

Mgr inż. Jan Łach
Instytut Techniki Ciepłej

ZASTOSOWANIE ZMODYFIKOWANEJ METODY KANTOROWICZA DO WYZNACZENIA NIEUSTALONEGO POLA TEMPERATURY

1. Wstęp

Analiza nieustalonych procesów wymiany ciepła w skomplikowanych układach fizycznych prowadzi do poszukiwania rozwiązania równania zachowania energii z warunkami brzegowymi pierwszego, drugiego lub trzeciego rodzaju, za pomocą jednej z trzech następujących metod:

- a) metody dokładnej,
- b) przybliżonej metody analitycznej,
- c) przybliżonej metody numerycznej.

Rozwiązanie dokładne jest możliwe do uzyskania w stosunkowo niewielu, prostych przypadkach i wyraża się w postaci szeregu nieskończonego, co jest mało użyteczne w praktyce inżynierskiej. Wśród wymienionych metod przybliżonych największe znaczenie posiada przybliżona metoda analityczna, ponieważ pozwala znaleźć zamknięte wyrażenia arytmetyczne, określające wartości temperatury w dowolnym punkcie rozpatrywanego układu i w dowolnej chwili t , bez stosowania techniki iteracyjnej. Wyrażeń takich nie dostarczają przybliżone metody numeryczne. Do przybliżonych metod analitycznych należą metody bezpośrednie, jak np.: metody Ritza, Trefftza, Kantorowicza. Wariacyjne ujęcie procesu nieustalonej wymiany ciepła umożliwia zastosowanie jednej z tych metod [1], [3], [4], [5].

W niniejszym artykule, do wyznaczenia nieustalonego pola temperatury, stosuje się metodę Kantorowicza, ale uogólnioną

na przypadek operatorów parabolicznych. Rezygnuje się z intuicyjnej metody doboru ciągu funkcji przybliżających. Ciąg ten określa się z eliptycznej części wyjściowego równania różniczkowego z odpowiednimi warunkami brzegowymi [5]. Dalsze postępowanie jest analogiczne jak w przypadku stosowania metody Kantorowicza dla operatorów eliptycznych. Ze względu na możliwość konfrontacji otrzymanego tą metodą rozwiązania przybliżonego z rozwiązaniem dokładnym do obliczeń numerycznych wybrano zagadnienie przewodzenia ciepła w stanie nieustalonym w płycie nieskończonej o grubości δ , z warunkiem brzegowym trzeciego rodzaju. W [4] przeanalizowano podobny problem, ale przy warunku brzegowym pierwszego rodzaju i przy użyciu metod Ritza i Trefftza oraz metody Galerkina w konkretnym przypadku numerycznym.

2. Sformułowanie problemu wariacyjnego dla zagadnienia brzegowego trzeciego rodzaju

Rozważa się zjawisko nieustalanej wymiany ciepła między dowolnym obszarem przestrzennym D , ograniczonym powierzchnią F , i otoczeniem. Przyjmuje się, że ośrodek wypełniający obszar D charakteryzuje się stałymi wartościami parametrów fizycznych:

$$\lambda(x, y, z, T) \equiv \lambda = \text{const}, \quad (1)$$

$$c_p(x, y, z, T) \equiv c_p = \text{const}, \quad (2)$$

$$\rho(x, y, z, T) \equiv \rho = \text{const}, \quad (3)$$

oraz brakiem wewnętrznych źródeł ciepła

$$q_v(x, y, z, t) = 0. \quad (4)$$

Powierzchnia F może być powierzchnią złożoną z k różnych powierzchni

$$F = \sum_{j=1}^k F_j, \quad (5)$$

na których intensywność wymiany ciepła z otoczeniem jest niejednakowa ale odbywa się zgodnie z równaniem Newtona:

$$\lambda \underline{n} \text{ grad} [T(\underline{r}_{F_j})] + \alpha(\underline{r}_{F_j}) [T(\underline{r}_{F_j}, t) - T_o(\underline{r}_{F_j})] = 0, \quad (6)$$

$$[j = 1, 2, \dots, k].$$

Równanie to jest definicją warunków brzegowych trzeciego rodzaju, które są liniową kombinacją warunków brzegowych pierwszego i drugiego rodzaju. Pole temperatury, w ośrodku wypełniającym obszar D , jest określone równaniem zachowania energii, które w rozważanym przypadku ma postać parabolicznego równania różniczkowego cząstkowego drugiego rzędu

$$\lambda \text{ div}(\text{grad } T) - \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} = 0. \quad (7)$$

Warunki brzegowe są dane w równaniu (6), a rozkład temperatury wewnątrz obszaru D w chwili $t = 0$ jest określony warunkiem początkowym

$$T_i(\underline{r}, t=0) = T_{i0}(\underline{r}) \quad \wedge \quad 0 < \underline{r} < \underline{r}_F. \quad (8)$$

Rozwiązanie tak postawionego problemu jest równoważne zadaniu rachunku wariacyjnego na poszukiwanie ekstremum funkcjonału

$$I < T > = \iiint_V \left[\frac{1}{2} \lambda (\text{grad } T)^2 + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} T \right] dV +$$

$$+ \sum_{j=1}^k \iint_{F_j} \alpha(\underline{r}_{F_j}) \left[\frac{1}{2} T^2(\underline{r}_{F_j}, t) - T_o(\underline{r}_{F_j}) T(\underline{r}_{F_j}, t) \right] dF_j =$$

$$= \text{Extremum}. \quad (9)$$

Można pokazać, że równanie (7) jest dla tego funkcjonału równaniem Eulera - Lagrange'a. W tym celu funkcjonał (9) zapisuje się jako

$$I < T > = \iiint_V F(T, \frac{\partial T}{\partial x}, \frac{\partial T}{\partial y}, \frac{\partial T}{\partial z}, \frac{\partial T}{\partial t}) dV. \quad (10)$$

Jeśli wprowadzi się oznaczenia:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial x} = T_x, \quad \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial z} = T_z, \\ \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial y} = T_y, \quad \frac{\partial T(x,y,z,t)}{\partial t} = T_t, \end{array} \right.$$

to równanie Eulera - Lagrange'a ma wtedy postać

$$\begin{aligned} & \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{\partial F(T_x, T_y, T_z, T_t, T)}{\partial T_x} \right] + \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{\partial F(T_x, T_y, T_z, T_t, T)}{\partial T_y} \right] + \\ & + \frac{\partial}{\partial z} \left[\frac{\partial F(T_x, T_y, T_z, T_t, T)}{\partial T_z} \right] - \frac{\partial F(T_x, T_y, T_z, T_t, T)}{\partial T} = 0. \end{aligned} \quad (11)$$

Wykonując odpowiednie operacje otrzymuje się rzeczywiście równanie (7), co dowodzi poprawności budowy funkcjonau (9).

Realizacja ekstremum całki wariacyjnej wymaga, aby spełniony był zespół warunków, który składa się z:

a) warunku Eulera:

$$\begin{aligned} \forall I < T > \equiv & \iiint_V \left[\lambda \operatorname{grad} T \operatorname{grad} \delta T + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \delta T \right] dV + \\ & + \sum_{j=1}^k \iint_{F_j} \alpha(r_{F_j}) \left[T(r_{F_j}, t) - T_0(r_{F_j}) \right] \delta T dF_j = 0; \end{aligned} \quad (12)$$

b) silniejszego warunku Legendre'a:

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{\partial^2 F(T_x, T_y, T_z, T_t, T)}{\partial T_x^2} = \lambda > 0, \\ \frac{\partial^2 F(T_x, T_y, T_z, T_t, T)}{\partial T_y^2} = \lambda > 0, \\ \frac{\partial^2 F(T_x, T_y, T_z, T_t, T)}{\partial T_z^2} = \lambda > 0. \end{array} \right. \quad (13)$$

Wyrażenie na ograniczoną wariację można przekształcić do innej postaci. W tym celu stosuje się twierdzenie Greena - Gaussa - Ostrogradzkiego

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{div}(\delta T \operatorname{grad} T) dV &\equiv \iiint_V \left[\operatorname{grad} \delta T \operatorname{grad} T + \right. \\ &\left. + \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) \delta T \right] dV = \iint_F \underline{n} \operatorname{grad} T \delta T dF, \end{aligned} \quad (14)$$

z którego wynika, że

$$\begin{aligned} \iiint_V \operatorname{grad} \delta T \operatorname{grad} T dV &= - \iiint_V \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) \delta T dV + \\ &+ \iint_F \underline{n} \operatorname{grad} T \delta T dF. \end{aligned} \quad (15)$$

Po podstawieniu (15) do (12) i uwzględnieniu (5), warunek Eulera przedstawia się następująco

$$\begin{aligned} \delta I < T > &\equiv \iiint_V \left[- \lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) + \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] \delta T dV + \\ &+ \sum_{j=1}^k \iint_{F_j} \left\{ \lambda \underline{n} \operatorname{grad} \left[T(\underline{r}_{F_j}) \right] + \right. \\ &\left. + \alpha(\underline{r}_{F_j}) \left[T(\underline{r}_{F_j}, t) - T_o(\underline{r}_{F_j}) \right] \right\} \delta T dF_j = 0. \end{aligned} \quad (16)$$

Aby otrzymać ostateczne wyrażenia na $\delta I < T >$ należy w (16) uwzględnić warunki brzegowe (6). Znikają wtedy całki powierzchniowe i na tej podstawie otrzymuje się

$$\delta I < T > \equiv \iiint_V \left[\lambda \operatorname{div}(\operatorname{grad} T) - \rho c_p \frac{\partial T}{\partial t} \right] \delta T dV = 0. \quad (17)$$

Do rozwiązania tego problemu można zastosować jedną z metod bezpośrednich. Pokazane zostanie zastosowanie metody Kantorowicza, uogólnionej na przypadek operatorów parabolicznych i zmodyfikowanej, jeżeli chodzi o dobór odpowiednich funkcji przybliżających. Całkowanie wyrażenia (17) jest możliwe po

uprzednim założeniu przestrzennego rozkładu temperatury w postaci kombinacji liniowej

$$\tilde{T}(x, y, z, t) = T_0(x, y, z, t) + \sum_{i=1}^n k_i(t) f_i(x, y, z), \quad (18)$$

gdzie:

$\tilde{T}(x, y, z, t)$ - założony rozkład temperatury,

$T_0(x, y, z, t)$ - funkcja spełniająca niejednorodne warunki brzegowe (6),

$f_i(x, y, z)$ - ciąg funkcji przybliżających spełniających jednorodne warunki brzegowe drugiego rodzaju,

$k_i(t)$ - nieokreślone w pierwszym etapie rozważań współczynniki funkcyjne.

Po wstawieniu (18) do (17) i wykonaniu całkowania w odpowiednich granicach otrzymuje się układ $(n + 1)$ liniowych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu

$$\iiint_V \left[\lambda \left(\frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \tilde{T}}{\partial z^2} \right) - \rho c_p \frac{\partial \tilde{T}}{\partial t} \right] \delta \tilde{T} dx dy dz = 0, \quad (19)$$

z którego wyznacza się współczynniki funkcyjne.

Stałe całkowania związane są jednoznacznie z warunkiem początkowym (8). Wyznacza się je z warunku, aby całka z kwadratu odchylenia od zadanej funkcji, która w rozpatrywanym przypadku jest warunkiem początkowym, osiągała wartość minimalną

$$\iiint_V \left[\tilde{T}(x, y, z, t=0) - T_i(x, y, z) \right]^2 dx dy dz = \text{Minimum}. \quad (20)$$

Odpowiada to układowi $(n + 1)$ liniowych równań algebraicznych

$$\iiint_V \left[\tilde{T}(x, y, z, t=0) - T_i(x, y, z) \right] \delta \tilde{T} dx dy dz = 0. \quad (21)$$

Rozwiązanie tak sformułowanego zagadnienia podstawione do (18) daje poszukiwany przybliżony rozkład temperatury.

3. Wyznaczenie nieustalonego pola temperatury w płycie nieskończonej

Jako przykład ilustrujący przebieg obliczeń przy zastosowaniu zmodyfikowanej metody Kantorowicza dla operatorów parabolicznych rozpatrzone zostanie zjawisko konwekcyjnego chłodzenia równomiernie nagrzanej, jednorodnej płyty nieskończonej bez wewnętrznych źródeł ciepła, która znajduje się w ośrodku o stałej temperaturze. Proces nieustalonej wymiany ciepła jest w tym przypadku określony równaniem Fouriera

$$\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} - \frac{1}{\alpha} \frac{\partial T}{\partial t} = 0, \quad (22)$$

z warunkiem początkowym

$$T(x, t=0) \equiv T_i = \text{const}; \quad \bigwedge_x 0 < x < \delta, \quad (23)$$

i z warunkami brzegowymi:

$$\lambda \frac{\partial T(x=0, t)}{\partial x} - \alpha [T(x=0, t) - T_0] = 0, \quad \bigwedge_t t > 0, \quad (24)$$

$$\frac{\partial T(x = \delta, t)}{\partial x} = 0, \quad \bigwedge_t t > 0. \quad (25)$$

Po przejściu na wielkości bezwymiarowe, które zdefiniowano w oznaczeniach, problem (22) + (25) sprowadza się do następującego zagadnienia:

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \vartheta}{\partial Fo} = 0, \quad (26)$$

$$\vartheta(\eta, Fo=0) = \mu, \quad \bigwedge_\eta 0 < \eta < 1, \quad (27)$$

$$\frac{\partial \vartheta(\eta=0, Fo)}{\partial \eta} - Bi [\vartheta(\eta=0, Fo) - 1] = 0, \quad \bigwedge_{Fo} Fo > 0, \quad (28)$$

$$\frac{\partial \vartheta(\eta=1, Fo)}{\partial \eta} = 0, \quad \bigwedge_{Fo} Fo > 0. \quad (29)$$

Posiada ono rozwiązanie ściśle w postaci szeregu nieskończonego

$$\psi(\eta, Fo) = 1 + (\mu - 1) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2 \sin \delta_n \cos [\delta_n (1 - \eta)]}{\delta_n + \sin \delta_n \cos \delta_n} \exp(-\delta_n^2 Fo). \quad (30)$$

Uzyskuje się je stosując metodę rozdzielania zmiennych [6].

Dla znalezienia przybliżonego rozwiązania problemu (26) + (29) zostanie zastosowana zmodyfikowana metoda Kantorowicza. Zakłada się, że poszukiwane rozwiązanie daje się przedstawić w formie kombinacji liniowej

$$\tilde{\psi}(\eta, Fo) = \psi_0(\eta, Fo) + \sum_{i=1}^n \psi_i(\eta, Fo), \quad (31)$$

przy czym:

- a) $\psi_0(\eta, Fo)$ - funkcja, która spełnia niejednorodne warunki brzegowe (28) i (29),
- b) $\psi_i(\eta, Fo)$ - funkcje, które spełniają jednorodne warunki brzegowe:

$$\frac{\partial \psi_i(\eta = 0, Fo)}{\partial \eta} = 0, \quad \bigwedge_{Fo} Fo > 0, \quad (32)$$

$$\frac{\partial \psi_i(\eta = 1, Fo)}{\partial \eta} = 0, \quad \bigwedge_{Fo} Fo > 0. \quad (33)$$

Funkcję spełniającą niejednorodne warunki brzegowe określa się z eliptycznej części równania różniczkowego (26), zapisując je w postaci równania Poissona

$$\frac{d^2 \psi_0}{d\eta^2} - k_0(Fo) = 0. \quad (34)$$

W wyniku dwukrotnego całkowania, z uwzględnieniem (28) i (29), otrzymuje się

$$\psi_0(\eta, Fo) = 1 + k_0(Fo) f_0(\eta, Bi), \quad (35)$$

gdzie

$$f_0(\eta, Bi) = 0,5 \eta^2 - \eta - Bi^{-1}. \quad (36)$$

Funkcje spełniające jednorodne warunki brzegowe (32) i (33) wyznaczane są z następującego równania różniczkowego

$$\frac{d^2 v_i}{d\eta^2} - W_i(\eta) = 0. \quad (37)$$

Współczynniki wielomianu $W_i(\eta)$ są funkcjami F_0 . Rozwiązaniem powyższego równania jest wyrażenie typu

$$v_i(\eta, F_0) = k_i(F_0)W_{i+2}(\eta). \quad (38)$$

W związku z tym kombinację liniową (31) można zapisać w postaci

$$\tilde{v}(\eta, F_0) = 1 + k_0(F_0)f_0(\eta, B_i) + \sum_{i=1}^n k_i(F_0)W_{i+2}(\eta). \quad (39)$$

Z porównania (39) z wyrażeniem (18) wynika, że ciąg funkcji przybliżających $f_i(\eta)$ spełnia relację

$$f_i(\eta) = W_{i+2}(\eta). \quad (40)$$

Przykładowo wyznaczono dwie kolejne funkcje tego ciągu:

$$f_1(\eta) = \frac{1}{6}\eta^3 - \frac{1}{4}\eta^2, \quad (41)$$

$$f_2(\eta) = \frac{1}{12}\eta^4 + \frac{2}{9}\eta^3 - \frac{1}{2}\eta^2. \quad (42)$$

W pierwszym etapie rozważań pozostają nieokreślone współczynniki funkcyjne: $k_0(F_0)$ i $k_i(F_0)$. Do wyznaczenia ich wykorzystuje się zależność (19), która w rozważanym przypadku przyjmuje postać

$$\delta I < \tilde{v} > = \int_0^1 L[\tilde{v}] \delta \tilde{v} d\eta = 0, \quad (43)$$

gdzie

$$L[\tilde{v}] = \frac{\partial^2 \tilde{v}}{\partial \eta^2} - \frac{\partial \tilde{v}}{\partial F_0}. \quad (44)$$

Jest to oczywiście, w zależności od liczby wyrazów w kombinacji liniowej, układ $(i+1)$ liniowych równań różniczkowych pierwszego rzędu:

$$\int_0^1 L[\tilde{\mathcal{F}}] \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial k_0} \delta k_0 d\eta = 0, \quad (45)$$

$$\int_0^1 L[\tilde{\mathcal{F}}] \frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial k_j} \delta k_j d\eta = 0; \quad [j = 1, 2, \dots, i]. \quad (46)$$

Ponieważ

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial k_0} = f_0(\eta, Bi), \quad (47)$$

$$\frac{\partial \tilde{\mathcal{F}}}{\partial k_j} = f_j(\eta), \quad [j = 1, 2, \dots, i], \quad (48)$$

to (45) ÷ (46) ma ostateczną formę:

$$\int_0^1 L[\tilde{\mathcal{F}}] f_0(\eta, Bi) d\eta = 0, \quad (49)$$

$$\int_0^1 L[\tilde{\mathcal{F}}] f_j(\eta) d\eta = 0, \quad [j = 1, 2, \dots, i]. \quad (50)$$

Do dalszych rozważań wygodnie jest przyjąć, że

$$i + 1 = 1. \quad (51)$$

Dla $1 = 1$ poszukiwane rozwiązanie przybliżone określone jest wyrażeniem

$$\tilde{\mathcal{F}}(\eta, Fo) = 1 + k_0(Fo)(0,5 \eta^2 - \eta - Bi^{-1}). \quad (52)$$

Równanie różniczkowe, z którego wyznacza się współczynnik funkcyjny $k_0(Fo)$, przybiera (po podstawieniu odpowiednich zależności do (49) i wykonaniu całkowania) postać

$$\frac{dk_0}{dFo} = - \frac{5 Bi^2 + 15 Bi}{2 Bi^2 + 10 Bi + 15} k_0. \quad (53)$$

Jeśli $l = 2$, to

$$\tilde{y}(\eta, Fo) = 1 + k_0(Fo)(0,5 \eta^2 - \eta - Bi^{-1}) + k_1(Fo)\left(\frac{1}{6} \eta^3 - \frac{1}{4} \eta^2\right), \quad (54)$$

a układ równań różniczkowych (49) i (50) jest wtedy następujący:

$$\left. \begin{aligned} (96 Bi^2 + 480 Bi + 720) \frac{dk_0}{dFo} + (13 Bi^2 + 30 Bi) \frac{dk_1}{dFo} = \\ = - (240 Bi^2 + 720 Bi)k_0 - 30 Bi^2 k_1, \end{aligned} \right\} \quad (55)$$

$$(91 Bi + 210) \frac{dk_0}{dFo} + 13 Bi \frac{dk_1}{dFo} = - 210 Bi k_0 - 42 Bi k_1. \quad (56)$$

W przypadku $l = 3$ otrzymuje się kombinację liniową

$$\begin{aligned} \tilde{y}(\eta, Fo) = 1 + k_0(Fo)(0,5 \eta^2 - \eta - Bi^{-1}) + k_1(Fo)\left(\frac{1}{6} \eta^3 - \frac{1}{4} \eta^2\right) + \\ + k_2(Fo)\left(\frac{1}{12} \eta^4 + \frac{2}{9} \eta^3 - \frac{1}{2} \eta^2\right), \end{aligned} \quad (57)$$

w której współczynniki funkcyjne określa się z układu równań różniczkowych

$$\begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & A_{13} \\ A_{21} & A_{22} & A_{23} \\ A_{31} & A_{32} & A_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{dk_0}{dFo} \\ \frac{dk_1}{dFo} \\ \frac{dk_2}{dFo} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_{14} & A_{15} & A_{16} \\ A_{24} & A_{25} & A_{26} \\ A_{34} & A_{35} & A_{36} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0 \\ k_1 \\ k_2 \end{bmatrix}, \quad (58)$$

gdzie:

$$A_{11} = 2016 Bi^2 + 10080 Bi + 15120,$$

$$A_{12} = 273 Bi^2 + 630 Bi,$$

$$A_{13} = 622 Bi^2 + 1428 Bi,$$

$$A_{14} = -(5040 Bi^2 + 15120 Bi),$$

$$A_{15} = -630 Bi^2,$$

$$A_{16} = -1428 Bi^2,$$

$$A_{21} = 364 B_i + 840,$$

$$A_{22} = 52 B_i,$$

$$A_{23} = 119 B_i,$$

$$A_{24} = -840 B_i,$$

$$A_{25} = -168 B_i,$$

$$A_{26} = -392 B_i,$$

$$A_{31} = 7464 B_i + 17136,$$

$$A_{32} = 1071 B_i,$$

$$A_{33} = 2452 B_i,$$

$$A_{34} = -17136 B_i,$$

$$A_{35} = -3528 B_i,$$

$$A_{36} = -8256 B_i.$$

Odpowiednie kombinacje liniowe dla $l > 3$ tworzy się w sposób analogiczny. Dalsze rozważania ogranicza się do podanych przykładów ($l = 1, 2, 3$).

Warunki początkowe są w ogólnym przypadku dane układem liniowych równań algebraicznych

$$\int_0^1 [\tilde{v}(\eta, F_0 = 0) - \mu] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial k_\varphi} d\eta = 0; \quad [\varphi = 0, 1, \dots, n]. \quad (59)$$

Jest to szczególna postać wyrażenia (21).

W rozważanym przypadku warunki te określone są następująco:

a) dla $l = 1$

$$k_0(0) = \frac{5 B_i^2 + 15 B_i}{2 B_i^2 + 10 B_i + 15}; \quad (60)$$

b) dla $l = 2$

$$\begin{bmatrix} 96 B_i^2 + 480 B_i + 720 & 13 B_i^2 + 30 B_i \\ 96 B_i + 210 & 13 B_i \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0(0) \\ k_1(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} (240 B_i^2 + 720 B_i)(1 - \mu) \\ 210 B_i(1 - \mu) \end{bmatrix}; \quad (61)$$

c) dla $l = 3$

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} & B_{13} \\ B_{21} & B_{22} & B_{23} \\ B_{31} & B_{32} & B_{33} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} k_0(0) \\ k_1(0) \\ k_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} B_{14} \\ B_{24} \\ B_{34} \end{bmatrix}, \quad (62)$$

gdzie:

$$\begin{aligned}
 B_{11} &= \frac{2 Bi^2 + 10 Bi + 15}{15 Bi^2}, \\
 B_{12} = B_{21} &= \frac{13 Bi + 30}{720 Bi}, \\
 B_{13} = B_{31} &= \frac{311 Bi + 714}{7560 Bi}, \\
 B_{22} &= \frac{13}{5040}, \\
 B_{23} = B_{32} &= \frac{17}{2880}, \\
 B_{33} &= \frac{613}{45360}, \\
 B_{14} &= \frac{Bi + 3}{3 Bi} (1 - \mu), \\
 B_{24} &= \frac{1}{24} (1 - \mu), \\
 B_{34} &= \frac{17}{180} (1 - \mu).
 \end{aligned} \tag{63}$$

Rozwiązania podanych zagadnień początkowych podstawia się do zależności (52), (54) lub (57) i w każdym przypadku uzyskuje się wyrażenia arytmetyczne w postaci zamkniętej np.:

a) dla $l = 1$

$$\tilde{f}(\eta, Fo) = 1 + \frac{5 Bi^2 + 15 Bi}{2 Bi^2 + 10 Bi + 15} (1 - \mu) \exp\left(-\frac{5 Bi^2 + 15 Bi}{2 Bi^2 + 10 Bi + 15} Fo\right) (0,5 \eta^2 - \eta - Bi^{-1}) \tag{64}$$

b) dla $l = 2$

$$\begin{aligned}
 \tilde{f}(\eta, Fo) &= 1 + [A_1(Bi, \mu) \exp(-\psi_1(Bi) Fo) + \\
 &+ A_2(Bi, \mu) \exp(-\psi_2(Bi) Fo)] (0,5 \eta^2 - \eta - Bi^{-1}) + \\
 &+ [B_1(Bi, \mu) \exp(-\psi_1(Bi) Fo) + \\
 &+ B_2(Bi, \mu) \exp(-\psi_2(Bi) Fo)] \left(\frac{1}{6} \eta^3 - \frac{1}{4} \eta^2\right),
 \end{aligned} \tag{65}$$

gdzie:

$$A_1(Bi, \mu) = \frac{f_2(Bi, \mu) - \psi_1(Bi) f_1(Bi, \mu)}{\psi_2(Bi) - \psi_1(Bi)}, \tag{66}$$

$$A_2(Bi, \mu) = \frac{\psi_2(Bi) f_1(Bi, \mu) - f_2(Bi, \mu)}{\psi_2(Bi) - \psi_1(Bi)}, \quad (67)$$

$$B_1(Bi, \mu) = \frac{\varepsilon_1(Bi, \mu)}{1 - \frac{\psi_2(Bi)}{\psi_1(Bi)}}, \quad (68)$$

$$B_2(Bi, \mu) = \frac{\varepsilon_1(Bi, \mu)}{1 - \frac{\psi_1(Bi)}{\psi_2(Bi)}}, \quad (69)$$

$$\psi_1(Bi) = \left\{ \frac{846 Bi^2 + 8460 Bi + 15120}{65 Bi^2 + 780 Bi + 3060} - \left[\left(\frac{846 Bi^2 + 8460 Bi + 15120}{65 Bi^2 + 780 Bi + 3060} \right)^2 - \frac{3780 Bi^2 + 30240 Bi}{65 Bi^2 + 780 Bi + 3060} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (70)$$

$$\psi_2(Bi) = \left\{ \frac{846 Bi^2 + 8460 Bi + 15120}{65 Bi^2 + 780 Bi + 3060} + \left[\left(\frac{846 Bi^2 + 8460 Bi + 15120}{65 Bi^2 + 780 Bi + 3060} \right)^2 - \frac{3780 Bi^2 + 30240 Bi}{65 Bi^2 + 780 Bi + 3060} \right]^{\frac{1}{2}} \right\}^{\frac{1}{2}}, \quad (71)$$

$$f_1(Bi, \mu) = \frac{390 Bi^2 + 3060 Bi}{65 Bi^2 + 780 Bi + 3060} (1 - \mu), \quad (72)$$

$$f_2(Bi, \mu) = \frac{3780 Bi^2 + 30240 Bi}{65 Bi^2 + 780 Bi + 3060} (1 - \mu), \quad (73)$$

$$\varepsilon_1(Bi, \mu) = -\frac{1680 Bi^2 + 15120 Bi}{65 Bi^2 + 780 Bi + 3060} (1 - \mu), \quad (74)$$

przy czym stopień dokładności zależy od liczby wyrazów l wziętych w kombinacji liniowej.

4. Przykład numeryczny

Obliczenia numeryczne przeprowadzono dla szerokiego zakresu zmienności liczb podobieństwa Biota ($0,001 \div 100$) i Fouriera ($0 \div 10,0$), przy wartościach temperatury początkowej $\mu = 2; 3,5; 5; 10$. Należy zwrócić uwagę na sposób spełniania warunku początkowego (27) przy uwzględnianiu coraz większej liczby wyrazów l w kombinacji liniowej. Dla $\mu = 10$ przedstawiono to na rys.rys. 1,2,3. Przy pozostałych wartościach temperatury początkowej uzyskuje się wyniki identycznego typu.

Analiza wyników obliczeń numerycznych i porównanie ich z wynikami otrzymanymi za pomocą metody ścisłej prowadzi do wniosku, że wystarczający stopień dokładności uzyskuje się, jeżeli w kombinacji liniowej uwzględni się:

- a) jeden wyraz - dla $Fo \geq 0,5$,
- b) dwa wyrazy - dla $Fo \geq 0,1$.

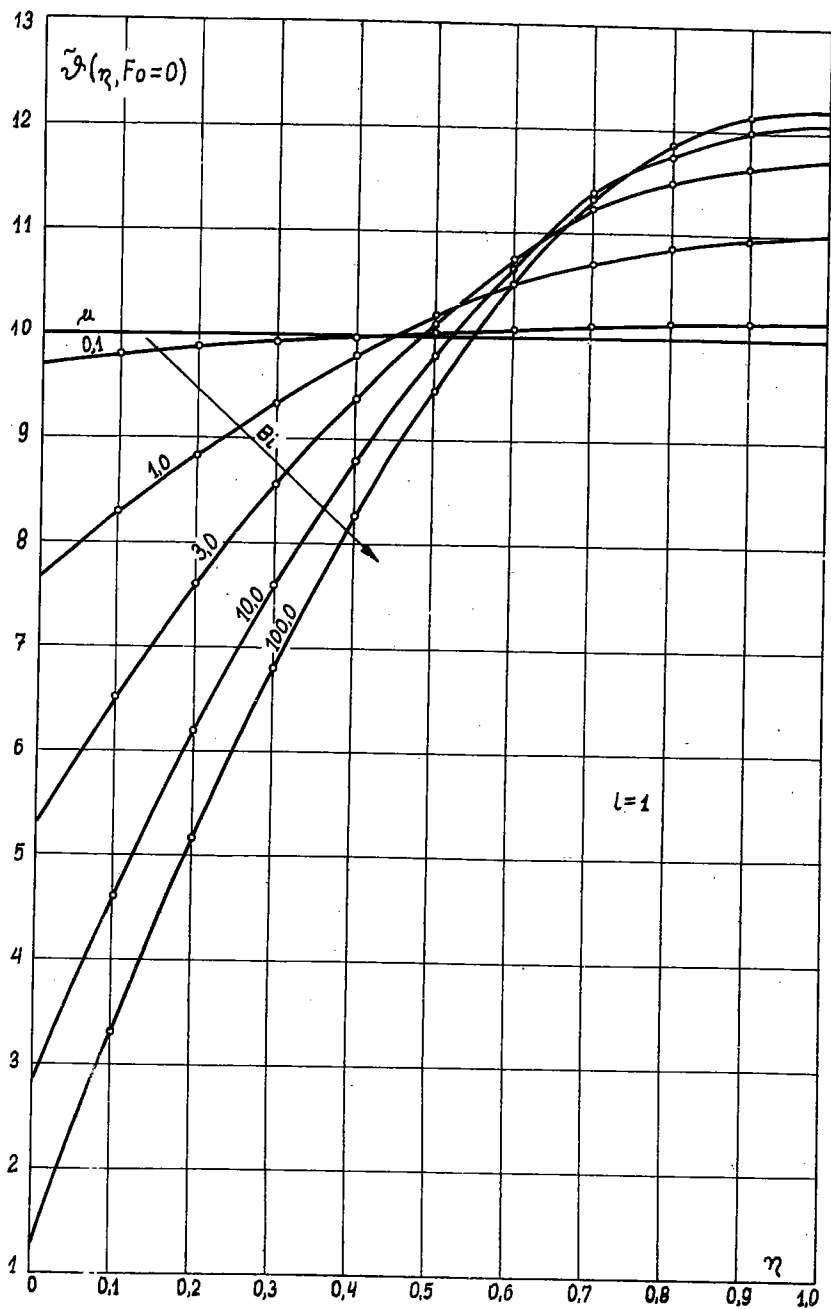
Dla $Fo < 0,1$ należy w rozwiązaniu przybliżonym wziąć liczbę wyrazów $l > 2$. Pole temperatury, wyznaczone dla wymienionych liczb podobieństwa Fouriera, przedstawiono w tabelicach 1 i 2.

Zwraca się uwagę na fakt, że wzrost intensywności wymiany ciepła pociąga za sobą konieczność uwzględnienia większej liczby wyrazów w kombinacji liniowej, aniżeli w przypadku niewielkich wartości liczb podobieństwa Biota.

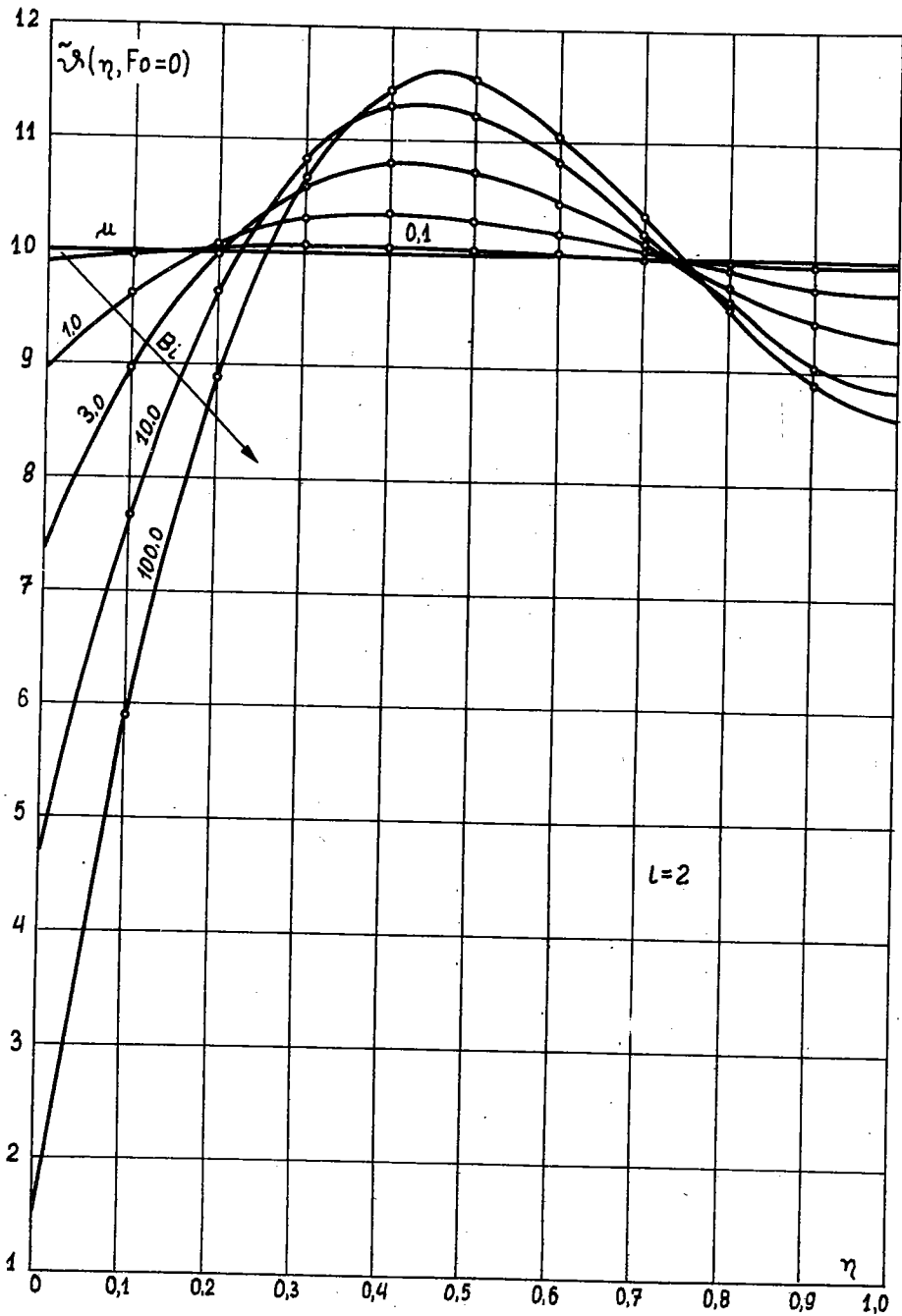
Uzyskane wyniki wykazują dużą zgodność z wynikami otrzymanymi metodą ścisłą (we wzorze 30 przyjęto $n = 6$).

5. Podsumowanie

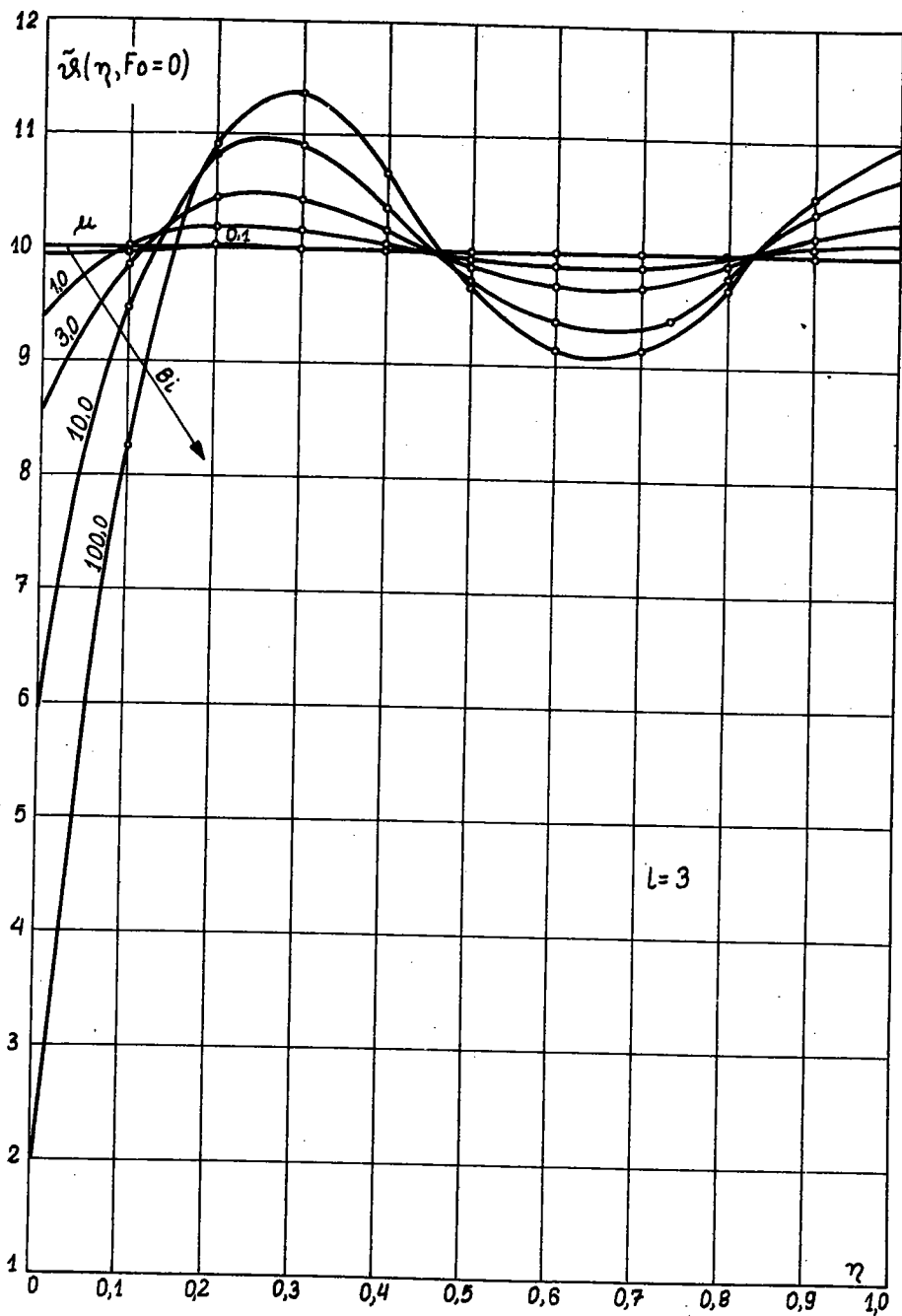
Punktem wyjścia do rozwiązania rozpatrywanego problemu jest wybór ciągu funkcji przybliżających tworzących kombinację liniową (18). Jest to podstawowa trudność przy stosowaniu klasycznej metody Kantorowicza, szczególnie w odniesieniu do złożonych układów wielowymiarowych, kiedy intuicyjna meto-



Rys.1. Przybliżenie warunku początkowego za pomocą jednego wyrazu w kombinacji liniowej



Rys. 2. Przybliżenie warunku początkowego za pomocą dwóch wyrazów w kombinacji liniowej



Rys.3. Przybliżenie warunku początkowego za pomocą trzech wyrazów w kombinacji liniowej

Tablica 1

Pole temperatury w płycie nieskończonej dla $F_0 = 0,5$

η Bi	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0	1
0,001	9,9925	9,9934	9,9941	9,9948	9,9954	9,9959	9,9963	9,9966	9,9968	9,9970	9,9970	1
	9,9925	9,9934	9,9941	9,9948	9,9954	9,9959	9,9963	9,9966	9,9968	9,9970	9,9970	2
	9,9925	9,9934	9,9941	9,9948	9,9954	9,9959	9,9963	9,9966	9,9968	9,9970	9,9970	s
0,01	9,9255	9,9340	9,9416	9,9482	9,9541	9,9590	9,9630	9,9661	9,9683	9,9697	9,9701	1
	9,9256	9,9341	9,9416	9,9483	9,9542	9,9590	9,9629	9,9660	9,9682	9,9696	9,9700	2
	9,9257	9,9341	9,9417	9,9484	9,9541	9,9590	9,9630	9,9661	9,9683	9,9696	9,9700	s
0,1	9,2966	9,3754	9,4460	9,5082	9,5621	9,6078	9,6451	9,6741	9,6949	9,7073	9,7115	1
	9,2961	9,3750	9,4456	9,5079	9,5620	9,6077	9,6452	9,6744	9,6952	9,7078	9,7119	2
	9,2958	9,3747	9,4454	9,5078	9,5619	9,6077	9,6452	9,6743	9,6951	9,7076	9,7117	s
1,0	5,6032	6,0405	6,4318	6,7770	7,0762	7,3294	7,5365	7,6976	7,8127	7,8818	7,9048	1
	5,5451	5,9808	6,3777	6,7343	7,0488	7,3194	7,5447	7,7228	7,8521	7,9309	7,9576	2
	5,5410	5,9775	6,3767	6,7358	7,0522	7,3236	7,5581	7,7243	7,8510	7,9274	7,9529	s
5,0	2,3121	2,9353	3,4929	3,9850	4,4114	4,7722	5,0674	5,2970	5,4610	5,5594	5,5922	1
	2,2062	2,7932	3,3439	3,8524	4,3125	4,7183	5,0639	5,3431	5,5500	5,6785	5,7227	2
	2,1975	2,7841	3,3398	3,8550	4,3209	4,7295	5,0737	5,3477	5,5468	5,6677	5,7082	s
10,0	1,6619	2,2906	2,8532	3,3496	3,7798	4,1438	4,4417	4,6733	4,8388	4,9380	4,9711	1
	1,5862	2,1597	2,7029	3,2087	3,6700	4,0798	4,4310	4,7165	4,9292	5,0620	5,1079	2
	1,5788	2,1499	2,6975	3,2104	3,6783	4,0915	4,4416	4,7216	4,9258	5,0499	5,0916	s
100,0	1,0648	1,6801	2,2306	2,7164	3,1374	3,4936	3,7851	4,0118	4,1737	4,2709	4,3033	1
	1,0545	1,5903	2,1032	2,5852	3,0285	3,4252	3,7674	4,0473	4,2570	4,3885	4,4341	2
	1,0533	1,5822	2,0971	2,5854	3,0355	3,4364	3,7785	4,0536	4,2549	4,3777	4,4189	s

Pole temperatury w płycie nieskończonej dla $F_0 = 0,1$

η Bi	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0,001	9,9961	9,9970	9,9977	9,9984	9,9990	9,9995	9,9999	10,0002	10,0004	10,0006	10,0006
	9,9968	9,9976	9,9983	9,9988	9,9992	9,9995	9,9997	9,9998	9,9999	9,9999	9,9999
	9,9968	9,9976	9,9983	9,9988	9,9992	9,9995	9,9997	9,9998	9,9999	9,9999	9,9999
0,01	9,9611	9,9697	9,9773	9,9840	9,9898	9,9947	9,9988	10,0019	10,0042	10,0055	10,0059
	9,9680	9,9761	9,9827	9,9879	9,9919	9,9948	9,9968	9,9980	9,9987	9,9990	9,9991
	9,9681	9,9762	9,9828	9,9880	9,9919	9,9947	9,9966	9,9979	9,9981	9,9991	9,9992
0,1	9,6240	9,7059	9,7793	9,8439	9,9000	9,9474	9,9862	10,0164	10,0380	10,0509	10,0552
	9,6880	9,7669	9,8308	9,8813	9,9199	9,9483	9,9680	9,9806	9,9876	9,9907	9,9914
	9,6875	9,7669	9,8313	9,8818	9,9199	9,9476	9,9669	9,9796	9,9875	9,9917	9,9930
1,0	7,1907	7,7788	8,3050	8,7693	9,1717	9,5122	9,7908	10,0074	10,1622	10,2551	10,2860
	7,5302	8,1264	8,6161	9,0096	9,3171	9,5489	9,7155	9,8271	9,8940	9,9266	9,9351
	7,5324	8,1146	8,6159	9,0175	9,3266	9,5546	9,7155	9,8232	9,8904	9,9266	9,9380
5,0	3,6307	4,8803	5,9984	6,9849	7,8399	8,5633	9,1552	9,6156	9,9445	10,1418	10,2075
	3,8612	5,1873	6,3136	7,2543	8,0237	8,6358	9,1049	9,4450	9,6705	9,7953	9,8338
	3,7794	5,1065	6,2804	7,2725	8,0730	8,6890	9,1400	9,4518	9,6513	9,7610	9,7958
10,0	2,5109	3,9462	5,2305	6,3636	7,3457	8,1767	8,8566	9,3854	9,7631	9,9897	10,0653
	2,6172	4,1276	5,4319	6,5412	7,4665	8,2190	8,8098	9,2500	9,5507	9,7229	9,7779
	2,5349	4,0235	5,3789	6,5550	7,5269	8,2914	8,8622	9,2638	9,5246	9,6695	9,7158
100,0	1,1726	2,8125	4,2798	5,5744	6,6965	7,6459	8,4227	9,0268	9,4584	9,7173	9,8036
	1,1767	2,8453	4,3199	5,6049	6,7045	7,6231	8,3650	8,9345	9,3359	9,5736	9,6519
	1,1609	2,7484	4,2512	5,6044	6,7630	7,7054	8,4315	8,9573	9,3071	9,5051	9,5690

da doboru tego ciągu, oparta na wnikliwej znajomości fizyki zjawiska, praktycznie rzecz biorąc nie zdaje egzaminu, ponieważ możliwe są różne postacie funkcji przybliżających spełniających odpowiednie warunki brzegowe, a o wyborze najodpowiedniejszej z nich można decydować jedynie na gruncie nabytego doświadczenia, co w znaczny sposób komplikuje rozwiązywanie nowych zagadnień.

Metoda wyznaczenia ciągu funkcji przybliżających, którą przedstawiono w tej pracy, pozwala ominąć te trudności. Zastosowanie zmodyfikowanej metody Kantorowicza pozwala uniknąć rozpatrywania dwu oddzielnych faz danego zjawiska, jak to się dzieje w metodzie Biota. Uzyskanie żadanego stopnia dokładności uzależnione jest jedynie od uwzględnienia odpowiedniej liczby wyrazów w kombinacji liniowej.

Przykłady liczbowe, które przedstawiono w celu zilustrowania toku obliczeń, wskazują na fakt, że otrzymane wyniki, przy znacznie prostszych obliczeniach numerycznych, są niemal identyczne z wynikami otrzymanymi metodą ścisłą.

Wykaz oznaczeń

- λ - współczynnik przewodzenia ciepła
- c_p - ciepło właściwe przy stałym ciśnieniu
- ρ - gęstość ośrodka wypełniającego dany obszar przestrzenny
- $\alpha = \frac{\lambda}{c_p \rho}$ - współczynnik przewodzenia temperatury (współczynnik wyrównywania temperatur, dyfuzyjność cieplna)
- α - współczynnik przejmowania ciepła
- q_v - intensywność (gęstość) wewnętrznych źródeł ciepła
- t - czas
- T - temperatura
- T_i - temperatura początkowa
- T_o - temperatura ośrodka otaczającego dany obszar przestrzenny
- $\delta I < T >$ - ograniczona wariacja funkcjonału $I < T >$
- $\vartheta = \frac{T}{T_o}$ - bezwymiarowa temperatura

- $\mu = \frac{T_1}{T_0}$ - bezwymiarowa temperatura początkowa
 $\delta I < \vartheta >$ - ograniczona wariacja funkcjonału $I < \vartheta >$
 $\tilde{\vartheta}$ - przybliżona temperatura bezwymiarowa
 x - współrzędna w kierunku prostopadłym do powierzchni płyty
 δ - grubość płyty
 $\eta = \frac{x}{\delta}$ - bezwymiarowa współrzędna w kierunku prostopadłym do powierzchni płyty
 $Bi = \frac{\alpha \delta}{\lambda}$ - liczba podobieństwa Biota
 $Fo = \frac{\alpha t}{\delta^2}$ - liczba podobieństwa Fouriera
 δ_n - n-ta wartość własna problemu, który powstaje przy poszukiwaniu dokładnego rozwiązania zagadnienia (26) + (29) za pomocą metody rozdzielania zmiennych [6]
 $W_i(\eta)$ - wielomian stopnia i względem η
 $f_i(\eta)$ - i-ta funkcja w ciągu funkcji przybliżających
 $l(1, 2, \dots, n)$ - liczba wyrazów w kombinacji liniowej
 $\bigwedge_x P(x)$ - kwantyfikikator: dla każdego x mającego własność $P(x)$
 s - oznaczenie wyników uzyskanych metodą ścisłą (tablice: 1 i 2).

BIBLIOGRAFIA

- [1] Biot M.A.: New methods in heat flow analysis with application to flight structures. L. Aero, Sci., 12,24, 1957, 857-873.
 [2] Kantorowicz L.W., Kryłow W.I.: Przybliżone metody analizy wyższej (w jęz. rosyjskim). Państw. Wyd. Literat. Teoretyczno-Technicznej, Moskwa 1952.
 [3] Kneschke A.: Berechnung stationärer Temperaturverteilungen, Ing. - Arch., 30, 1961, 117-122.
 [4] Krajewski B.: Application of variational methods to problems of unsteady heat flow. Arch. Mech. Stosowanej 5,20, 1968, 535-547.

- [5] Krajewski B.: Ein direktes Variationsverfahren zur Behandlung der Wärmeübertragungsprobleme für erzwungene Konvektion (odd. do druku w Int. J. Heat and Mass Transfer).
- [6] Staniszewski B.: Wymiana ciepła. Podstawy teoretyczne. PWN, Warszawa 1963.

ПРИМЕНЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННОГО МЕТОДА КАНТОРОВИЧА
К ЗАДАЧЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ НЕУСТАНОВИВШЕГОСЯ ТЕМПЕРАТУРНОГО ПОЛЯ

К р а т к о е с о д е р ж а н и е

Представляется вариационный подход к вопросу неустановившегося теплообмена при краевых условиях третьего рода.

К численным расчётам применяется модифицированный метод Канторовича, обобщенный в (5) на случай параболических операторов. Последовательность приближающих функций подобрана таким образом, что они являются решениями эллиптической части исходного дифференциального уравнения. Учёт краевых условий в виде приближённого решения позволяет исключить поверхностные интегралы, отсутствие которых имеет решающее влияние на облегчение процесса вычислений. В качестве примера иллюстрирующего процесс вычислений прилагается расчёт неустановившегося температурного поля в бесконечной пластинке.

APPLICATION OF THE MODIFIED KANTOROVICH METHOD
FOR THE DETERMINATION OF UNSTEADY TEMPERATURE FIELD

S u m m a r y

The variational approach to the problem of unsteady heat transfer at type III boundary conditions has been presented in this paper. The modified Kantorovich method as generalized under [5] for the case of parabolic operators, has been employed for the numerical computations involved. The sequence of approximating functions has been selected in such a way, that they present the solutions of the elliptic part of

the starting partial differential equation. Boundary conditions having been met in the form of an approximate solution permits to eliminate the surface integrals which if of a decisive importance for the facilitation of the course of calculations adopted. This course of calculations has been illustrated by an example of determination of an unsteady temperature field in an infinite plate.

Rękopis dostarczone w maju 1972 r.