) była właściwie przystosowana do obliczeń przepływu płaskiego.

4. PROPOZYCJA WŁASNA FUNKCJI PRZYŚCIENNEJ

W przypadku tarcz wirujących w osłonach, oprócz wpływu składowej prędkości V_z normalnej do powierzchni, na rozkład składowej promieniowej V_r ma wpływ również proporcja między siłą odśrodkową $\rho \frac{V_\varphi^2}{r}$ a stabilizującym działaniem sił ciśnienia $\frac{dP}{dr}$. Na rysunku 4.1 przedstawiono schematycznie podział obszaru przepływowego na strefy. W warstwie przyściennej przy wirującej tarczy dominuje siła odśrodkowa i ona wymusza ruch cząstek płynu na zewnątrz. W miarę przesuwania się w kierunku rdzenia turbulentnego siła ta maleje, ponieważ maleje składowa obwodowa V_φ prędkości i w samym rdzeniu pojawia się rów-

nowąga między siłą odśrodkową i ciśnienia. Wreszcie przy nieruchomej tarczy dominuje $\frac{dP}{dr}$ i ruch cząstek płynu zaczyna odbywać się w kierunku dośrodkowym.



Rys.4.1. Schemat przepływu między wirującą tarczą i nieruchomą obudową

Uzależnienie funkcji przyściennych od wartości średniej naprężenia $\overline{\tau_{rz}}$ pozwala wykorzystać mechanizm działania tych dwóch sił, co zostanie pokazane w dalszej części. Ponadto wartość $\overline{\tau_{rz}}$ można stosunkowo łatwo i dokładnie wyznaczyć korzystając z uproszczonego równania składowej promieniowej pędu. Ograniczając się do obszaru pomijalnie małych wartości V_z ($V_r^2 \ll V_\varphi^2$) otrzymamy równanie składowej promieniowej pędu w postaci:

$$\tau_{rz} = \tau_{rz}^w - \int_0^z \left(\rho \frac{V_\varphi^2}{r} - \frac{dP}{dr} \right) dz \quad (4.1)$$

Całka jest funkcją rosnącą, a zatem naprężenia całkowite τ_{rz} będą malały w miarę oddalania się od wirującej tarczy. Pomiarzy τ_{rz} na wirującej tarczy [6] potwierdzają takie właśnie zachowanie.

W celu skonstruowania funkcji przyściennej dla kierunku promieniowego została wykorzystana idea z pracy [15]: jeśli naprężenia Reynoldsa nie są stałe w poprzek warstwy przyściennej, należy posłużyć się naprężeniami średnimi. Pomysł ten został jednak całkowicie odmiennie wykorzystany. Na początku zostały sprawdzone funkcje przyścienne w postaci:

$$V_r = \frac{f(z)\tau_{rz}^w}{\alpha\varrho V_r} \ln C_E \frac{zV_r}{\nu} \quad (4.2)$$

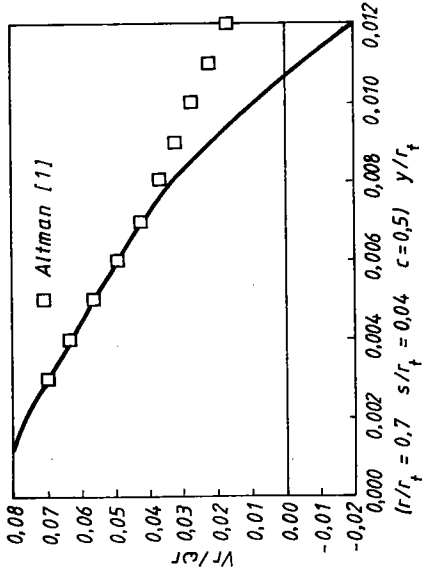
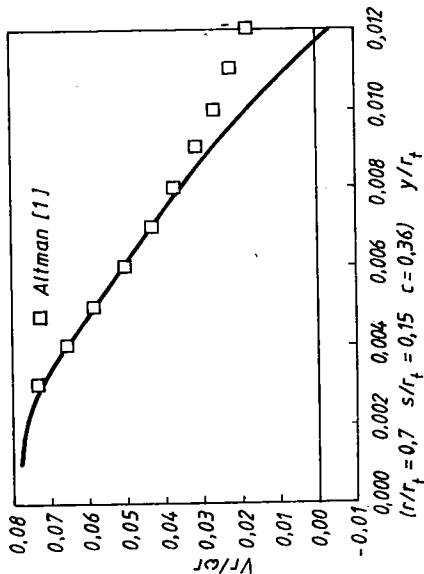
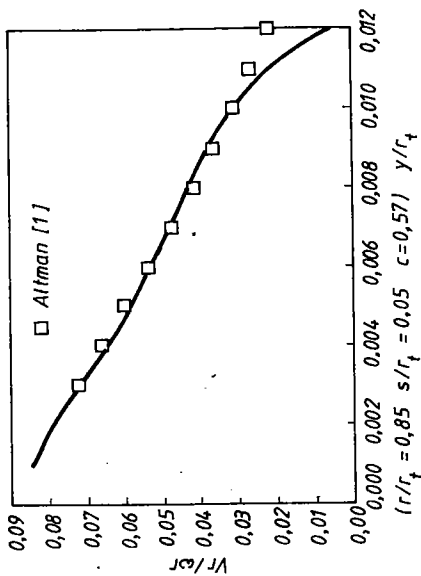
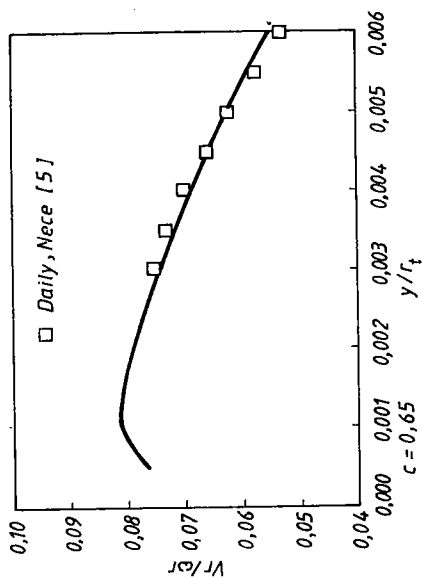
$$\Delta V_\varphi = \frac{\tau_{\varphi z}^w}{\alpha\varrho V_r} \ln C_E \frac{zV_r}{\nu}$$

z najprostszą funkcją korekcyjną typu $f(z) = c \frac{\tau_{rz}^w}{\tau_{rz}^w}$. Założono na początku, że stała $c = 1$. Naprężenia średnie wynosiły

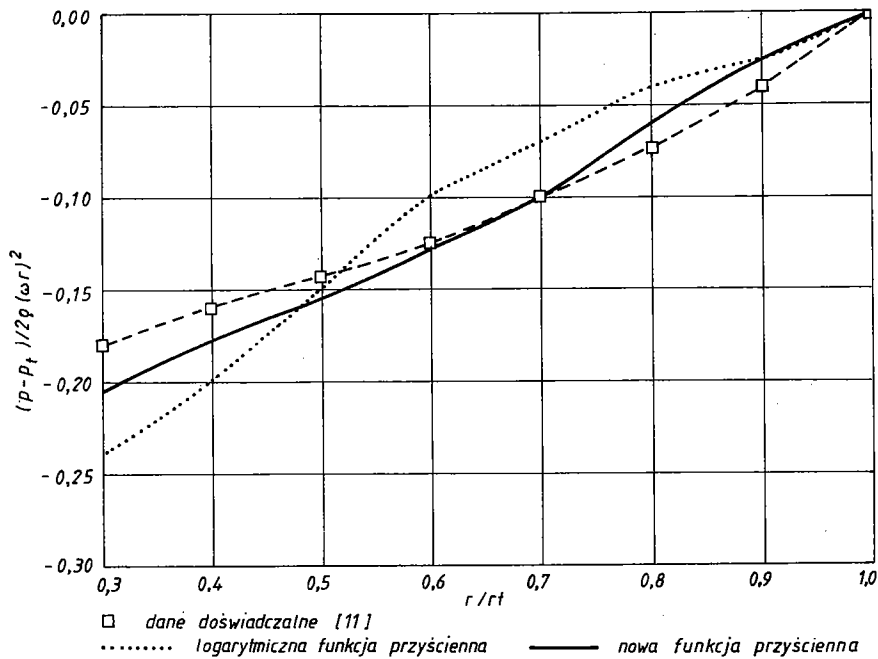
$$\overline{\tau_{rz}} = \tau_{rz}^w - \frac{1}{z} \int_0^z \int_0^z \left(\varrho \frac{V_\varphi^2}{r} - \frac{dP}{dr} \right) dz^2 \quad (4.3)$$

W celu obliczenia całki przyjmowano logarytmiczny rozkład V_φ i stałą wartość ciśnienia w kierunku normalnym do wirującej tarczy. Można pokazać, że przy wirującej tarczy

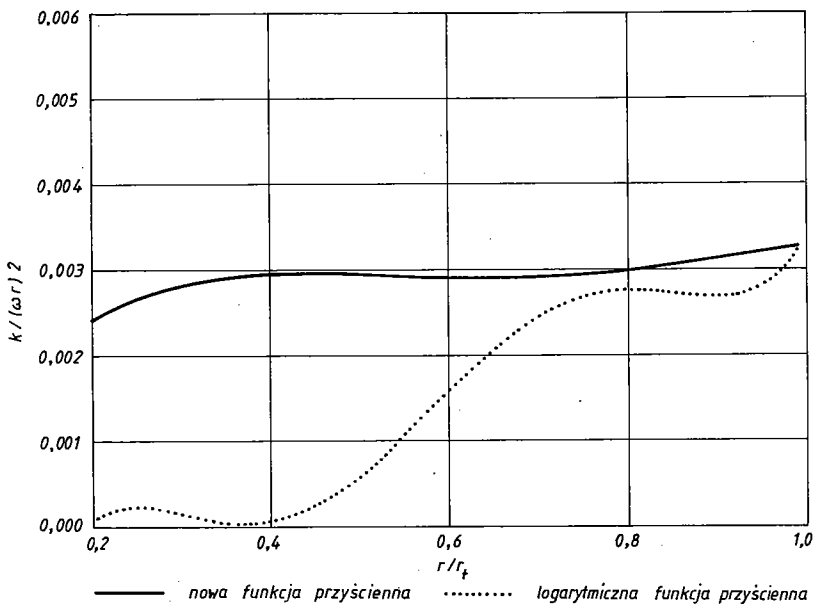
$$\begin{aligned} \int_0^z \int_0^z \left(\varrho \frac{V_\varphi^2}{r} - \frac{dP}{dr} \right) dz^2 = \\ = \frac{\varrho z}{2r} \left[\left(V_\varphi + 1,5 \frac{\tau_{\varphi z}^w}{\alpha\varrho V_r} \right)^2 + 1,25 \left(\frac{\tau_{\varphi z}^w}{\alpha\varrho V_r} \right)^2 \right] - \frac{z}{2} \frac{dP}{dr} \end{aligned} \quad (4.4)$$



Rys.4.2. Rozkłady V_r na podstawie zależności (4.3) i dobranych wartości stałej c



Rys.4.3. Rozkład promieniowy ciśnienia P między wirującą tarczą i nieruchomą obudową



Rys.4.4. Rozkład promieniowy energii turbulentnej między wirującą tarczą i nieruchomą obudową

i przy ścianie nieruchomej

$$\int_0^z \int_0^z \left(\rho \frac{v_\varphi^2}{r} - \frac{dP}{dr} \right) dz^2 =$$

$$= \frac{\rho z}{2r} \left[\left(v_\varphi - 1,5 \frac{\tau_{\varphi z}^w}{\rho v_\tau} \right)^2 + 1,25 \left(\frac{\tau_{\varphi z}^w}{\rho v_\tau} \right)^2 \right] - \frac{z}{2} \frac{dP}{dr}$$

Otrzymane rozkłady V_r zmieniały się jednak zbyt gwałtownie. W pierwszym kroku postanowiono skorygować funkcję $f(z)$ zmieniając wartość współczynnika c . Na rysunku 4.2 przedstawione są rozkłady V_r dla kilku danych eksperymentalnych. Odpowiednio dobierając wartość c można uzyskać dobrą dokładność funkcji przyściennej.

Na rysunku 4.3 pokazano wyniki uzyskane przy użyciu klasycznych rozkładów logarytmicznych i zaproponowanej funkcji przyściennej. Obliczenia wykonano z wykorzystaniem metody $k-\varepsilon$. Na podstawie eksperymentów numerycznych przyjęto wartość średnią współczynnika $c = 0,55$.

Uzyskano zmniejszenie błędu o połowę przy wyznaczaniu rozkładu $P(r)$ ciśnienia.

Otrzymano również znacznie korzystniejsze rozkłady energii turbulentnej, która, jak sugerują badania [1], zachowuje w funkcji promienia stałą poziom względem składowej obwodowej prędkości.

5. WNIOSKI

Zaproponowana funkcja przyścienne zapewnia większą zgodność obliczeń z danymi eksperymentalnymi niż stosowane funkcje czysto logarytmiczne, oraz inne omówione w niniejszej pracy. Jest ona prostsza niż funkcje przyścienne typu analitycznego. Wykorzystana w niej metoda korekcji nie ma wymiaru czysto matematycznego, lecz oparta jest również na analizie fizycznej zjawiska.

DODATEK

Wartości parametrów przyjętych we wzorze (2.2) są następujące:

$$\alpha_{x1} = \frac{\nu}{\rho V_r^3} \frac{\partial P}{\partial x_1}, \quad \alpha_{x2} = \frac{\nu}{\rho V_r^3} \frac{\partial P}{\partial x_2}$$

$$\beta_{x1} = \frac{\nu}{V_r^2} \frac{\partial V_r}{\partial x_1}, \quad \beta_{x1} = \frac{\nu}{V_r} \frac{\partial \phi_r}{\partial x_1}$$

Wielkość ϕ_r jest kątem nachylenia wektora naprężeń na ścianie. Wartości stałych przyjętych przez van den Berga wynosiły:

$$a = 2, \quad b = 13$$

LITERATURA

- [1] D. Altmann: Beitrag zur Berechnung der turbulenten Strömung in Axialspalt zwischen Laufrad und Gehäuse von Radialpumpen. Dissertation. Technische Hochschule. Magdeburg 1972.
- [2] Van Den B. Berg: A three-dimensional law of the wall for turbulentshear flows. Journal of Fluid Mechanics, vol. 70, część 1, str.149, 1975.
- [3] Van Den B. Berg, A. Elsenaar, J.P.F. Lindhout, P. Weseling: Measurements in an Incompressible Three-dimensional Turbulent Boundary Layer, under Infinite Swept-wing Conditions, and Comparison with Theory. Journal of Fluid Mechanics, vol. 70, część 1, str. 127, 1975.
- [4] Van Den B. Berg: Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers. Springer-Verlag, 1982, tłumaczenie rosyjskie - Triochmiernyje turbulentnyje pograncznyje skoi. Mir, Moskwa 1985, str. 10.
- [5] J.W. Daily, R.E. Nece: Chamber Dimension Effects on Induced Flow and Frictional Resistance of Enclosed Rotating Disks. Journal of Basic Engineering, March, 1960, str.217.
- [6] F.F. Erian, Y.H. Tong: Turbulent Flow Due to a Rotating Disk. The Physics of Fluids, vol.14, No 12, 1971, str.2586.

- [7] M.M. Gibson, B.A. Younis: Calculation of Boundary Layers with Sudden Transverse Strain, Transactions of the ASME. Journal of Fluids Engineering, vol.108, 1986, str.470.
- [8] M. Itoh, Y. Yamada, S. Imao, M. Gonda: Experiments on Turbulent Flow due to an Enclosed Rotating Disk. Engineering Turbulence Modelling and Experiments. Elsevier, 1990, str.659.
- [9] D.S. Jang, S. Acharya: Comparison of the PISO, SIMPLER, and SIMPLEC Algorithms for the Treatment of the Pressure-Velocity Coupling in Steady Flow Problems. Numerical Heat Transfer, Vol.10, 1986, str.209.
- [10] R.J. Kind, F.M. Yowakim, S.A. Sjolander: The Law of the Wall for Swirling Flow in Annular Ducts. Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering, vol.111, 1989, str.160.
- [11] J. Kurokawa, M.S. Toyokura, K. Matsuo: Roughness Effects on the Flow Along an Enclosed Rotating Disk. Bulletin of the JSME. Vol.21, No 162, 1978, str.1725.
- [12] F.J. Pierce, J.E. McAllister, M.H. Tennant: A Review of Near-Wall Similarity Models in Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers. Transactions of the ASME. Journal of Fluids Engineering. Vol.105, 1982, str.251.
- [13] I.L. Ryhming, T.K. Fannelop: Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers. Springer-Verlag, 1982. Tłumaczenie rosyjskie - Triochniernyje turbulentnyje pogranicznnye sloi. Mir, Moskwa 1985, str.316.
- [14] A.K. Singhal, D.B. Spalding: Prediction of the Two-dimensional Boundary Layers with the Aid of the $k-\epsilon$ model of Turbulence. Computer Methods in Applied Mechanics & Engineering. Vol.25, 1981, str.365.
- [15] D.B. Spalding: Genmix - a General Computer Program for Twodimensional parabolic phenomena. Book HMT-1. Pergamon Press, London 1977.

ALGEBRAIC MODELS OF A BOUNDARY LAYER ON A ROTATING DISK

S u m m a r y

The most characteristic trends in algebraic modelling of three dimensional turbulent boundary layer were analysed in the paper. Their capability of modelling Hydrodynamic phenomena on a rotating disk was examined. The most typical models were compared and a new proposal was presented.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ МОДЕЛИ ПОГРАНИЧНОГО СЛОЯ НА ВРАЩАЮЩЕМСЯ ДИСКЕ

К р а т к о е с о д е р ж а н и е

В работе сделан обзор алгебраического моделирования трехмерного турбулентного пограничного слоя. Сделана классификация этих методов. Сравнены самые типичные методы и оценена их пригодность для описания гидравлических явлений на вращающемся диске. Предложен альтернативный метод.