BIULETYN INFORMACYJNY INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Nr 45 1977

doc. dr hab. inż. Michał Podowski

Instytut Techniki Cieplnej
Politechniki Warszawskiej

ANALIZA RÓWNANIA OPERATOROWEGO Z OPERATOREM RÓŻNICZKOWALNYM W PRZESTRZENI BANACHA I JEJ ZASTOSOWANIE DO BADANIA MODELU DYNAMIKI REAKTORA

Przeprowadzono analizę równania operatorowego o postaci

$$x = z + F(x),$$

gdzie z - element przestrzeni Banacha X, natomiast $F(x) \in X$ dla $x \in D \subset X$. W przypadku, gdy operator F jest m-krotnie różniczkowalny ($m \geqslant 3$), sformułowano warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązania rozważanego równania a także podano oszacowanie normy tego rozwiązania w zależności od normy elementu z.

Wyniki analizy teoretycznej zastosowano do badania punktowego modelu kinetyki reaktora z nieliniowym sprzężeniem zwrotnym typu temperaturowego. Otrzymano kryteria stabilności asymptotycznej rozwiązania stacjonarnego (tak dla układu autonomicznego, jak i z uwzględnieniem reaktywnościowego wymuszenia zewnętrznego).

1. WSTĘP

Wykorzystując do badania układów dynamicznych pojęcia analizy funkcjonalnej, można szeroką klasę tych układów opisać następującym równaniem operatorowym

$$\lambda x - F(x) = z, \tag{1.1}$$

gdzie: x, z - elementy przestrzeni Banacha,

X, F - operator określony na przestrzeni X i o wartościach z tej samej przestrzeni,

λ - parametr liczbowy.

Analizując własności rozwiązań równania (1.1) wykorzystuje się najczęściej przypadek, gdy operator F przekształca kulę $\bar{K}(0,r) \overset{df}{=} \{x: \|x\| \leq r\} \subset X$ w siebie oraz spełnia w tej kuli warunek Lipschitza

$$\|F(x_2) - F(x_1)\| \leq L \, \|x_2 - x_1\|. \tag{1.2}$$

Jeżeli $F(0) = 0$, to dla każdego λ takiego, że $|\lambda| > L$ i dla każdego z spełniającego nierówność

$$\|z\| \leq (|\lambda| - L)r$$

równanie (1.1) posiada w kuli $\bar{K}(0,r)$ dokładnie jedno rozwiązanie x^*. Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia Banacha o punkcie niezmienniczym operatora. Wprowadzając bowiem operator G zdefiniowany następująco

$$G(x) = \frac{1}{\lambda}(F(x) + z), \tag{1.3}$$

otrzymuje się na podstawie przyjętych założeń następujące nierówności:

$$\|G(x)\| \leq \frac{L}{|\lambda|} r + (1 - \frac{L}{|\lambda|})r = r \quad \text{dla } x \in \bar{K}(0,r),$$

$$\|G(x_2) - G(x_1)\| = \frac{1}{|\lambda|} \|F(x_2) - F(x_1)\| \leq \frac{L}{|\lambda|} \|x_2 - x_1\|$$

$$\text{dla } x_1, x_2 \in \bar{K}(0,r),$$

które dowodzą, że operator G przekształca kulę $\bar{K}(0,r)$ w siebie oraz spełnia w niej warunek Lipschitza ze stałą $L_1 = \frac{L}{|\lambda|} < 1$.

Opisana powyżej metoda, jakkolwiek pozwala sformułować warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania (1.1), to jednak nie daje możliwości (z wyjątkiem przypadku, gdy

$\sup_{x\in X} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|}<|\lambda|$) bezpośredniego oszacowania normy rozwiązania x^* w zależności od normy z. Oszacowanie takie można otrzymać nakładając na operator F nieco mocniejsze warunki, a mianowicie zakładając, że jest on m-krotnie ($m \geqslant 3$) różniczkowalny w zbiorze $D\subset X$.

Część pierwsza niniejszej pracy poświęcona jest właśnie analizie równania (1.1) z operatorem różniczkowalnym. Otrzymane wyniki zostały następnie wykorzystane do badania stabilności nieliniowego modelu dynamiki reaktora jądrowego.

2. ZASADY RÓŻNICZKOWANIA W PRZESTRZENI BANACHA

Przed przystąpieniem do właściwej analizy zostaną przytoczone podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące rachunku różniczkowego w przestrzeni Banacha (dowody twierdzeń można znaleźć np. w [1]).

D e f i n i c j a 2.1

Niech F oznacza operator określony na zbiorze $D(F)\subset X$, o wartościach z przestrzeni Y (X,Y - przestrzenie Banacha). Jeżeli istnieje taki operator liniowy i ograniczony $A\in(X\to Y)$, że

$$\lim_{h\to 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0) - A(h)}{\|h\|} = 0, \tag{2.1}$$

gdzie x_0 jest wewnętrznym punktem zbioru D(F), wówczas operator F jest różniczkowalny w punkcie x_0, a operator A nosi nazwę różniczki operatora F (w dalszym ciągu różniczka będzie oznaczana symbolem $(dF)_{x_0}$).

T w i e r d z e n i e 2.1

Jeżeli operatory F_1 i F_2 mają wspólną dziedzinę $D\subset X$ (a wartości ich należą do przestrzeni Y) oraz są różniczkowalne w punkcie x_0, wówczas operator $F = \alpha_1F_1 + \alpha_2F_2$ (α_1,α_2 - dowolne liczby) jest również różniczkowalny w punkcie x_0 oraz

$$(dF)_{x_0} = \alpha_1(dF_1)_{x_0} + \alpha_2(dF_2)_{x_0}. \tag{2.2}$$

T w i e r d z e n i e 2.2

Jeżeli operator F o dziedzinie $D(F) \subset X$ ma wartości zawarte w przestrzeni Y, natomiast operator G posiada dziedzinę $D(G) \subset Y$ a wartości zawarte w przestrzeni Z (X, Y, Z - przestrzenie Banacha), przy czym $F(x) \in D(G)$ dla każdego $x \in D(F)$, oraz operator F jest różniczkowalny w punkcie x_0 a operator G - w punkcie $y_0 = F(x_0)$, wówczas operator $H = G \cdot F$ jest również różniczkowalny w punkcie x_0 i

$$(dH)_{x_0} = (dG)_{y_0} (dF)_{x_0}, \tag{2.3}$$

co oznacza, że różniczka $(dH)_{x_0}$ jest superpozycją różniczki $(dF)_{x_0}$ oraz $(dG)_{F(x_0)}$.

T w i e r d z e n i e 2.3

Jeżeli operator F jest określony i różniczkowalny na zbiorze $D(F) \in X$ oraz wszystkie punkty o postaci $x = x_0 + \theta h$ (gdzie $\theta \in \langle 0,1 \rangle$) należą do zbioru $D(F)$, wówczas spełniona jest nierówność

$$\|F(x_0+h) - F(x_0)\| \leq c\|h\|, \tag{2.4}$$

gdzie

$$c = \sup_{\theta \in \langle 0,1 \rangle} \|(dF)_{x_0+\theta h}\|. \tag{2.5}$$

D e f i n i c j a 2.2

Niech będzie dany operator F taki, że $F(x) \in Y$ dla $x \in D(F) \subset X$. Operator ten jest z założenia różniczkowalny w pewnym otoczeniu P punktu $x_0 \in D(F)$, a więc dla każdego $x \in P$ istnieje operator $(dF)_x$. Jak łatwo zauważyć, dla każdego ustalonego h_1 wyrażenie

$$F_1(x, h_1) = (dF)_x(h_1) \tag{2.6}$$

definiuje operator określony na zbiorze P, o wartościach z przestrzeni Y. Jeżeli z kolei operator F_1 jest różniczkowalny (przy ustalonym h_1) w punkcie x_0, wówczas wyrażenie

$$(d^2F)_{x_0}(h_1,h_2) = (dF_1(x,h_1))_{x_0}(h_2) \tag{2.7}$$

nosi nazwę różniczki rzędu drugiego operatora F w punkcie x_0.

Uogólniając ostatnią definicję, można w sposób indukcyjny wprowadzić pojęcie różniczki dowolnego rzędu: jeżeli w otoczeniu punktu x_0 istnieje różniczka $(d^mF)_x$, wówczas różniczkę m+1-rzędu można określić wzorem

$$(d^{m+1}F)_{x_0}(h_1,\dots,h_m,h_{m+1}) = (dF_m(x,h_1,\dots,h_m))_{x_0}(h_{m+1}), \tag{2.8}$$

gdzie

$$F_m(x,h_1,\dots,h_m) = (d^mF)_x(h_1,\dots,h_m).$$

Własności różniczki m-tego rzędu można ująć w postaci następujących twierdzeń:

T w i e r d z e n i e 2.4

Różniczka $(d^mF)_{x_0}$ jest operatorem m-liniowym ograniczonym zmiennych $h_1,\dots,h_m$.

T w i e r d z e n i e 2.5

Jeżeli różniczka $(d^mF)_x$ istnieje w pewnym otoczeniu punktu x_0 i jest ciągła względem x w tym punkcie, wówczas $(d^mF)_{x_0}$ jest operatorem symetrycznym zmiennych $h_1,\dots,h_m$

$$(d^mF)_{x_0}(h_{i_1},\dots,h_{i_m}) = (d^mF)_{x_0}(h_1,\dots,h_m) \tag{2.9}$$

dla dowolnych permutacji $(i_1,\dots,i_m)$ ciągu $(1,\dots,m)$.

Dla operatorów m-krotnie różniczkowalnych (tzn. takich, dla których w każdym punkcie $x \in D(F)$ istnieje różniczka $(d^mF)_x$) można, podobnie jak w przypadku funkcji, wprowadzić wzór Taylora:

T w i e r d z e n i e 2.6

Niech będzie dany m-krotnie różniczkowalny operator F ($F(x) \in Y$ dla $x \in D(F) \subset X$). Jeżeli różniczka $(d^mF)_x$ jest ciągła w punkcie $x_0 \in D(F)$ a kula $K(x_0,r) \overset{df}{=} \{x : \|x-x_0\| < r\}$ zawarta jest w zbiorze $D(F)$, wówczas dla każdego elementu $h \in X$ takiego, że $\|h\| < r$, zachodzi wzór

$$F(x_0+h) = F(x_0) + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!}(d^nF)_{x_0} h^n + E_m(h), \tag{2.10}$$

przy czym

$$\lim_{h \to 0} \frac{1}{\|h\|^m} E_m(h) = 0, \tag{2.11}$$

gdzie

$$(d^nF)_{x_0} h^n \overset{df}{=} (d^nF)_{x_0} (\underbrace{h,\ldots,h}_{n\text{-razy}}). \tag{2.12}$$

Jeżeli ponadto istnieje różniczka (m+1)-rzędu, wówczas resztę $E_m(h)$ można przedstawić w pewnej określonej formie, zgodnie z następującym twierdzeniem:

T w i e r d z e n i e 2.7

Jeżeli określony poprzednio operator posiada różniczkę $(d^{m+1}F)_x$ ciągłą w każdym punkcie zbioru $D(F)$ oraz $K(x_0,r) \subset D(F)$, to dla każdego $h \in X$ takiego, że $\|h\| < r$, zachodzi wzór

$$F(x_0+h) = F(x_0) + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!}(d^nF)_{x_0} h^n + \\ + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^m}{m!} (d^{m+1}F)_{(x_0+\theta h)} h^{m+1} d\theta. \tag{2.13}$$

Dla operatorów posiadających różniczki dowolnego rzędu można wprowadzić pojęcie szeregu Taylora oraz sformułować pewne praktyczne kryteria rozwijalności.

T w i e r d z e n i e 2.8

Jeżeli operator F posiada różniczki dowolnego rzędu w zbiorze $D(F)$ oraz $K(x_0,r) \in D(F)$, wówczas dla każdego $h \in K(0,r)$, jeśli tylko spełniony jest warunek

$$\lim_{m \to \infty} \|E_m(h)\| = 0, \tag{2.14}$$

prawdziwa jest równość

$$F(x_0+h) = F(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!}(d^nF)_{x_0} h^n. \tag{2.15}$$

D o w ó d

Jeżeli $S_m(h)$ oznacza m-tą sumę cząstkową szeregu po prawej stronie równości (2.15), tzn.

$$S_m(h) = F(x_o) + \sum_{n=1}^{m} \frac{1}{n!}(d^nF)_{x_o} h^n,$$

wówczas

$$F(x_o+h) - S_m(h) = E_m(h).$$

Ponieważ z założenia wynika, że

$$\lim_{m\to\infty} \| F(x_o+h) - S_m(h) \| = 0,$$

więc ostatecznie

$$\lim_{m\to\infty} S_m(h) = F(x_o+h),$$

czego właśnie należało dowieść.

T w i e r d z e n i e 2.9

Jeżeli różniczki $(d^mF)_x$ są wspólnie ograniczone w kuli $K(x_o,r)$, tzn. $\sup\limits_{\|x-x_o\|<r} \| (d^mF)_x \| \leqslant M$ dla $m = 1,2,\ldots,$ wówczas operator F jest rozwijalny w szeregu Taylora wokół punktu x_o.

Dowód wynika bezpośrednio z nierówności

$$\| E_m(h) \| = \| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!}(d^nF)_{x_o} h^n \| \leqslant M \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!}\|h\|^n = M\, s_m,$$

gdzie s_m - m-ta reszta rozwinięcia $e^{\|h\|}$.

Z oszacowania

$$\| F(x_o+h) \| \leqslant \| F(x_o) \| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \| (d^nF)_{x_o} \| \, \| h \|^n$$

wynika ponadto, że szereg Taylora jest zbieżny bezwzględnie.

T w i e r d z e n i e 2.10

Jeżeli dziedzina $D(F) \subset X$ operatora F zawiera kulę $K(x_0,r)$, natomiast operator F posiada w tej kuli różniczki dowolnego rzędu oraz

$$M_n = \frac{1}{n!} \sup_{x \in K(x_0,r)} \|(d^n F)_x\| < \infty \qquad \text{dla } n=1,2,\ldots,$$

wówczas dla każdego $h \in X$ takiego, że $\|h\| < \min(r,R)$, gdzie

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{n \to \infty}} \sqrt[n]{M_n},$$

ma miejsce rozwinięcie (2.15), przy czym szereg jest zbieżny bezwzględnie.

Dowód jest analogiczny do dowodu kryterium Cauchy dla szeregów potęgowych.

Na zakończenie ogólnych rozważań dotyczących rachunku różniczkowego w przestrzeni Banacha można podać dwa wybrane przykłady różniczkowania:

a) operator liniowy:

$$F(x) = Ax,$$
$$(dF)_x(h_1) = Ah_1,$$
$$(d^2F)_x(h_1,h_2) = 0;$$

b) operator dwuliniowy:

$$F(x) = G_2(x,x) = G_2x^2,$$
$$(dF)_x(h_1) = G_2(h_1,x) + G_2(x,h_1),$$
$$(d^2F)_x(h_1,h_2) = G_2(h_1,h_2) + G_2(h_2,h_1),$$
$$(d^3F)_x(h_1,h_2,h_3) = 0.$$

W przypadku dowolnego operatora m-liniowego $F(x) = G_m x^m$ postępowanie jest analogiczne, przy czym dla każdego $m=1,2,\ldots$ prawdziwe jest równość

$$(d^{m+1}F)_x(h_1,\ldots,h_{m+1}) = 0.$$

3. ANALIZA WŁASNOŚCI ROZWIĄZAŃ RÓWNANIA OPERATOROWEGO

Niech będzie dane równanie (1.1), gdzie z jest elementem przestrzeni Banacha X, natomiast F - operatorem określonym na tej przestrzeni o wartościach również do niej należących, przy czym $F(0) = 0$.

Niech ponadto operator F będzie m-razy $(m \geqslant 3)$ różniczkowalny w zbiorze D zawierającym kulę $\bar{K}(0,r)$. Uwzględniając rozwinięcie

$$F(x) = (dF)_0 x + \sum_{p=2}^{m-1} \frac{1}{p!}(d^p F)_0 x^p + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{m-1}}{(m-1)!}(d^m F)_{\theta x}(x)d\theta, \quad (3.1)$$

prawdziwe dla dowolnego $x \in \bar{K}(0,r)$ i zakładając, że λ jest wartością regularną operatora liniowego $(dF)_0$ $(\lambda \notin sp\left[(dF)_0\right])$, można równanie (1.1) przepisać w postaci

$$x = z_1 + A\sum_{p=2}^{m-1} \frac{1}{p!}(d^p F)_0 x^p + A\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{m-1}}{(m-1)!}(d^m F)_{\theta x}(x)d\theta, \quad (3.2)$$

gdzie:

$$A = \left[\lambda I - (dF)_0\right]^{-1}, \quad (3.3)$$

$$z_1 = Az. \quad (3.4)$$

Analiza własności rozwiązań równania (3.2) zostanie przeprowadzona na podstawie wymienionego poprzednio twierdzenia Banacha o punkcie niezmienniczym operatora. Niech mianowicie dany będzie operator $\Phi_z(x)$, określony wzorem

$$\Phi_z(x) = z_1 + A\sum_{p=2}^{m-1} \frac{1}{p!}(d^p F)_0 x^p + A\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{m-1}}{(m-1)!}(d^m F)_{\theta x}(x)d\theta. \quad (3.5)$$

Jak łatwo zauważyć, operator ten spełnia w kuli $\bar{K}(0,r)$ następujące oszacowanie

$$\|\Phi_z(x)\| \leqslant \|z_1\| + \sum_{p=2}^{m-1} \frac{1}{p!}\|A\| \cdot \|(d^p F)_0\| \cdot \|x\|^p + \frac{1}{m!}\|A\| \sup_{\|x\| \leqslant r} \|(d^m F)_x\| \cdot \|x\|^m. \quad (3.6)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$a_p = \begin{cases} \frac{1}{p!} \|A\| \cdot \|(d^pF)_0\| & \text{dla } p=2,3,\ldots,m-2, \\ \\ \frac{1}{p!} \|A\| \sup\limits_{\|x\|\leq r} \|(d^pF)_x\| & \text{dla } p=m-1,m, \end{cases} \tag{3.7}$$

można nierówność (2.21) przepisać w postaci

$$\|\Phi_z(x)\| \leq \|z_1\| + \sum_{p=2}^{m} a_p \|x\|^p. \tag{3.8}$$

Jeżeli funkcja $f(y)$ jest, dla $y \in \langle 0,r \rangle$, określona wzorem

$$f(y) = \sum_{p=2}^{m} a_p y^p - y + \|z_1\|, \tag{3.9}$$

wówczas (jak wykazano w [2]) istnieją takie liczby dodatnie α i β, że dla każdego $z_1 \in \overline{K}(0,\alpha) \subset X$ równanie

$$f(y) = 0 \tag{3.10}$$

posiada w przedziale $\langle 0,\beta \rangle$ dokładnie jedno rozwiązanie y^* spełniające nierówność

$$y^* = \varphi(\|z_1\|) \leq \beta = \varphi(\alpha), \tag{3.11}$$

gdzie φ jest funkcją ciągłą i niemalejącą w przedziale $\langle 0,\alpha \rangle$ oraz spełniającą warunek $\varphi(0) = 0$.

Jeśli teraz $r \geq \beta$, wówczas $y^* \leq r$ dla każdego $z_1 \in \overline{K}(0,\alpha)$. Gdy natomiast $r < \beta$, wówczas jeśli $\|z_1\| \leq -\sum_{p=2}^{m} a_p r^p + r = \alpha_1$ $(\alpha_1 > 0)$, to również $y^*(z_1) \leq r$. Jeżeli więc $\|z_1\| \leq \min(\alpha_1,\alpha)$, to dla każdego $x \in \overline{K}(0,y^*)$ spełniona jest nierówność

$$\|\Phi_z(x)\| \leq \|z_1\| + \sum_{p=2}^{m} a_p \|x\|^p \leq \|z_1\| + \sum_{p=2}^{m} a_p (y^*)^p = y^*, \tag{3.12}$$

która z kolei dowodzi, że operator Φ_z przekształca kulę $\bar{K}(0,y^*)$ w siebie.

Aby dowieść, że operator Φ_z jest zwężający w kuli $\bar{K}(0,y^*)$, wystarczy przeanalizować następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}
\|\Phi_z(x_2) - \Phi_z(x_1)\| &= \Big\| A \sum_{p=2}^{m-2} \frac{1}{p!} \left[(d^pF)_0 x_2^{\,p} - (d^pF)_0 x_1^{\,p}\right] + \\
&+ A\int_0^1 \frac{(1-\theta)^{m-2}}{(m-2)!} \left[(d^{m-1}F)_{\theta x_2}(x_2) - (d^{m-1}F)_{\theta x_1}(x_1)\right] d\theta \Big\| \leq \\
&\leq \|A\| \sum_{p=2}^{m-2} \frac{1}{p!} \|(d^pF)_0 x_2^{\,p} - (d^pF)_0 x_1^{\,p}\| + \\
&+ \|A\| \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{m-2}}{(m-2)!} \|(d^{m-1}F)_{\theta x_2}(x_2) - (d^{m-1}F)_{\theta x_1}(x_1)\| \, d\theta \leq \\
&\leq \|x_2 - x_1\| \, \|A\| \sum_{p=2}^{m-2} \frac{1}{(p-1)!} \|(d^pF)_0\| \, (y^*)^{p-1} + \\
&+ \|A\| \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{m-2}}{(m-2)!} \|(d^{m-1}F)_{\theta x_2}(x_2) - (d^{m-1}F)_{\theta x_1}(x_1)\| \, d\theta,
\end{aligned} \tag{3.13}$$

przy czym dla $m=3$ pierwszy składnik (suma) ostatniego wyrażenia jest tożsamościowo równy zero. Drugi składnik można oszacować wykorzystując nierówność

$$\begin{aligned}
\|(d^{m-1}F)_{\theta x_2}(x_2) - (d^{m-1}F)_{\theta x_1}(x_1)\| &= \|(d^{m-1}F)_{\theta x_2}(x_2) - (d^{m-1}F)_{\theta x_1}(x_2) + \\
&+ (d^{m-1}F)_{\theta x_1}(x_2) - (d^{m-1}F)_{\theta x_1}(x_1)\| \leq \|(d^{m-1}F)_{\theta x_2}(x_2) - (d^{m-1}F)_{\theta x_1}(x_2)\| + \\
&+ \|(d^{m-1}F)_{\theta x_1}(x_2) - (d^{m-1}F)_{\theta x_1}(x_1)\| .
\end{aligned} \tag{3.14}$$

Z faktu, że różniczka p-tego rzędu jest w każdym ustalonym punkcie operatorem p-liniowym, wynika bezpośrednio nierówność

$$\|(d^{m-1}F)_{\theta x_1}(x_2) - (d^{m-1}F)_{\theta x_1}(x_1)\| \leq \|(d^{m-1}F)_{\theta x_1}\| \, \|x_2 - x_1\| \, m(y^*)^{m-1}. \tag{3.15}$$

Uwzględniając natomiast równość

$$(d^{m-1}F)_{\theta x_2}(x_2) = (d^{m-1}F)_{\theta x_2}\underbrace{(x_2,\ldots,x_2)}_{(m-1)\text{-razy}} = (d^{m-1}F)_{\theta x_1}(x_2,\ldots,x_2) +$$

$$+\int_0^1 (d^mF)_{\theta x_1+\zeta(\theta x_2-\theta x_1)}\left(\theta(x_2-x_1),x_2,\ldots,x_2\right)d\zeta, \tag{3.16}$$

otrzymuje się oszacowanie następujące

$$\left\|(d^{m-1}F)_{\theta x_2}(x_2)-(d^{m-1}F)_{\theta x_1}(x_2)\right\| < \int_0^1 \left\|(d^mF)_{\theta x_1+\zeta(\theta x_2-\theta x_1)}(\theta(x_2-x_1),x_2,\ldots$$

$$\ldots,x_2)\right\| d\zeta \leqslant \sup_{\|x\|\leqslant y^*} \left\|(d^mF)_x\right\| \left\|x_2-x_1\right\| \left\|x_2\right\|^{m-1}. \tag{3.17}$$

Podstawiając (3.15) i (3.17) do (3.14), a następnie do (3.13), oraz uwzględniając podstawienie (3.7) otrzymuje się (w oparciu o lemat 2.1 z [2]) nierówność

$$\left\|\Phi_z(x_2) - \Phi_z(x_1)\right\| \leqslant \left\|x_2-x_1\right\| \sum_{p=2}^{m} pa_p(y^*)^{p-1} < \left\|x_2-x_1\right\|, \tag{3.18}$$

z której wynika, że operator Φ_z jest zwężający w kuli $\bar{K}(0,y^*)$.

Jeżeli operator F jest rozwijalny w szereg Taylora wokół punktu $x = 0$, tzn., gdy można go przedstawić w postaci

$$F(x) = (dF)_0x + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!}\,(d^pF)_0x^p \tag{3.19}$$

dla $x \in \bar{K}(0,r)$, wówczas zagadnienie sprowadza się do rozważanego w [2]. Ostatecznie więc wyniki dotychczasowych rozważań można ująć w formę następującego twierdzenia:

T w i e r d z e n i e 3.1

Dane jest równanie o postaci (1.1), gdzie z - element przestrzeni Banacha X, F - operator określony na przestrzeni X o wartościach z tej samej przestrzeni, przy czym $F(0)=0$, λ - parametr liczbowy. Jeżeli spełnione są następujące warunki:

1) operator F jest m-krotnie $(3 \leq m \leq \infty)$ różniczkowalny w zbiorze $D \subset X$, przy czym różniczka $(d^mF)_x$ jest ciągła w zbiorze D;

2) kula domknięta $\bar{K}(0,r)$ należy do zbioru D $(r > 0)$;

3) $\lambda \notin sp(dF)_0$;

wówczas istnieje taka liczba $\Delta > 0$ oraz taka funkcja φ, ciągła i niemalejąca w przedziale $\langle 0, \Delta\rangle$ oraz spełniająca warunek $\varphi(0) = 0$, że dla każdego $z \in \bar{K}(0,\Delta)$ równanie (1.1) posiada w kuli $\bar{K}(0,\varphi(\Delta))$ dokładnie jedno rozwiązanie x^*, którego norma spełnia oszacowanie

$$\|x^*\| \leq \varphi(\|z\|), \tag{3.20}$$

przy czym zarówno stałą Δ, jak i wartości funkcji φ można każdorazowo obliczyć numerycznie. Rozwiązanie x^* jest granicą ciągu kolejnych przybliżeń

$$x_{n+1} = Az + A\sum_{p=2}^{m-1}\frac{1}{p!}(d^pF)_0x_n{}^p + A\int_0^1\frac{(1-\theta)^{m-1}}{(m-1)!}(d^mF)_{\theta x_n}(x_n)d\theta, \tag{3.21}$$

gdzie:

operator A określony jest wzorem (3.3),

x_0 jest dowolnym elementem kuli $\bar{K}(0, \varphi(\|z\|))$.

W przypadku, gdy operator F jest rozwijalny w szereg Taylora w kuli $\bar{K}(0,r)$, wówczas wzór (3.21) przybiera postać

$$x_{n+1} = Az + A\sum_{p=2}^{\infty}\frac{1}{p!}(d^pF)_0x_n^p. \tag{3.22}$$

Wartości funkcji $y = \varphi(\xi)$, o której mowa w twierdzeniu 3.1, można wyznaczyć znajdując dla każdego ustalonego ξ najmniejsze nieujemne rozwiązanie równania

$$y - \sum_{p=2}^{m} a_py^p = \|A\|\,\xi, \tag{3.23}$$

gdzie współczynniki a_p określone są wzorem (3.7).

W przypadku, gdy $r > \varphi(\Delta) = \beta$, wówczas współczynniki a_p dla $p = m - 1,m$ można nieco zmodyfikować

$$a_p = \frac{1}{p!} \|A\| \sup_{\|x\| \leqslant \beta} \|(d^pF)_x\| \qquad (p=m-1,m). \tag{3.24}$$

Jednym z założeń twierdzenia 3.1 jest co najmniej 3-krotna różniczkowalność operatora F w kuli $\bar{K}(0,r)$. W przypadku, gdy stopień różniczkowalności wynosi jeden lub dwa, oszacowania o postaci (3.20) otrzymać nie można, ale możliwe jest podanie warunków istnienia i jednoznaczności rozwiązania.

Niech w szczególności $m = 1$. Ponieważ dla dowolnych $x_1, x_2 \in \bar{K}(0,r)$ spełniona jest równość

$$F(x_2) = F(x_1) + \int_0^1 (dF)_{x_1+\theta(x_2-x_1)}(x_2-x_1)\, d\theta, \tag{3.25}$$

z której wynika z kolei nierówność

$$\|F(x_2) - F(x_1)\| \leqslant \sup_{\|x\| \leqslant r} \|(dF)_x\| \, \|x_2-x_1\| \tag{3.26}$$

oznaczająca, że operator F spełnia w kuli $\bar{K}(0,r)$ warunek Lipschitza ze stałą

$$L = \sup_{\|x\| \leqslant r} \|(dF)_x\|, \tag{3.27}$$

więc operator ten jest szczególnym przypadkiem rozpatrzonego na wstępie.

Jeżeli $m = 2$, wówczas oczywiście rozważania powyższe pozostają w mocy, ale możliwe jest ponadto podanie innych warunków istnienia i jednoznaczności, które z reguły nie pokrywają się z otrzymanymi poprzednio. Uwzględniając bowiem równość

$$F(x_2) = F(x_1) + (dF)_{x_1}(x_2-x_1) + \int_0^1 (1-\theta)(d^2F)_{x_1+\theta(x_2-x_1)}(x_2-x_1)d\theta, \tag{3.28}$$

słuszną dla dowolnych $x_1, x_2 \in \bar{K}(0,r)$, jak również warunek $F(0) = 0$, można równanie (1.1) zapisać w postaci

$$\left[\lambda I - (dF)_0\right]x = z + F_1(x), \tag{3.29}$$

gdzie operator F_1 określony jest wzorem

$$F_1(x) = \int_0^1 (1-\theta)(d^2F)_{\theta x}(x)d \ . \tag{3.30}$$

Operator ten spełnia w kuli $\bar{K}(0,r)$ warunek Lipschitza ze stałą

$$L_1 = r \sup_{\|x\| \leq r} \|(d^2F)_x\| \ . \tag{3.31}$$

Jeżeli więc $\lambda \notin sp[(dF)_0]$, wówczas równanie (3.29) przybiera ostatecznie postać

$$x = A\ F_1(x) + z_1, \tag{3.32}$$

gdzie A i Z_1 określone są wzorami (3.3) i (3.4), a operator

$$F_0 = A\ F_1 \tag{3.33}$$

spełnia w kuli $\bar{K}(0,r)$ warunek Lipschitza ze stałą

$$L_0 = \|A\|\ L_1. \tag{3.34}$$

4. ANALIZA STABILNOŚCI PUNKTOWEGO MODELU REAKTORA Z NIELINIOWYM SPRZĘŻENIEM TEMPERATUROWYM

Równania kinetyki punktowego modelu reaktora z uwzględnieniem wielostrefowego sprzężenia temperaturowego można zapisać w postaci:

$$\dot{n} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i C_i, \tag{4.1}$$

$$\dot{C}_i = \frac{\beta_i}{\Lambda} n - \lambda_i C_i \qquad (i=1,\ldots,N), \tag{4.2}$$

$$\dot{T}_k = \sum_{j=1}^{K} q_{kj} T_j + b_k n \qquad (k=1,\dots,K), \tag{4.3}$$

$$\rho = \rho_o + \rho_z(t) + \rho_f(n, T_1, \dots, T_k), \tag{4.4}$$

gdzie

$\rho_z(t)$ - reaktywność zewnętrzna.

Model opisany równaniami (4.1) ÷ (4.4) jest uogólnieniem postaci rozpatrywanej w [3], która dotyczyła przypadku liniowego sprzężenia zwrotnego.

Jeżeli n_o, C_{io}, T_{ko} oznaczają wartości zmiennych stanu w położeniu równowagi (punkt pracy reaktora), to oczywiście

$$\rho_o = - \rho_f(n_o, T_{1o}, \dots, T_{Ko}). \tag{4.5}$$

Stosując podstawienia:

$$x(t) = n(t) - n_o, \tag{4.6}$$

$$x_i(t) = C_i(t) - C_{io}, \tag{4.7}$$

$$y_k(t) = T_k(t) - T_{ko}, \tag{4.8}$$

oraz uwzględniając związki:

$$\frac{\beta_i}{\Lambda} n_o - \lambda_i C_{io} = 0, \tag{4.9}$$

$$\sum_{j=1}^{K} q_{kj} T_{jo} + b_k n_o = 0, \tag{4.10}$$

można równania (4.1) ÷ (4.4) sprowadzić do postaci:

$$\dot{x} = \frac{\rho}{\Lambda}(x+n_o) - \frac{\beta}{\Lambda} x + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i x_i, \tag{4.11}$$

$$\dot{x}_i = \frac{\beta_i}{\Lambda} x - \lambda_i x_i, \tag{4.12}$$

$$\dot{y}_k = \sum_{j=1}^{K} q_{kj} y_j + b_k x, \tag{4.13}$$

$$\varrho = \varrho_z(t) + \bar{\varrho}_f(x, y_1, \ldots, y_k), \tag{4.14}$$

gdzie

$$\bar{\varrho}_f(x, y_1, \ldots, y_K) = \varrho_f(n_o + x, T_{1o} + y_1, \ldots, T_{Ko} + y_k) - \\ - \varrho_f(n_o, T_{1o}, \ldots, T_{Ko}). \tag{4.15}$$

Rozwiązując równania (4.12) ze względu na x_i z warunkami $x_i(0) = x_{io}$ i podstawiając do (4.11), otrzymuje się

$$\dot{x} = \frac{\varrho}{\beta}(x + n_o) + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e^{-\lambda_i t} x_{io} - \frac{\beta}{\Lambda} x + \sum_{i=1}^{N} \frac{\beta_i \lambda_i}{\Lambda} \int_0^t e^{-\lambda_i (t-\tau)} x(\tau) d\tau. \tag{4.16}$$

Traktując z kolei (4.13) jako układ równań ze względu na $y_k(t)$, można jego rozwiązanie z warunkami $y_k(0) = y_{ko}$ zapisać w postaci wektorowej

$$y(t) = e^{Qt} y_o + \int_0^t e^{Q(t-\tau)} b\, x(\tau)\, d\tau, \tag{4.17}$$

gdzie:

$$\left.\begin{array}{l} y = \{y_k\}, \\ Q = \{q_{kj}\}, \\ b = \{b_k\}, \end{array}\right\} \quad \text{dla} \quad k, j = 1, \ldots, K,$$

przy czym $y_o = \{y_{ko}\}$,
lub też rozpisać na składowe

$$y_k(t) = f_k(t) + \int_0^t h_k(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau \quad \text{dla } k = 1, \ldots, K. \tag{4.18}$$

Wprowadzając teraz funkcję

$$\bar{\varrho}_f\left(t,x(t),\int_0^t h_1(t-\tau)x(\tau)\,d\tau,\ldots,\int_0^t h_K(t-\tau)x(\tau)\,d\tau\right) =$$

$$= \bar{\varrho}_f\left(x(t),f_1(t)+\int_0^t h_1(t-\tau)x(\tau)\,d\tau,\ldots,f_K(t)+\int_0^t h_K(t-\tau)x(\tau)\,d\tau\right) -$$

$$- \bar{\varrho}_f(0,f_1(t),\ldots,f_K(t)), \tag{4.19}$$

można reaktywność ϱ wyrazić wzorem

$$\varrho = \varrho_z(t) + \overset{*}{\varrho}(t) + \bar{\bar{\varrho}}_f\left(t,x(t),\int_0^t h_1(t-\tau)\,x(\tau)\,d\tau,\ldots,\right.$$

$$\left.\ldots,\int_0^t h_K(t-\tau(\,x(\tau)\,d\tau\right), \tag{4.20}$$

gdzie

$$\overset{*}{\varrho}(t) = \bar{\varrho}_f(0,f_1(t),\ldots,f_K(t)), \tag{4.21}$$

przy czym

$$\bar{\bar{\varrho}}_f(t,0,\ldots,0) = 0 \tag{4.22}$$

dla każdego $t \geqslant 0$.

Dalsze rozważania zostaną przeprowadzone przy założeniu, że części rzeczywiste wartości własnych macierzy $Q(t)$ są ujemne. Oznacza to, że $\lim\limits_{t\to\infty} f_k(t) = 0$ oraz $\int_0^\infty |h_k(t)|\,dt < \infty$ dla $k = 1,\ldots,K$.

Niech funkcja $\bar{\bar{\varrho}}_f(t,u_0,u_1,\ldots,u_K)$ będzie m-krotnie różniczkowalna $(m \geqslant 3)$ ze względu na $u_0,u_1,\ldots,u_K$ w całej $(K+1)$-wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Z poprzednich założeń wynika, że jej pochodne cząstkowe są funkcjami ograniczonymi ze względu na t dla $t \in (0,\infty)$. Niech ponadto

$$a_k(t) = a_k(f(t)) \overset{df}{=} \left.\frac{\partial \bar{\bar{\varrho}}_f(t,u)}{\partial u_k}\right|_{u=0} \quad \text{dla} \quad k=0,1,\ldots,K, \tag{4.23}$$

gdzie

$$u = \{u_0,u_1,\ldots,u_K\},\quad f(t) = \{f_1(t),\ldots,f_K(t)\}.$$

Każdą z funkcji a_k można oczywiście zapisać w postaci

$$a_k(t) = -\alpha_k + \bar{a}_k(t), \tag{4.24}$$

gdzie

$\bar{a}_k(0) = 0.$

Uwzględniając wprowadzone definicje i podstawiając (4.20) do równania (4.16), można je przekształcić do postaci

$$\dot{x} = \frac{\varrho_z(t) + \varrho^*(t)}{\Lambda} n_o + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e^{-\lambda_i t} x_{io} - \frac{\beta}{\Lambda} x(t) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{N} \frac{\beta_i \lambda_i}{\Lambda} \int_0^t e^{-\lambda_i(t-\tau)} x(\tau)\, d\tau - \frac{n_o}{\Lambda}\left[\alpha_o + \int_0^t h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau\right] +$$

$$+ \frac{\varrho_z(t) + \varrho^*(t)}{\Lambda} x(t) + \frac{n_o}{\Lambda}\left[\bar{a}_o(f(t))\, x(t) + \sum_{k=1}^{K} \bar{a}_k(f(t)) \int_0^t h_k(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau\right] +$$

$$+ g\left(t, x(t), \int_0^t h_1(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau, \ldots, \int_0^t h_K(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau\right), \tag{4.25}$$

gdzie:

$$h(t) = \sum_{k=1}^{K} \alpha_k h_k(t), \tag{4.26}$$

$$g(t, u_o, u_1, \ldots, u_K) = \frac{n_o}{\Lambda} \bar{\bar{\varrho}}_f(t, u_o, u_1, \ldots, u_K) - \sum_{k=0}^{K} a_k(t) u_k +$$

$$+ \frac{1}{\Lambda} u_o \bar{\bar{\varrho}}_f(t, u_o, u_1, \ldots, u_K), \tag{4.27}$$

przy czym

$$g(t, 0, 0, \ldots, 0) = 0, \tag{4.28}$$

oraz

$$\left.\frac{\partial g(t,u)}{\partial u_k}\right|_{u=0} = 0 \tag{4.29}$$

dla dowolnego $t \geqslant 0$ i $k = 0, 1, \ldots, K$.

Dalsza analiza równania (4.24) zostanie przeprowadzona w oparciu o definicje następujących przestrzeni Banacha [2]:

1) przestrzeń C, złożona z funkcji ciągłych i ograniczonych dla $t \geqslant 0$ z normą

$$\|x\|_C = \sup_{t \geqslant 0} |x(t)|,$$

2) przestrzeń ilorazowa K, której elementami są klasy elementów przestrzeni C różniące się o funkcję zbieżną od zera. Norma w przestrzeni K jest określona wzorem

$$\|x\|_K = \lim_{T\to\infty} \sup_{t\geq\infty} |x(t)|.$$

Ponieważ funkcja $g(t,u_0,u_1,\ldots u_K)$ jest z założenia różniczkowalna m-razy ze względu na $u_0,u_1,\ldots,u_K$, a wszystkie jej pochodne są funkcjami ciągłymi i ograniczonymi ze względu na t, więc można bez trudu wykazać, że operator F zdefiniowany wzorem

$$[F(x)](t) = g(t,x(t),\int_0^t h_1(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau,\ldots,\int_0^t h_K(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau) \quad (4.30)$$

przekształca przestrzeń C w siebie oraz jest w niej m-krotnie różniczkowalny. Zachodzi przy tym równość

$$\left[(d^pF)_\xi x^p\right](t) = \sum_{\gamma_0+\gamma_1+\ldots+\gamma_K=p} \frac{\partial^p g(t,u)}{\partial u_0^{\gamma_0}\,\partial u_1^{\gamma_1}\ldots\,\partial u_K^{\gamma_K}}\Bigg|_{\substack{u_0=\xi(t)\\ u_k=\int_0^t h_k(t-\tau)\,\xi(\tau)\,d\tau\\ (k=1,\ldots,K)}} \quad (4.31)$$

$$x(t)\prod_{k=1}^{K}\int_0^t h_k(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau$$

dla p = 1,...,m. Z równości (4.28) i (4.29) wynika ponadto, że $F(0) = 0$ i $(dF)_0 \equiv 0$.

Wprowadzając oznaczenia

$$z = z(t) = \frac{\varrho_z(t)+\varrho^*(t)}{\Lambda}\, n_0 + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i e^{-\lambda_i t}\, x_{io}, \quad (4.32)$$

$$Bx\,(t) = \frac{\varrho_z(t)+\varrho^*(t)+n_0\bar{a}_0(t)}{\Lambda}\, x(t) + \sum_{k=1}^{K}\frac{n_0\bar{a}_k(t)}{\Lambda}\int_0^t h_k(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau, \quad (4.33)$$

łatwo można zauważyć, że jeśli $\varrho_z(t)$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną dla $t\in(0,\infty)$, wówczas $z\in C$ a B jest operatorem liniowym i ograniczonym, przekształcającym przestrzeń C w siebie ($B\in(C\to C)$). Norma operatora B spełnia oszacowanie

$$\|B\|_C \leqslant \frac{1}{\Lambda}\sup_{t\geqslant 0}\left[\left|\varrho_z(t)+\varrho^*(t)\right| + n_o\bar{a}_o(t)\right| + n_o\left|\bar{a}_k(t)\right|\int_0^\infty \left|h_k(t)\right| dt\Big], \qquad (4.34)$$

przy czym z ciągłej zależności funkcji $\bar{a}_k$ $(k=0,1,\ldots,K)$ od y_{ok} $(k=1,\ldots,K)$ wynika, że jeśli tylko wartości $|y_{ok}|$ oraz $\sup\limits_{t\geqslant 0} |\varrho_z(t)|$ są dostatecznie małe, wówczas normę $\|B\|_C$ można uczynić dowolnie małą.

Ponieważ, jak wykazano w [4], jeśli tylko

$$\inf_{\omega\in(-\infty,\infty)} \left|\frac{\omega^2}{\Lambda}\sum_{i=1}^{N}\frac{\beta_i}{\lambda_i^2+\omega^2} + \frac{n_o}{\Lambda}\left[\alpha_o + \mathrm{Re}\, H(j\omega)\right]\right| > 0, \qquad (4.35)$$

gdzie $H(s)$ - transformata Laplace'a funkcji $h(t)$, wówczas rozwiązanie równania

$$\dot{x} + \frac{\beta}{\Lambda}x - \sum_{i=1}^{N}\frac{\beta_i\lambda_i}{\Lambda}\int_0^t e^{-\lambda_i(t-\tau)}\, x(\tau)\, d\tau + \frac{n_o}{\Lambda}\left[\alpha_o + \int_0^t h(t-\tau)\, x(\tau)\, d\tau\right] = w(t) \qquad (4.36)$$

z warunkiem $x(0) = x_o$ można przedstawić w postaci

$$x(t) = k(t)x_o + \int_0^t k(t-\tau)\, w(\tau)\, d\tau, \qquad (4.37)$$

gdzie $\lim\limits_{t\to\infty} k(t) = 0$ oraz $\int_0^t |k(t)|\, dt < \infty$, więc równanie (4.25) można przekształcić w następujące równanie operatorowe (określone w przestrzeni C)

$$x = z_1 + A_1Bx + A_1F(x), \qquad (4.38)$$

gdzie:

$$[A_1w](t) = \int_0^t k(t-\tau)\, w(\tau)\, d\tau, \qquad (4.39)$$

$$z_1(t) = [A_1z](t) + k(t)x_o, \qquad (4.40)$$

przy czym $\|A_1\|$ $(C\to C)$ oraz

$$\|A_1\|_C = \int_0^\infty |k(t)|\, dt. \qquad (4.41)$$

Jeżeli ponadto $\|A_1B\|_C < 1$ oraz

$$A_2 = (I - A_1B)^{-1}, \tag{4.42}$$

wówczas $A_2 \in (C \to C)$ i

$$\|A_2\|_C \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A_1B\|^n, \tag{4.43}$$

a równanie (4.38) można przepisać w postaci

$$x = z_2 + AF(x), \tag{4.44}$$

gdzie:

$$z_2 = A_2 z_1, \tag{4.45}$$

$$A = A_2 A_1. \tag{4.46}$$

Ponieważ norma $\|z_2\|_C$ zależy w sposób ciągły od wartości $|x_o|$, $|x_{oi}|$, $|y_{ok}|$ i $\sup\limits_{t \geq 0} |\varrho_z(t)|$, a jeżeli $x_o = x_{oi} = y_{ok} = \sup\limits_{t \geq 0} |\varrho_z(t)| = 0$ dla $i = 1,\ldots,N$, $k=1,\ldots,K$, to $\|z_2\|_C = 0$, więc uwzględniając twierdzenie 3.1, otrzymuje się dowód twierdzenia następującego:

T w i e r d z e n i e 4.1

Jeżeli:

1) części rzeczywiste wartości własnych macierzy $Q(t) = \{q_{kj}(t)\}$ są ujemne,

2) $\inf\limits_{\omega \in (-\infty,\infty)} [\alpha_o + \mathrm{Re}\, H(j\omega)] > 0$,

3) funkcja $\varrho_f(t, u_o, u_1, \ldots, u_K)$ jest co najmniej trzykrotnie różniczkowalna ze względu na $u_o, u_1, \ldots, u_K$, a jej pochodne są funkcjami ciągłymi i ograniczonymi ze względu na t dla $t \in \langle 0, \infty)$,

4) $\varrho_z(t)$ jest funkcją ciągłą i ograniczoną dla $t \in \langle 0, \infty)$,

wówczas istnieje taka liczba $\mu > 0$ i taka funkcja $\varphi(\xi)$, ciągła i niemalejąca dla $\xi \in \langle 0, \mu\rangle$ oraz spełniająca warunek $\varphi(0) = 0$, że jeśli

$$\xi = \sup_{t \geqslant 0} |k(t)| \cdot |x_o| + \int_0^\infty |k(t)|\, dt \left\{ \frac{n_o}{\Lambda} \left[\sup_{t \geqslant 0} |\varrho_z(t)| + \sup_{t \geqslant 0} |\varrho^*(t)| \right] + \right.$$

$$\left. + \sum_{i=1}^{N} \lambda_i |x_{io}| \right\} \leqslant \mu \qquad (4.47)$$

wówczas

$$\sup_{t \geqslant 0} |x(t)| \leqslant \varphi(\xi). \qquad (4.48)$$

Z równań (4.12) i (4.17) wynika ponadto, że wówczas:

$$\sup_{t \geqslant 0} |x_i(t)| \leqslant |x_{io}| + \frac{\beta_i}{\Lambda \lambda_i} \sup_{t \geqslant 0} |x(t)|, \qquad (4.49)$$

$$\sup_{t \geqslant 0} \|y(t)\|_2 \quad \sup_{t \geqslant 0} \|e^{Qt}\|_2 \|y_o\|_2 + \|b\|_2 \cdot \int_0^\infty \|e^{Qt}\|_2 \, dt \sup_{t \geqslant 0} |x(t)|, \qquad (4.50)$$

gdzie

symbol $\| \ \|_2$ oznacza normę euklidesową.

Ponieważ jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 4.1, wówczas F można traktować jako operator m-krotnie różniczkowalny w przestrzeni K, natomiast B i A_1 - jako operatory liniowe i ograniczone przekształcające przestrzeń K w siebie, przy czym jeżeli ponadto $\lim_{t \to \infty} \varrho_z(t) = 0$, wówczas również $\lim_{t \to \infty} z(t) = 0$ ($\|z\|_K = 0$) oraz $\|B\|_K = 0$ (ponieważ $\lim_{t \to \infty} \bar{a}_k(t) = 0$ dla $k = 0,1,\ldots,K$), więc wynika stąd bezpośrednio dowód twierdzenia następującego:

T w i e r d z e n i e 4.2

Jeżeli spełnione są założenia 4.1 oraz $\lim_{t \to \infty} \varrho_z(t) = 0$, wówczas dla dowolnych wartości początkowych x_o, x_{io}, y_{ko} spełniających (4.47) również $x(t)$, $x_i(t)$ oraz $y_k(t)$ są zbieżne w nieskończoności do zera.

Otrzymane dotychczas wyniki można wykorzystać do sformułowania dla rozważanego modelu reaktora warunków stabilności w sensie Lapunowa. Uwzględniając bowiem fakt, że jeśli $\varrho_z(t) \equiv 0$, wówczas równania (4.11) ÷ (4.14) tworzą układ autonomiczny, otrzymuje się:

T w i e r d z e n i e 4.3

Jeżeli spełnione są założenia 1) - 3) twierdzenia 4.1, wówczas rozwiązanie stacjonarne układu (4.1) ÷ (4.4) (punkt pracy reaktora) jest stabilne asymptotycznie.

Jeżeli natomiast $\rho_z(t) \not\equiv 0$, wówczas uwzględniając definicję stabilności przy wymuszeniu [3], otrzymuje się

T w i e r d z e n i e 4.4

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 4.3, wówczas rozwiązanie stacjonarne układu (4.1) ÷ (4.4) jest stabilne asymptotycznie przy wymuszeniu $\rho_z(t)$.

BIBLIOGRAFIA

[1] K o ł o d z i e j W.: Wybrane rozdziały analizy matematycznej. PWN. Warszawa 1970.

[2] P o d o w s k i M.: A new method of studying a certain class of systems of integral equations describing the dynamics of physical processes. Arch. Mech. 5, 1974.

[3] P o d o w s k i M.: Analiza pewnego równania operatorowego i jej zastosowanie do badania stabilności reaktorów jądrowych. Biuletyn ITC nr 37, 1972.

[4] P o d o w s k i M.: An analysis of a certain type of integro-differential equation describing the dynamics of nonlinear systems. Bull.Acad.Polon.Sci., Sér.Sci.Techn., 21, nr 7-8, 1973.

АНАЛИЗ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИ РУЕМЫМ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕ ДОВАНИЯМ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ РЕАКТОРА

К р а т к о е с о д е р ж а н и е

Проводится анализ операторного уравнения вида

$$\lambda = z + F(x),$$

где z - элемент пространства Банаха X, а $F[x] \in X$ для $x \in D \subset X$. Для случая, когда F имеет производную порядка m $(m \geqslant 3)$, формулируются условия существования и единственности решения рассматриваемого уравнения, а также дается

оценка нормы этого решения в зависимости от нормы элемента z. Результаты теоретического анализа были использованы при исследовании точечной модели кинетики реактора с нелинейной обратной температурной связью. Были при этом установлены критерии асимптотической устойчивости стационарного решения (как для автономной системы, так и с учетом реактивного внешнего вынуждения).

ANALYSIS OF AN OPERATOR EQUATION WITH THE DIFFERENTIABLE IN BANACH SPACE OPERATOR AND ITS APPLICATION TO THE INVESTIGATION OF REACTOR MODEL DYNAMICS

S u m m a r y

An operator equation of the following form

$$\lambda x = z + F(x),$$

where z - an element of Banach space X and $F(x) \in X$ for $x \in D \subset X$, is investigated. In the case of m-order differentiable operator F $(m \geqslant 3)$, conditions of existence and uniqueness of a solution of considered equation are formulated and an estimation of the norm of this solution as a function of the norm z is obtained.

The results of theoretical analysis are applied to the point reactor model with nonlinear, temperature-type reactivity feedback. The conditions of the asymptotic stability for the autonomous system as well as for the system including the external reactivity oscilations, are formulated.