BIULETYN INFORMACYJNY INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Nr 47 1977

doc. dr Wiesław Gogół

Instytut Techniki Cieplnej
Politechniki Warszawskiej

EFEKT ASYMETRII W DWUSKŁADNIKOWYCH JEDNOWYMIAROWYCH UKŁADACH CYLINDRYCZNYCH I KULISTYCH PRZY LINIOWEJ ZALEŻNOŚCI PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ OD TEMPERATURY

W pracy wykazano teoretycznie istnienie efektu asymetrii strumieni cieplnych w jednowymiarowych dwuskładnikowych układach cylindrycznych i kulistych w ustalonym procesie przewodzenia ciepła przy przewodnościach cieplnych obu ciał zmieniających się liniowo z temperaturą.

Określono wielkość efektu asymetrii i pola temperatury w obu układach oraz porównano otrzymane wyniki z wielkościami występującymi w jednowymiarowym układzie płaskim (układ dwu płyt płaskich).

1. WSTĘP

Przedmiotem rozważań jest efekt asymetrii strumieni cieplnych w dwuskładnikowym układzie cylindrycznym i kulistym w stanie cieplnym ustalonym. W pracach [1], [2] i [3] wykazano istnienie efektu asymetrii w jednowymiarowym układzie płaskim oraz podano podstawowe zależności opisujące ten efekt. W niniejszej pracy zostanie wykazane istnienie efektu asymetrii w jednowymiarowych układach cylindrycznych i kulistych oraz zostaną podane podstawowe zależności opisujące ten efekt w nawiązaniu do zależności obowiązujących w układzie płaskim.

Ciała tworzące układ dwuskładnikowy są ciągłe, jednorodne, izotropowe i pozbawione wewnętrznych źródeł ciepła; zakłada się, że termiczny opór kontaktowy między ciałami nie istnieje; w zakresie różnicy temperatury ϑ między powierzchniami zewnętrznymi układu dwuskładnikowego oba ciała nie podlegają żadnym przemianom, a ich przewodności cieplne zależą liniowo od temperatury:

$$\lambda_1 = \lambda_{o1}(1 + b_1 t), \tag{1}$$

$$\lambda_2 = \lambda_{o2}(1 + b_2 t). \tag{2}$$

gdzie:

λ_o oznacza wartość przewodności cieplnej odpowiadającej początkowi $t = 0$ zakresu linearyzacji funkcji $\lambda(t)$,
b – współczynnik temperaturowy.

Strumień cieplny skierowany od ciała 1 do ciała 2 oznaczono przez q_L, a strumień skierowany od ciała 2 do ciała 1 przez q_P. Podobnie ilość ciepła przewodzoną w jednostce czasu od ciała 1 do ciała 2 oznaczono przez Q_L, a od ciała 2 do ciała 1 przez Q_P. Efekt asymetrii określono podobnie jak w wymienionych pracach [1], [2] i [3] wielkością

$$\frac{q_L}{q_P} \text{ lub } \frac{Q_L}{Q_P}.$$

2. PRZEWODZENIE CIEPŁA W DWUSKŁADNIKOWEJ ŚCIANCE CYLINDRYCZNEJ

Dla układu cylindrycznego o długości L równej 1 (np. L = 1 m) ilość ciepła Q przewodzona przez jednoskładnikową ściankę cylindryczną ograniczoną promieniami r_w i r_z w jednostce czasu (np. Q [W]) przy przewodności cieplnej zmieniającej się liniowo z temperaturą $\lambda = \lambda_o(1 + bt)$ będzie wynosiła

$$Q = -\lambda(r,t)\, 2\pi r \frac{dt}{dr}, \tag{3}$$

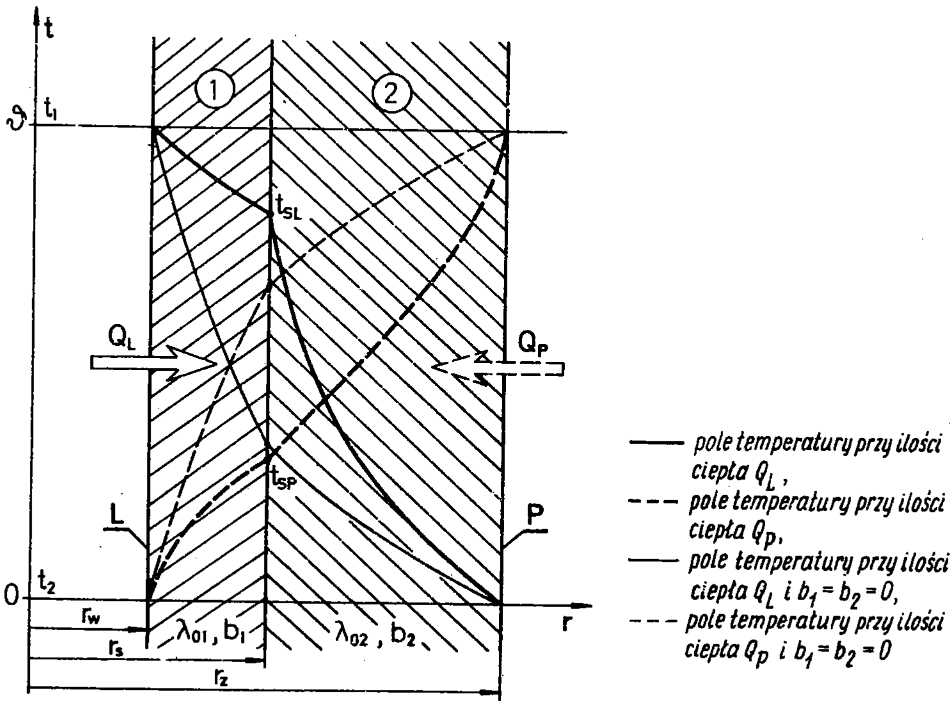
a po scałkowaniu

$$Q = 2\pi\lambda_o \frac{\left[1 + \frac{b}{2}(t_1 + t_2)\right](t_1 - t_2)}{\ln \frac{r_z}{r_w}}. \tag{4}$$

Pole temperatury $t(r)$ w ściance cylindrycznej opisane będzie zależnością

$$\frac{t_1 - t}{t_1 - t_2} \cdot \frac{\left[1 + \frac{b}{2}(t + t_1)\right]}{\left[1 + \frac{b}{2}(t_1 + t_2)\right]} = \frac{\ln \frac{r}{r_w}}{\ln \frac{r_z}{r_w}}. \tag{5}$$

W przypadku układu dwuskładnikowego (rys.1) o przewodnościach cieplnych obu ciał określonych równaniami (1) i (2)



Rys.1. Pole temperatury w dwuskładnikowym układzie cylindrycznym: $\lambda_{01} = 1$, $\lambda_{02} = 2$, $b_1 = 10 \cdot 10^{-3}$, $b_2 = -1{,}9 \cdot 10^{-3}$, $\vartheta = 500$ ($t_1 = 500$, $t_2 = 0$), $K = 2$ ($r_w = 10$, $r_s = 20$, $r_z = 40$).

Wielkość efektu asymetrii $\frac{Q_L}{Q_P} = 1{,}883$

można wykazać, przeprowadzając dowód analogiczny do podanego w pracy [1], że stosunek ilości ciepła Q_L przewodzonego od ciała 1 do ciała 2 do ilości ciepła Q_P przewodzonego od ciała 2 do ciała 1 wyrazi się zależnością

$$\frac{Q_L}{Q_P} = \frac{t_{sL}}{t_{sP}} \, \frac{\ln \frac{r_s}{r_w}}{\ln \frac{r_z}{r_s}} \, \frac{\lambda_{o2}}{\lambda_{o1}} \, \frac{\left[1 + \frac{b_2}{2} t_{sL}\right]}{\left[1 + \frac{b_1}{2} t_{sP}\right]}, \tag{6}$$

gdzie:

t_{sL} oznacza temperaturę styku przy wartości Q_L,
t_{sP} oznacza temperaturę styku przy wartości Q_P.

Wprowadzając oznaczenie dla ścianki cylindrycznej

$$K_c = \frac{\lambda_{o2}}{\lambda_{o1}} \, \frac{\ln \frac{r_s}{r_w}}{\ln \frac{r_z}{r_s}}, \tag{7}$$

otrzymuje się wyrażenie na wielkość efektu asymetrii, analogiczne jak dla ścianki płaskiej [1]

$$\frac{Q_L}{Q_P} = K_c \frac{t_{sL}\left[1 + \frac{b_2}{2} t_{sL}\right]}{t_{sP}\left[1 + \frac{b_1}{2} t_{sP}\right]}, \tag{8}$$

gdzie:

$t_{sL} = f_1(K_c, \vartheta, b_1, b_2)$,
$t_{sP} = f_2(K_c, \vartheta, b_1, b_2)$.

W zależności tej nie występują strumienie q_L i q_P a ilości ciepła Q_L i Q_P, ponieważ dla ścianki cylindrycznej strumień q będzie zmieniał się z promieniem r; wielkość Q_L będzie zawsze oznaczała ilość ciepła przewodzoną od środka układu na zewnątrz.

3. PRZEWODZENIE CIEPŁA W DWUSKŁADNIKOWEJ ŚCIANCE KULISTEJ

Ilość ciepła Q przewodzona w jednostce czasu przez jednoskładnikową ściankę kulistą ograniczoną promieniami r_w i r_z o przewodności cieplnej zmieniającej się liniowo z temperaturą będzie wynosiła

$$Q = -\lambda(r,t)\, 4\pi\, r^2 \frac{dt}{dr}, \tag{9}$$

a po scałkowaniu

$$Q = 4\pi\, \lambda_o \frac{\left[1 + \frac{b}{2}\,(t_1 + t_2)\right]\,(t_1 - t_2)}{\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_z}}. \tag{10}$$

Pole temperatury $t(r)$ w ściance kulistej opisane będzie zależnością

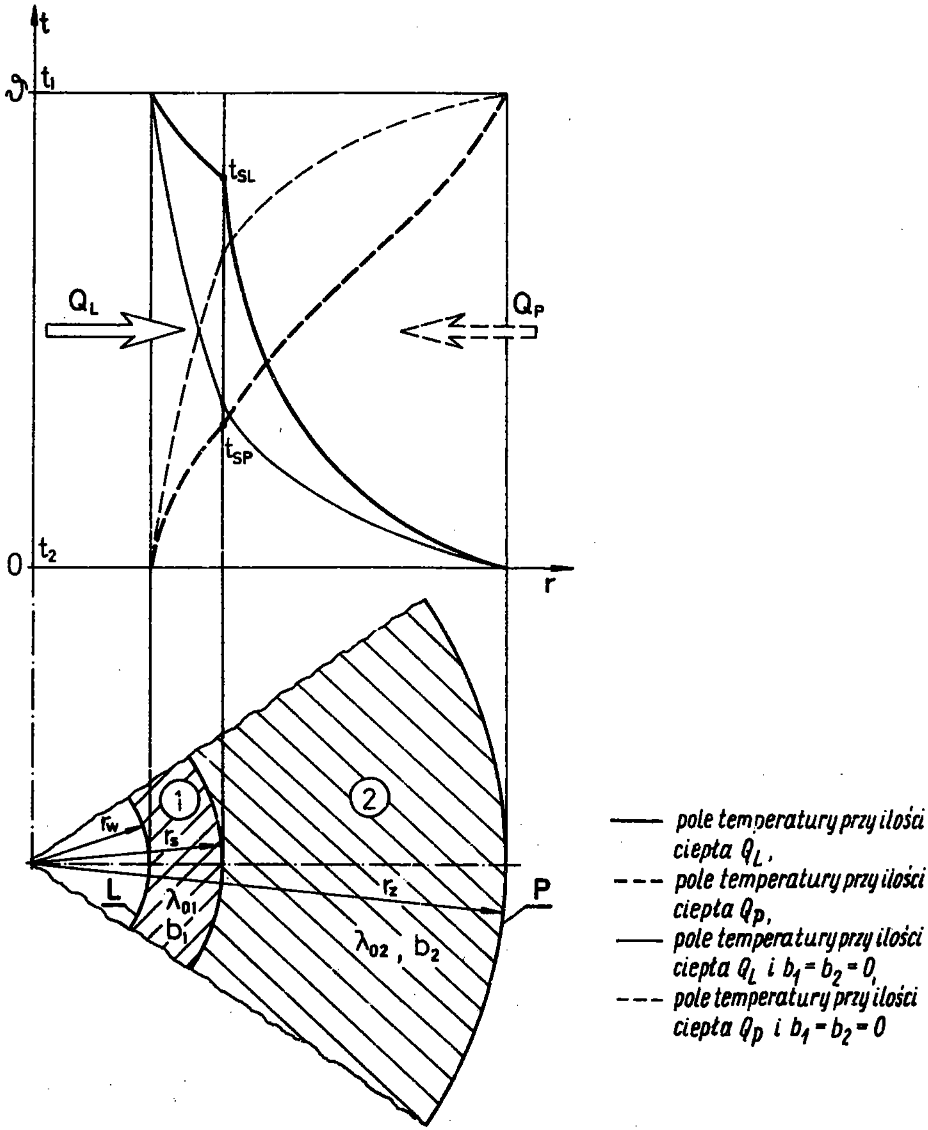
$$\frac{t_1 - t}{t_1 - t_2}\,\frac{\left[1 + \frac{b}{2}\,(t_1 + t)\right]}{\left[1 + \frac{b}{2}\,(t_1 + t_2)\right]} = \frac{\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r}}{\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_z}}. \tag{11}$$

W przypadku układu dwuskładnikowego (rys.2) o przewodnościach cieplnych obu ciał określonych równaniami (1) i (2) można wykazać (podobnie jak dla ścianki cylindrycznej) przeprowadzając dowód analogiczny do podanego w pracy [1], że stosunek ilości ciepła Q_L przewodzonego od ciała 1 do ciała 2 do ilości ciepła Q_P przewodzonego od ciała 2 do ciała 1 wyrazi się zależnością

$$\frac{Q_L}{Q_P} = \frac{t_{sL}}{t_{sP}}\,\frac{\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_s}}{\frac{1}{r_s} - \frac{1}{r_z}}\,\frac{\lambda_{o2}}{\lambda_{o1}}\,\frac{\left[1 + \frac{b_2}{2}\,t_{sL}\right]}{\left[1 + \frac{b_1}{2}\,t_{sP}\right]}. \tag{12}$$

Wprowadzając dla ścianki kulistej oznaczenie

$$K_k = \frac{\lambda_{o2}}{\lambda_{o1}}\,\frac{\frac{1}{r_w} - \frac{1}{r_s}}{\frac{1}{r_s} - \frac{1}{r_z}}, \tag{13}$$



Rys.2. Pole temperatury w dwuskładnikowym układzie kulistym:
$\lambda_{o1} = 1$, $\lambda_{o2} = 2$, $b_1 = 10\cdot10^{-3}$, $b_2 = -1{,}9\cdot10^{-3}$,
$\vartheta = 500$ ($t_1 = 500$, $t_2 = 0$), $K = 2$ ($r_w = 10$, $r_s = 16$, $r_z = 40$).

Wielkość efektu asymetrii $\frac{Q_L}{Q_P} = 1{,}883$

otrzymuje się wyrażenie na wielkość efektu asymetrii analogiczne jak dla ścianki płaskiej [1]

$$\frac{Q_L}{Q_P} = K_k \frac{t_{sL}}{t_{sP}} \frac{\left[1 + \frac{b_2}{2} t_{sL}\right]}{\left[1 + \frac{b_1}{2} t_{sP}\right]}. \tag{14}$$

4. WNIOSKI

1. Pole temperatury w ściance cylindrycznej i kulistej o przewodnościach cieplnych zmieniających się liniowo z temperaturą wykazuje analogię do pola w ściance płaskiej o grubości δ [1]

$$\frac{t_1 - t}{t_1 - t_2} \frac{\left[1 + \frac{b'}{2} (t_1 + t)\right]}{\left[1 + \frac{b}{2} (t_1 + t_2)\right]} = \frac{x}{\delta}. \tag{15}$$

Różnice występują tylko w formalnej budowie prawej strony równań (5), (11) i (15).

2. Zależności (4) i (10) opisujące ilość ciepła przewodzoną przez ściankę cylindryczną i kulistą o przewodności cieplnej zmieniającej się liniowo z temperaturą wykazują podobną budowę jak dla ścianki płaskiej [1], [3]

$$q = \lambda_o \left[1 + \frac{b}{2} (t_1 + t_2)\right] (t_1 - t_2). \tag{16}$$

3. Istotne wnioski wynikające z niniejszej pracy są następujące:

- Efekt asymetrii występuje w dwuskładnikowej ściance cylindrycznej i kulistej (podobnie jak w ściance płaskiej) i w tym zakresie występowanie efektu nie zależy od kształtu i wyraża się tą samą zależnością funkcyjną jak dla ścianki płaskiej, a mianowicie [1], [3]

$$\frac{q_L}{q_P} = f(K, \vartheta, b_1, b_2), \tag{17}$$

oraz

$$\frac{q_L}{q_P} = K \, \frac{t_{sL}}{t_{sP}} \, \frac{1 + \frac{b_2}{2} t_{sL}}{1 + \frac{b_1}{2} t_{sP}}, \tag{18}$$

gdzie dla ścianki płaskiej

$$K = \frac{\delta_1}{\delta_2} \, \frac{\lambda_{o2}}{\lambda_{o1}} . \tag{19}$$

Jedyną różnicę stanowi operowanie w przypadku ścianek cylindrycznych i kulistych stosunkami ilości ciepła $\frac{Q_L}{Q_P}$ oraz wyrażenie współczynnika K równaniami (7) i (13).

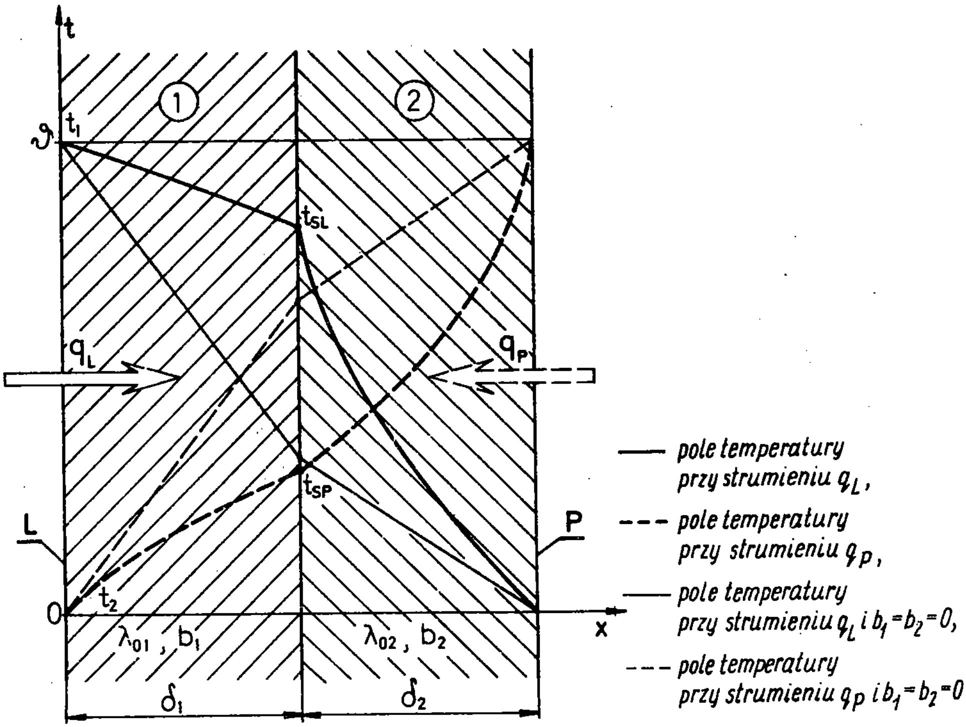
- Wielkość K przedstawia w każdym z trzech przypadków stosunek oporów termicznych R poszczególnych warstw odpowiadających temperaturom początku linearyzacji funkcji $\lambda(t)$

$$K = \frac{R_{o1}}{R_{o2}} . \tag{20}$$

- Wielkość efektu asymetrii może być dla ścianek cylindrycznych i kulistych odczytywana z wykresów $\frac{q_L}{q_P} = f(K, \vartheta, b_1, b_2)$ [1], [2], [3] przy uwzględnieniu wzorów (7) i (13) określających wielkość współczynnika K, a zatem określenie wielkości efektu asymetrii nie wymaga osobnych rozważań i obliczeń. Obliczenia i wykresy przedstawione w pracach [1], [2], [3] dla dwuskładnikowej ścianki płaskiej mogą być wykorzystywane dla dwuskładnikowych układów cylindrycznych i kulistych.

4. Dla tych samych wartości różnic temperatur ϑ i współczynników temperaturowych b_1 i b_2 oraz jednakowych współczynników K (to znaczy $K = K_c = K_k$) występuje ta sama wartość efektu asymetrii dla ścianek płaskich, cylindrycznych i kulistych; oczywiście pola temperatury w tych trzech układach będą różne przy tych samych temperaturach styku.

W celu zilustrowania tego zagadnienia analogicznie do rys.1 i 2 podano na rys.3 pole temperatury w dwuskładnikowym układzie płaskim. Wszystkie układy przedstawione na rysunkach rozważane były przy tych samych parametrach charakterystycznych λ_{o1}, λ_{o2}, b_1, b_2, ϑ, K i wynikających stąd identycznych efektach asymetrii.



Rys.3. Pole temperatury w dwuskładnikowym układzie płaskim: $\lambda_{o1} = 1$, $\lambda_{o2} = 2$, $b_1 = 10\cdot 10^{-3}$, $b_2 = -1{,}9\cdot 10^{-3}$, $\vartheta = 500$ ($t_1 = 500$, $t_2 = 0$), K = 2 ($\delta_1 = 20$, $\delta_2 = 20$). Wielkość efektu asymetrii

$$\frac{q_L}{q_P} = 1{,}883$$

5. Rozważania przedstawione w pracach [1], [2] i [3] dla jednowymiarowego układu dwuskładnikowego płaskiego mogą być na podstawie niniejszej pracy rozszerzone i zastosowane do dwuskładnikowych układów cylindrycznych i kulistych przez odpowiednie definiowanie przestrzennych współrzędnych zredukowanych i współczynników K, charakteryzujących układ dwuskładnikowy; w tym sensie jednowymiarowe układy dwuskładnikowe płaskie, cylindryczne i kuliste mogą być opisane przez te same zależności; zatem w badaniach efektu asymetrii w różnych jed-

nowymiarowych układach dwuskładnikowych możliwe jest posługiwanie się bardziej ogólnym modelem jednowymiarowego układu dwuskładnikowego.

BIBLIOGRAFIA

[1] G o g ó ł W.: Przewodzenie ciepła w ciałach niejednorodnych o przewodności cieplnej zmiennej z temperaturą. Biul. Inf. Instytutu Techniki Cieplnej nr 18, Warszawa 1969.

[2] G o g ó ł W.: Efekt asymetrii strumieni ciepła w ciałach dwuskładnikowych. Biul. Inf. Instytutu Techniki Cieplnej nr 20, Warszawa 1969.

[3] G o g ó ł W.: Przewodzenie ciepła w ośrodkach asymetrycznotropowych. Archiwum Budowy Maszyn nr 2, Warszawa 1970.

ЭФФЕКТ АСИММЕТРИИ В ОДНОМЕРНЫХ НЕОДНОРОДНЫХ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ И СФЕРИЧЕСКИХ СИСТЕМАХ В СЛУЧАЕ ЛИНЕЙНОЙ ЗАВИСИМОСТИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ ОТ ТЕМПЕРАТУРЫ

К р а т к о е   с о д е р ж а н и е

Теоретически доказывается существование асимметрии тепловых противоточных потоков в одномерных цилиндрических и сферических неоднородных системах в установившемся режиме теплопередачи для случая, когда теплопроводность двух тел зависит линейно от температуры.

Определяется величина эффекта асимметрии и поле температуры в цилиндрических и сферических системах, а полученные результаты сравниваются с величинами, получаемыми в случае плоской системы (системы двух плоских неограниченных плит).

THE EFFECT OF ASYMMETRY IN THE TWO-COMPOSED ONE-DIMENSIONAL CYLINDRICAL AND SPHERICAL SYSTEMS CONSIDERING LINEAR DEPENDENCY OF THERMAL CONDUCTIVITY ON TEMPERATURE

S u m m a r y

The effect of asymmetry of the rate of heat flows in two opposite directions in one-dimensional two-composed cylindrical and spherical systems in steady-state heat conduction is theoretically obtained. Thermal conductivities of both bodies depend lineary on temperature.

The value of the effect of asymmetry and temperature fields in these systems are determined and compared with the values of the effect of asymmetry and temperature fields in one-dimensional plane system (two parallel plane plates).

Rękopis dostarczono 16.5.1977 r.