Beata Niezgoda

Instytut Aparatury Przemysłowej i Energetyki
Politechniki Krakowskiej

ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA ODWROTNEGO WYZNACZANIA ŚREDNIEJ WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKA WNIKANIA CIEPŁA METODAMI GRAMA-SCHMIDTA ORAZ NELDERA-MEADE'A

W pracy przedstawiono sposób wyznaczania średnich wartości współczynników wnikania ciepła poprzez pomiar wartości współczynników przenikania ciepła w wymiennikach o dowolnej geometrii. W przykładzie przedstawionym w pracy wybrano do rozwiązania zagadnienia minimalizacyjnego dwie niezależne metody Grama-Schmidta oraz Neldera-Meade'a.

OZNACZENIA

A_o [m^2] – powierzchnia wymiany ciepła
A_{cz} [m^2] – powierzchnia czołowa wymiennika
A_{iw} [m^2] – wykładnik potęgowy lub współczynnik w równaniu (14)
A_{iz} [m^2] – wykładnik potęgowy lub współczynnik w równaniu (15)
A_m [m^2] – średnia powierzchnia wymiany ciepła rury wewnętrznej
A_{mr} [m^2] – średnia powierzchnia wymiany ciepła rury zewnętrznej
A_r [m^2] – powierzchnia zewnętrzna rur bez żeber
A_w [m^2] – wewnętrzna powierzchnia wymiany ciepła
A_z [m^2] – powierzchnia żeber
c_p [J/(kg·K)] – ciepło właściwe
k [W/(m^2·K)] – współczynnik przenikania ciepła
k_{A_o} [W/(m^2·K)] – współczynnik przenikania ciepła odniesiony do powierzchni A_o
k_{zm} [W/(m^2·K)] – zmierzona wartość współczynnika k_{A_o}
m – liczba ograniczeń nieliniowych, nierównościowych; liczba punktów pomiarowych
Nu – liczba Nusselta
Pr – liczba Prandtla
$\dot{Q}$ [W] – moc cieplna
Re – liczba Reynoldsa

s [m]	–	grubość
Δt [C]	–	różnica temperatury
Δt_m [C]	–	średnia logarytmiczna różnica temperatur
T [K], t [C]	–	temperatura
$\dot{V}_G$ [m^3/s]	–	strumień objętości glikolu
W_p [m/s]	–	prędkość powietrza
$\boldsymbol{X}$	–	wektor stałych współczynników
α [W/(m^2·K)]	–	współczynnik wnikania ciepła
ε	–	sprawność żebra
ρ [kg/m^3]	–	gęstość

Indeksy

cz	–	czołowa
G	–	glikol
p	–	powietrze
r	–	rura
rz	–	rura ożebrowana
w	–	wewnątrz lub wylot
wl	–	wewnątrzwlotowa (temperatura)
z	–	żebro lub zewnętrzny
zl	–	zewnątrzwlotowa (temperatura)

WSTĘP

Analityczne wyznaczanie zależności pozwalających obliczać wartości współczynnika wnikania ciepła (α), przez rozwiązywanie układu równań ruchu i rozkładu temperatury, możliwe jest jedynie w pewnych szczególnych przypadkach, po przyjęciu szeregu założeń upraszczających (np. wzór Nusselta dla skraplania pary na ściance pionowej). W pozostałych przypadkach odpowiednie korelacje wyznacza się doświadczalnie zakładając, np. na podstawie analizy wymiarowej, postacie odpowiednich wzorów. Jedną z takich metod może być metoda wykorzystująca pomiar rozkładu temperatury na powierzchni wymiany ciepła i określeniu z równania Newtona miejscowych wartości współczynników wnikania ciepła. Wartości współczynników α można również obliczyć pośrednio, wykorzystując hydromechaniczno-termiczną analogię *Colburna* [1] bądź analogię między procesami transportu ciepła i wymiany masy [2]. Inną prostą metodą określania wartości α jest metoda zaproponowana przez *Wilsona* [3] oraz powszechnie później wykorzystywana w formie zmodyfikowanej [4, 5, 6]. Metoda ta polega na założeniu potęgowej postaci wzorów, służących do wyznaczania współczynników wnikania ciepła po obu stronach przegrody, jako zależności między odpowiednimi liczbami kryterialnymi. Stałe wartości współczynników występujących w tych wzorach wyznacza się na drodze regresji liniowej korzystając ze zmierzonych wartości współczynnika przenikania ciepła k, w warunkach ustalonych parametrów termiczno-przepływowych jednego z mediów. Niedogodność metody Wilsona polega na założeniu liniowego związku między wartościami k oraz α:

$$k \sim \alpha_i; \qquad i = w, z$$

Uproszczenie to nie może mieć miejsca np. w przypadku powierzchni ożebrowanych, dla których wartość współczynnika przenikania ciepła wyraża się wzorem ogólnym:

$$\frac{1}{k_{A_o}} = \frac{A_o}{A_w \alpha_w} + \frac{A_o s_r}{A_m \lambda_r} + \frac{A_o s_{rz}}{A_{mz} \lambda_{rz}} + \frac{A_o}{\alpha_z (A_z \varepsilon + A_r)} \tag{1}$$

gdzie

$$\varepsilon = f(\alpha_z)$$

Jak wynika ze wzoru (1), jedynie przy założeniu, że sprawność żebra jest równa jedności, można za pomocą metody Wilsona określić wartości stałych współczynników proporcjonalności we wzorach na α_Z, α_W. Celem niniejszej pracy jest zaproponowanie metod niezależnych od punktów pomiarowych, pozwalających określić zarówno współczynniki proporcjonalności, jak również wykładniki potęg we wzorach na wartości α o dowolnej postaci.

1. WYZNACZANIE ŚREDNICH WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW WNIKANIA CIEPŁA NA PODSTAWIE POMIARU ŚREDNICH WARTOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW PRZENIKANIA CIEPŁA

W badaniach wymienników ciepła prostym zagadnieniem pomiarowym jest wyznaczanie średnich wartości współczynników przenikania ciepła k. Pomiar taki może być oparty na określeniu z równań bilansowych wymiennika ciepła jego średniej mocy cieplnej (po obu stronach powierzchni wymiany ciepła z – zewnętrznej, w – wewnętrznej):

$$\dot{Q}_z = m_z c_{pz} \Delta t_z \tag{2}$$

$$\dot{Q}_w = m_w c_{pw} \Delta t_w \tag{3}$$

$$\dot{Q} = \frac{1}{2}\left(\dot{Q}_w + \dot{Q}_z\right) \tag{4}$$

oraz wyznaczeniu średniej logarytmicznej różnicy temperatur na podstawie pomiaru temperatury czynników na wejściu i wyjściu z wymiennika:

$$\Delta t_m = \frac{t_{z1} - \left(t_{w1} + \Delta t_w\right) - \left[\left(t_{z1} - \Delta t_z\right) - t_{w1}\right]}{\ln \dfrac{t_{z1} - \left(t_{w1} + \Delta t_w\right)}{\left(t_{z1} - \Delta t_z\right) - t_{w1}}} \tag{5}$$

i obliczeniu z równania Pecleta wartości współczynnika przenikania ciepła odniesionego do powierzchni A_o:

$$k_{A_o} = \frac{\dot{Q}}{\Delta t_m A_o} \tag{6}$$

Powyższe pomiary powinny zawierać pomiar temperatur oraz strumieni mas dla czynników, pomiędzy którymi zachodzi wymiana ciepła. Pozwala to wyznaczyć dla każdego punktu pomiarowego i każdego czynnika takie liczby kryterialne, jak Re i Pr, których funkcją jest w przypadku konwekcji wymuszonej liczba Nusselta (Nu). Wyznaczenie średnich wartości współczynników wnikania ciepła (poprzez wyznaczenie wzorów służących do ich obliczania) polega zatem na założeniu postaci wzorów do obliczania współczynników wnikania ciepła (od wewnętrznej i zewnętrznej strony przegrody):

$$\alpha_j = f_j\left(\boldsymbol{X}_j, Re_j, Pr_j\right); \qquad j = w, z \tag{7}$$

oraz takim doborze wartości stałych współczynników $\boldsymbol{X}$ we wzorach postaci (7), aby odchyłki między zmierzonymi y i obliczonymi wg wzorów (1) i (7) wartościami współczynników k_{A_o} dla serii pomiarów m były minimalne, to znaczy:

$$\bigwedge_{i=1,m} k_{A_o}(i) - y(i) \approx 0 \tag{8}$$

Rozwiązanie nadokreślonego układu równań (8) można wyznaczyć tak, aby suma kwadratów odchyłek zmierzonych i obliczonych wartości k osiągała minimum, tj.

$$F = \sum_{i=1}^{m} \left[k_{A_o}(i) - y(i)\right]^2 \rightarrow \min; \qquad i = 1, \ldots, m \tag{9}$$

przy czym we wzorach (8), (9) obliczeniowa wartość k_{A_o} jest równa:

$$k_{A_o}(i) = G\left[f_w\left(\boldsymbol{X}_w, Re_w, Pr_w\right); f_z\left(\boldsymbol{X}_z, Re_z, Pr_z\right)\right](i) \tag{10}$$

Wektory $\boldsymbol{X}_w$, $\boldsymbol{X}_z$ są wektorami wyznaczanych stałych współczynników we wzorach na średnie wartości współczynników wnikania ciepła. Zastępując w równaniu (10) wektory $\boldsymbol{X}_w$, $\boldsymbol{X}_z$ jednym wektorem $\boldsymbol{X}$ wielkości szukanych, natomiast pozostałe człony funkcji G oznaczając symbolicznie jako resztę r, można zależności (10) zapisać w postaci (11):

$$k_{A_0}(i) = G[\boldsymbol{X}, r(i)]; \qquad i = 1,...,m \tag{11}$$

Właściwe zdefiniowanie funkcji celu ma istotny wpływ na wybór metody rozwiązywania zagadnienia minimalizacyjnego. Ze względu na dowolność wyboru metod dogodniej było wybrać funkcję różniczkowalną, jaką jest funkcja (11). Zatem do rozwiązania problemu minimalizacyjnego zdefiniowanego równaniem (11) wybrano dwie metody:

1) rozwiązanie metodą Grama-Schmidta układu równań (8), po jego wcześniejszym zlinearyzowaniu [7, 8];

2) minimalizację funkcji (9) metodą kompleksową Neldera-Meade'a [9].

2. PRZYKŁAD

Obydwie wymienione powyżej metody wymagają podania na początku obliczeń punktu startowego. Metody te mogą być szczególnie efektywne w przypadku rozpoczęcia procesów iteracyjnych w sąsiedztwie istniejącego rozwiązania. Poza tym nie wymagają wykonania bardzo dużej liczby badań. Mogą one być bardzo przydatne przy wyznaczaniu własnych zależności do obliczania współczynników wnikania ciepła w wymiennikach, bądź też mogą stanowić proste i efektywne narzędzie do eksperymentalnej weryfikacji przyjętego modelu obliczeń cieplnych dla określonego typu wymienników. Niech przedmiotem niniejszych rozważań będzie ten ostatni przypadek.

Praktyczny przykład zastosowania powyższych metod przedstawiono dla ożebrowanego oziębiacza powietrza chłodzonego glikolem, o przepływie krzyżowo-przeciwprądowym. Celem badań była eksperymentalna weryfikacja przyjętych w obliczeniach cieplnych zależności do wyznaczania średnich wartości współczynników wnikania ciepła dla:

- konwekcji wymuszonej przy przepływie jednofazowym wewnątrz rur – wzór Schlündera [10]

$$Nu = \sqrt[3]{3{,}66^3 + 1{,}61^3 Re\, Pr\, d_w / L} \tag{12}$$

- opływu pęczka rur ożebrowanych, o żebrach okrągłych, w układzie przestawnym – wzór Schmidta [11]

$$Nu = 0{,}45 Re^{0{,}625} Pr^{1/3} \tag{13}$$

Wyrażenia (12, 13) można przekształcić zatem do postaci (7) w następujący sposób:

$$Nu_w = \left(A_{1w}^3 + A_{2w}^3 Re\, Pr\, d_w / L\right)^{A_{3w}} \tag{14}$$

$$Nu_z = A_{1z} Re^{A_{2z}} Pr^{A_{3z}} \tag{15}$$

traktując znane z literatury wartości wykładników A_{iw}, A_{iz} ze wzorów (12, 13) jako wartości startowe w obu metodach.

Pomiar średnich wartości współczynnika przenikania ciepła k_{A_o} (odniesionego w przykładzie do wewnętrznej powierzchni rur $k_{A_o} = k_{A_w}$) został wykonany wg schematu przedstawionego wzorami (2÷6), dla dwóch wymienników ożebrowanych (rys. 1). Wielkościami bezpośrednio mierzonymi były:

– prędkość powietrza $W_p(z = p;\ \dot{m}_p = W_p A_{cz} \rho_p)$,
– temperatura powietrza na wlocie do wymiennika t_{pl},
– spadek temperatury powietrza w wymienniku Δt_p,
– strumień objętości glikolu $\dot{V}_G(w = g;\ m_G = \dot{V}_G \rho_G)$,
– temperatura glikolu na wlocie do wymiennika t_{Gl},
– wzrost temperatury glikolu w wymienniku Δt_G,
– moc nagrzewnic powietrza za wymiennikiem $\dot{Q}_N$.

Pomiar powyższych wielkości pozwolił wyznaczyć dwa strumienie ciepła występujące we wzorach (2, 3), których uśredniona wartość jest wydajnością cieplną wymiennika w danym punkcie pomiarowym. Pomiar powyżej wymienionych wielkości pozwolił wyznaczyć także dla każdego punktu pomiarowego wartości liczb *Re*, *Pr* dla obu czynników (powietrza i glikolu). W rozważanym przypadku pomiary wykonano w dwunastu punktach pomiarowych. Oczywiście wykonanie większej liczby badań w możliwie najszerszych zakresach pomiarowych zwiększa adekwatność wzorów (14, 15) w stosunku do rzeczywistych wartości współczynników wnikania ciepła.

Obliczenia porównawcze wykonano dla dwóch przypadków:

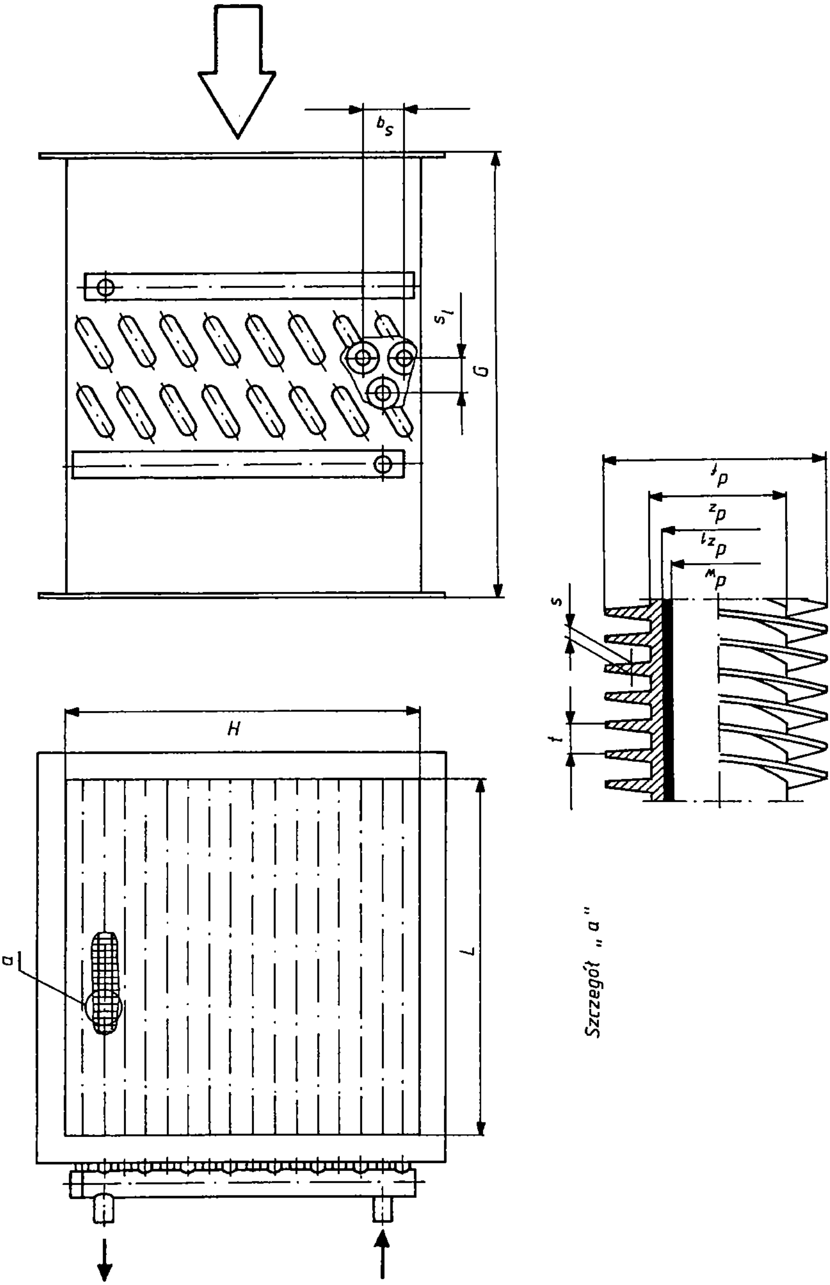
1) dla ustalonych wartości współczynników $A_{3w} = 1/3$, $A_{3z} = 1/3$, $A_{2z} = 0{,}625$ (wyznaczono wartości współczynników A_{1w}, A_{2w}, A_{1z} uzyskując wyniki zawarte w tabl. 1);

2) dla ustalonych wartości wykładników potęg $A_{3w} = 1/3$, $A_{3z} = 1/3$ (obliczono wartości współczynników A_{1w}, A_{2w}, A_{1z}, A_{2z} uzyskując wyniki zawarte w tabl. 2).

Tablica 1

Wyniki obliczeń dla ustalonych wartości współczynników $A_{3w} = 1/3$, $A_{3z} = 1/3$, $A_{2z} = 0{,}625$

Współczynnik	Metoda Grama-Schmidta	Metoda Neldera-Meade'a	Dane z literatury
A_{1w}	3,6863	3,6863	3,66
A_{2w}	1,6216	1,6216	1,61
A_{1z}	0,4580	0,4580	0,45
Suma kwadratów odchyłek	656,32	656,32	845,61



Rys. 1. Schemat wykonawczy badanych modeli wymienników ciepła

Tablica 2

Wyniki obliczeń dla ustalonych wartości wykładników potęg A_{3w} = 1/3, A_{3z} = 1/3

Współczynnik	Metoda Grama-Schmidta	Metoda Neldera-Meade'a
A_{1w}	3,9938	3,9945
A_{2w}	1,8114	1,8117
A_{1z}	0,8018	0,8018
A_{2z}	0,5660	0,5659
Suma kwadratów odchyłek	618,091	618,125

WNIOSKI

Zaprezentowane metody doświadczalnego wyznaczania średnich współczynników wnikania ciepła dające zgodne ze sobą wyniki mogą stanowić podstawę szybkich, prostych i tanich pomiarów nie wymagających specyficznej aparatury pomiarowej. Uzyskane w wyniku zastosowania powyższych metod zależności do obliczania współczynników α, w przypadku przeprowadzenia niewielkiej liczby pomiarów, należy stosować ostrożnie i ograniczyć do badanych typów wymienników (tzw. badania sprawdzające). Przedstawiony powyżej przykład potwierdza pewne właściwości wynikające z zastosowania różnych metod do rozwiązywania zagadnienia zdefiniowanego równaniem (9):

Metoda Grama-Schmidta

- jest bardzo szybko zbieżna w sąsiedztwie rozwiązania,
- wrażliwa na błędy obliczeń numerycznych,
- wymaga różniczkowalności minimalizowanej funkcji,
- może dawać nieistotne fizycznie rozwiązanie.

Metoda Neldera-Meade'a

- charakteryzuje ją długi czas obliczeń,
- praktycznie nie jest wrażliwa na błędy obliczeń numerycznych,
- brak wymagań odnośnie różniczkowalności funkcji celu,
- dzięki ograniczeniom pozwala wprowadzić obszar rozwiązań dopuszczalnych i ewentualne związki między wartościami współczynników A_{iw}, A_{iz},
- jest niezawodna przy każdej liczbie niewiadomych (optymalnie do 6) i postaci minimalizowanej funkcji.

Ogólnie można stwierdzić, że przedstawiony sposób wyznaczania średnich wartości współczynników wnikania ciepła na podstawie rozwiązywania zagadnienia odwrotnego za pomocą jednej z metod optymalizacyjnych albo jednej z metod rozwiązywania zlinearyzowanego układu równań (8) jest bardziej uniwersalny od metody Wilsona. Mimo pewnej złożoności programowania, z uwagi na krótki czas obliczeń oraz możliwość stosowania w zagadnieniach nieliniowych opisane metody mogą być z powodzeniem wykorzystywane w praktyce inżynierskiej.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. P. Colburn: *Method of Correlating Forced Convection Heat Transfer Data and a Comparison with Fluid Friction.* Trans. AICHE, 1993, vol. 29.

[2] M. K. Chyu, V. Natarajan: *Local Heat/Mass Transfer Distributions on the Surface of a Wall-Mounted Cube.* Journal of Heat Transf., 1991, vol. 13.

[3] E. E. Wilson: *Basis for Rational Design of Heat Transfer Apparats.* Trans. ASME, 1915, vol. 37.

[4] R. K. Shah: *Assessment of Modified Wilson Plot Technigues for Obtaining Heat Exchanger Design Data.* Proc of the Ninth Int. Heat Transfer Conf., p. 51, Jerusalem 1990.

[5] D. E. Briggs, E. H. Young: *Modified Wilson Plot Techniques for Obtaining Heat Transfer Corelations for Shell and Tube Heat Exchangers.* Chem. Ing. Progr. Symp., 1969, Ser. No 92 vol. 65.

[6] G. Filipczak, J. Hapanowicz, L. Troniewski, S. Witczak: *Zastosowanie półempirycznej metody Wilsona do badań wymiany ciepła.* XIV Ogólnopol. Konf. Inż. Chem. i Proc., 1992, vol. II.

[7] C. L. Lawson, R. J. Hanson: *Solving least squares problems.* Englwood Cliffs, New York 1974.

[8] J. M. Ortega, W. C. Rheinboldt: *Iterative solution of nonlinear equation ın several variables.* Academic Press, New York 1970.

[9] B. D. Bunday: *Basic Optimization Methods.* Edward Arnold Lmtd, 1974.

[10] V. Gnielinski: *Wärmeübertragung bei der erzwugener einphasiger Strömung.* VDI Wärmeatlas, Gbl, 1986.

[11] E. Schmidt: *Die Wärmeübertragung durch Rippen.* Zeitsch. des VDI, 1926, vol. 70.

SOLUTION OF INVERSE PROBLEM FOR DETERMINING MEAN CONVECTIVE HEAT-TRANSFER COEFFICIENT BY MEANS OF GRAM-SCHMIDT AND NELDER-MEADE METHODS

Summary

In the paper an experimental-numerical method of determining mean values of convective heat-transfer coefficients in shell and tube exchangers has been presented. The method is based on relatively cheap and fast measurements without any special measuring apparatus. The experimental part of the method covers the measurement of mean values of convective heat-transfer coefficients. Such measurement can be based on the definition of the heat exchanger mean rate, using balance equation, (on both sides of heat exchange surfaces z – outer, w – inner) and determination of mean logarithmic difference of temperatures following the measurement of

media temperatures at inlet and outlet of the exchanger together with the calculation, using Peclet equation, of heat-transfer coefficient as referred to surface A_o. The above measurements should cover the data on temperatures and mass flux for the media between which the heat is transferred. This allows the determination of Reynolds and Prandtl numbers for each measurement point and each medium, the functions of these numbers in case of forced convection being Nusselt (Nu) number. Thus, the determination of mean values of convective heat-transfer coefficients means the assumption of formulae for calculating the coefficients of heat transfer (from the inner and outer sides of the heat surface). It also means selection of the coefficients' constants in the formulae in such a way that the deviation between the measured and the calculated values of coefficients for measurements series m were minimal. The solution of the problem can be reduced to minimization of the sum square of the measured and calculated values k. The minimization problem posed in such a way can be solved by one of optimization methods. In the example of determining mean convective heat-transfer coefficients for finned air coolers presented in the paper the Gram-Schmidt and Nelder-Meade methods have been compared.

РЕШЕНИЕ ВОПРОСА ОБРАТНОГО ОПРЕДЕЛЕНИЯ СРЕДНЕГО ЗНАЧЕНИЯ КОЭФФИЦИЕНТА ПРОНИКНОВЕНИЯ ТЕПЛОТЫ МЕТОДАМИ ГРАМА-ШМИТА И НЕЛЬДЕРА-МИДА

Краткое содержание

В работе представлен экспериментально-нумерический метод определения средних значений коэффициентов проникновения теплоты в теплопомещениях. Этот метод основан на простых, сравнительно дешевых измерениях, не требующих специфической измерительной аппаратуры. Экспериментальная часть метода основывается на измерении средних значений коэффициентов проникновения теплоты. Такое измерение может опираться на определении на основе балансных уравнений теплообменника его средней производительности (по обеим сторонам поверхности обмена теплоты z – наружной, w – внутренной) и установления спедней логарифмической разницы температур, базируясь на измерении температур факторов у входа и выхода из теплообменника, а также на расчетах по уравнению Пеклета значения коэффициента проникновения теплоты, отнесенного к поверхности A_o. Вышеназванные измерения должны содержать измерения температур и потоков масс, для факторов между которыми происходит теплообмен. Это позволяет определить для любой измерительной точки и любого фактора такие критериальные числа, как Re и Pr, функцией которых является в случае вынужденной конвекции число Нуссельта. Определение средних значений коэффициентов проникновения теплоты (путем определения формул, служащих для их расчета), а также в таком подборе постоянных значений коэффициентов в формулах, чтобы отклонения между измеренными и рассчитанными значениями коэффициентов серии m измерений были минимальны. Решение вышеуказанного вопроса могло свести к минимализации суммы квадратов отклонений измеренных и рассчитанных значений k. Так поставленный минимализационный вопрос можно решить с помощью одного из оптимализационных методов. В представленном в работе примере определения средних значений коэффициентов проникновения теплоты для снабженных ребрами охолодителей воздуха были сравнены два метода: Грама-Шмита и Нельдера--Мида.