BIULETYN INFORMACYJNY INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Nr 32 1971

mgr inż. Andrzej Masłowski
Instytut Techniki Cieplnej

O OPTYMALNEJ ESTYMACJI NIEKTÓRYCH PRZESTRZENNO-CZASOWYCH ZJAWISK ZACHODZĄCYCH W REAKTORACH JĄDROWYCH

1. Wstęp

1.0. Na przestrzeni ostatnich lat wzrosło zainteresowanie problematyką analizy niestacjonarnych przestrzenno-czasowych procesów fizycznych. To zainteresowanie spowodowane zostało rozwojem między innymi takich kierunków zastosowań nauk podstawowych jak inżynieria reaktorowa. Właśnie w tej dyscyplinie, a ściślej przy analizie przyszłej lub bieżącej eksploatacji energetycznych reaktorów jądrowych, wyniknęła konieczność rozwiązywania zadań, w których musi być uwzględniona przestrzenno-czasowa natura zjawiska fizycznego. Do klasy takich zadań zaliczyć można zagadnienia związane z optymalną estymacją funkcji stanu niektórych przestrzenno-czasowych zjawisk reaktorowych.

1.1. Do rozwiązania tego zadania może być zastosowany zaprezentowany w pracy [1], formalizm optymalnej estymacji, opierający się na znanym z pewną dokładnością deterministycznym modelu dynamiki i obserwacji tych zjawisk oraz na przyjętym, proponowanym, wskaźniku jakości estymacji, stanowiącym miarę zgodności modelu matematycznego z rzeczywistymi procesami reaktorowymi.

2. Niektóre przestrzenno-czasowe zjawiska zachodzące w reaktorach jądrowych mocy i ich opis matematyczny

2.0. Reaktor jądrowy jest układem skomplikowanym i opisanie go (szczególnie w stanie nieustalonym) dokładnym modelem matematycznym jest praktycznie niemożliwe. Potrzeba oszacowania pewnych funkcji stanu zjawisk reaktorowych, jak już wspomniano, wynika w szeregu zagadnieniach związanych np. z analizą przyszłej lub bieżącej eksploatacji reaktora. Do nich zaliczyć można zadania optymalnego sterowania przestrzennymi oscylacjami gęstości mocy w reaktorach energetycznych [2], [3], wywołanymi takimi zjawiskami jak zmiany koncentracji produktów rozszczepienia, perturbacje w obiegu chłodzenia, reakcja prętów sterujących itp. Na temat genezy tych zjawisk istnieje bogata literatura np. [2] ÷ [6].

2.1. Aby móc określić model dynamiki reaktora, użyteczny w problemie optymalnej estymacji, należy przeprowadzić analizę i opisać zachodzące w danym reaktorze procesy. Podstawowym zjawiskiem jest rozszczepienie jąder atomów paliwa. Najogólniej proces ten opisać można wg teorii transportu neutronów [7], [8]. W praktyce obliczeniowej często stosowane są różne aproksymacje podstawowego równania tej teorii, równania Boltzmana, np. równania wielogrupowe dyfuzji. Formę tych równań (tzw. równań kinetyki przestrzenno-czasowej) można zilustrować, przy założeniu istnienia tylko dwu grup: neutronów prędkich i neutronów spowolnionych oraz jednej grupy neutronów opóźnionych [7]:

$$\begin{bmatrix} v_F^{-1}, & 0, & 0, \\ 0, & v_S^{-1}, & 0, \\ 0, & 0, & 1, \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \phi_F \\ \phi_S \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \left[\nabla \cdot D_F \nabla - (\Sigma_{a_F} + \Sigma_a) + (1-\beta)\nu\Sigma_{f_F}\right]\phi_F + (1-\beta)\nu\Sigma_{f_S}\phi_S + \lambda_C C \\ \Sigma_R \phi_F + \left[\nabla \cdot D_S \nabla - \Sigma_{a_S}\right]\phi_S \\ \beta\nu\Sigma_{f_F}\phi_F + \beta\nu\Sigma_{f_S}\phi_S - \lambda_C C \end{bmatrix} \tag{1}$$

gdzie:

X – trójwymiarowy wektor współrzędnych przestrzennych $X \in \Omega$ gdzie Ω – obszar reaktora,

$\Phi_F(t,X)$ – strumień neutronów prędkich,

$\Phi_S(t,X)$ – strumień neutronów spowolnionych,

$C(t,X)$ – koncentracja prekursorów neutronów opóźnionych,

v_F – prędkość neutronów prędkich,

v_S – prędkość neutronów spowolnionych,

D_F – współczynnik dyfuzji neutronów prędkich,

D_S – współczynnik dyfuzji neutronów spowolnionych,

Σ_{a_F} – makroskopowy przekrój czynny na absorbcję dla neutronów prędkich,

Σ_{a_S} – makroskopowy przekrój czynny na absorbcję dla neutronów spowolnionych,

Σ_{f_F} – makroskopowy przekrój czynny na rozszczepienie dla neutronów prędkich,

Σ_{f_S} – makroskopowy przekrój czynny na rozszczepienie dla neutronów spowolnionych,

Σ_R – makroskopowy przekrój czynny na usunięcie z grupy prędkiej,

β – liczba neutronów opóźnionych na 1 rozszczepienie,

ν – liczba neutronów na 1 rozszczepienie,

λ_c – stała zaniku prekursorów neutronów opóźnionych.

Występujące w równaniu (1) współczynniki, ogólnie biorąc, mogą być funkcjami Φ_F, Φ_S, C, t, X.

Warunki brzegowe przyjmowane są jak następuje:

$$\Phi_F,\ \Phi_S,\ D_F \nabla \Phi_F,\ D_S \nabla \Phi_S\ ,$$

są ciągłe na powierzchniach granicznych, gdy

$$X \in \Omega \ \text{oraz}\ \Phi_F,\ \Phi_S,\ C\ ,$$

zanikają na granicy ekstrapolowanej reaktora [6], czyli dla

$$X \in \partial\Omega ,$$

gdzie: Ω - wnętrze obszaru reaktora, $\partial\Omega$ jego brzeg.

2.2. Innymi zjawiskami, jakie mogą być rozpatrywane przy analizie przestrzennych oscylacji gęstości mocy w danym reaktorze są: efekty zatrucia produktami rozszczepienia, efekty temperaturowe czy efekty wywołane reakcją prętów sterujących. Efekty te wpływają na zmiany makroskopowych przekrojów czynnych Σ występujących w równaniu (1). I tak na przekroje czynne na absorpcję oddziaływują przede wszystkim pręty regulacyjne i produkty rozszczepienia takie jak ksenon czy samar, co można ująć relacjami [3]

$$\Sigma_{a_S}(t,X) = \Sigma_{a_{So}}(x) + \sum_{n=1}^{n=N} U_n(t)\,\delta\,(X - X_n) , \tag{2}$$

gdzie: $\Sigma_{a_{So}}$ - pewna średnia wartość przekroju czynnego na absorpcję neutronów spowolnionych,

$U_n(t)$ - efektywna absorpcja n-tego pręta sterującego umieszczonego w punkcie X_n,

$\delta(X-X_n)$ - funkcja delta Diraca,

N - liczba prętów sterujących,

oraz

$$\Sigma_{a_S}(t,X) = \Sigma_{a_{So}} + \sigma^X_{a_S} N_X(t,X) , \tag{3}$$

gdzie: $\sigma^X_{a_S}$ - mikroskopowy przekrój czynny na absorbcję dla atomów ksenonu,

$N_X(t,X)$ - koncentracja atomów ksenonu.

Koncentracja atomów ksenonu zmienia się w przestrzeni i czasie wg zależności [3]:

$$\frac{\partial}{\partial t} N_X = \lambda_I N_I + \gamma_X \Sigma_{f_F}(X)\,\Phi_F + \gamma_X \Sigma_{f_S}\,\Phi_S - \lambda_X N_X - \sigma^X_{a_S} N_X\,\Phi_S ,$$

$$\frac{\partial}{\partial t} N_I = \gamma_I \Sigma_{f_F}\Phi_F + \lambda_I \Sigma_{f_S}\,\Phi_S - \lambda_I N_I , \tag{4}$$

gdzie: λ_I – stała zaniku atomów jodu,
N_I – koncentracja atomów jodu,
γ_X – liczba atomów ksenonu powstałych w wyniku 1 rozszczepienia,
γ_I – liczba atomów jodu powstałych w wyniku 1 rozszczepienia,
λ_X – stała zaniku atomów ksenonu.

Warunki brzegowe dla (4) są takie jak dla równania (1).

O ile zależności (2), (3) i (4) w miarę dobrze opisują (jak to zostało wykazane w [3]) zmiany $\sum_{a_S}$ w funkcji zmian położenia prętów regulacyjnych i zmian koncentracji produktów rozszczepienia, o tyle jednoznaczne i ogólne opisanie efektów temperaturowych w reaktorze jądrowym jest niezwykle trudne. Jest to skutek wielkiej różnorodności stosowanych typów reaktorów, szczególnie zaś wielkich reaktorów mocy, jak również skutek dużej komplikacji konstrukcji reaktora. Ponadto zmiany przekrojów czynnych wraz z temperaturą następują w sposób nieliniowy. Niekiedy, w pewnym zakresie zmian temperatury jest możliwe linearyzowanie tych nieliniowych związków, np. przez rozwinięcie w szereg Taylora wokół pewnej temperatury T_o przyjmowanej jako temperatura odniesienia w stanie ustalonym. Dla przykładu zmiany makroskopowego przekroju czynnego na rozszczepienie dla grupy neutronów spowolnionych, można opisać zależnością [3]

$$\sum_{f_S}(t,X) \cong \sum_{f_S}(X,T_o) - (T - T_o)\frac{\partial}{\partial T}\sum_{f_S}(X,T_o) , \qquad (5)$$

a zmiany temperatury równaniem [3], [7]

$$\varrho(X)C_T(X)\frac{\partial}{\partial t}T(t,X) = \nabla\cdot\varkappa\nabla T(t,X) + \varepsilon_\phi\left(\sum_{f_F}\phi_F + \sum_{f_S}\phi_S\right) + $$

$$- \varepsilon_p\sum_{m=1}^{m=M}P_m(t)\,\delta(X - X_m) , \qquad (6)$$

gdzie: $T(t,X)$ – odpowiednio zdefiniowana temperatura,

$\left.\begin{array}{l}\varrho\ -\\ C_T\ -\\ \varkappa\ -\end{array}\right\}$ stałe fizyczne,

ε_ϕ – współczynnik proporcjonalności,

ε_p – współczynnik proporcjonalności,

$P_m(t)$ – energia odbierana z reaktora w m-tym punkcie.

Warunki brzegowe dla (6) są takie jak dla równania (1).

2.3. Powyżej omówione zjawiska przestrzenno-czasowe są najważniejszymi, z punktu widzenia budowy modelu dynamiki reaktora jądrowego, przy analizie oscylacji gęstości mocy. Inne, nieomówione procesy mogą być włączone do rozważań, jeżeli w szczególnym przypadku zaistnieje taka potrzeba.

2.4. Przyjęty sposób opisu matematycznego rozważanych zjawisk nie uwzględnia statystycznej natury niektórych procesów reaktorowych. Ale za autorami prac [9] i [3] można powtórzyć, że możliwe jest rozważenie pewnych wielkości średnich tych procesów statystycznych.

3. Ogólny model dynamiki, funkcje stanu i ogólny model obserwacji rozpatrywanych procesów reaktorowych

3.0. Łącząc równania (1), (4), (6) oraz uwzględniając zmiany innych współczynników tych równań z temperaturą, otrzymamy ogólny model dynamiki rozważanych zjawisk (patrz także [3]) opisany przez (7) (str.35).

Funkcjami stanu tych zjawisk będą:

ϕ_F – strumień neutronów prędkich,

ϕ_S – strumień neutronów spowolnionych,

C – koncentracja prekursorów neutronów opóźnionych, (8)

N_X – koncentracja atomów ksenonu,

N_I – koncentracja atomów jodu,

T – temperatura.

3.1. Równanie (7), które może być nazwane równaniem stanu rozważanych procesów reaktorowych, jest ogólnym i dość

$$\begin{bmatrix} v_F^{-1} + (T-T_o)\dfrac{\partial v_F^{-1}}{\partial T}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & v_S^{-1} + (T-T_o)\dfrac{\partial v_S^{-1}}{\partial T}, & 0, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, \\ 0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \varrho C_T, \end{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t} \begin{bmatrix} \phi_F \\ \phi_S \\ C \\ N_X \\ N_I \\ T \end{bmatrix} =$$

$$\begin{bmatrix} \left[\nabla\cdot\left(D_F + (T-T_o)\dfrac{\partial D_F}{\partial T}\right)\nabla - \Sigma_{a_F} - (T-T_o)\dfrac{\partial \Sigma_{a_F}}{\partial T} + (1-\beta)\nu\left(\Sigma_{f_F} + (T-T_o)\dfrac{\partial \Sigma_{f_F}}{\partial T}\right)\right]\phi_F + (1-\beta)\nu\left(\Sigma_{f_S} + (T-T_o)\dfrac{\partial \Sigma_{f_S}}{\partial T}\right)\phi_S + \lambda_C C \\ \left(\Sigma_R + (T-T_o)\dfrac{\partial \Sigma_R}{\partial T}\right)\phi_F + \left[\nabla\left(D_S + (T-T_o)\dfrac{\partial D_S}{\partial T}\right)\nabla - \Sigma_{a_{SO}} - (T-T_o)\dfrac{\partial \Sigma_{a_{So}}}{\partial T} - \sigma^X_{a_S} N_X - (T-T_o)\dfrac{\partial \sigma^x_{a_S}}{\partial T} N_X - \sum\limits_{n=1}^{n=N}\left(U_n(t) - (T-T_o)\dfrac{\partial U_n}{\partial T}\,\delta(X-X_n)\right)\right]\phi_S \\ \beta\nu\left(\Sigma_{f_F} + (T-T_o)\dfrac{\partial \Sigma_{f_F}}{\partial T}\right)\phi_F + \beta\nu\left(\Sigma_{f_S} + (T-T_o)\dfrac{\partial \Sigma_{f_S}}{\partial T}\right)\phi_S - \lambda_C C \\ \lambda_I N_I + \gamma_X\left(\Sigma_{f_F} + (T-T_o)\dfrac{\partial \Sigma_{f_F}}{\partial T}\right)\phi_F + \gamma_X\left(\Sigma_{f_S} + (T-T_o)\dfrac{\partial \Sigma_{f_S}}{\partial T}\right)\phi_S - \lambda_X N_X - \left(\sigma^X_{a_S} + (T-T_o)\dfrac{\partial \sigma^X_{a_S}}{\partial T}\right)N_X\,\phi_S \\ \gamma_I\left(\Sigma_{f_F} + (T-T_o)\dfrac{\partial \Sigma_{f_F}}{\partial T}\right)\phi_F + \gamma_I\left(\Sigma_{f_S} + (T-T_o)\dfrac{\partial \Sigma_{f_S}}{\partial T}\right)\phi_S - \lambda_I N_I \\ \varepsilon_\phi\left(\Sigma_{f_F} + (T-T_o)\dfrac{\partial \Sigma_{f_F}}{\partial T}\right)\phi_F + \left(\Sigma_{f_S} + (T-T_o)\dfrac{\partial \Sigma_{f_S}}{\partial T}\right)\phi_S + \nabla\cdot\varkappa\nabla T - \varepsilon_p\sum\limits_{m=1}^{m=M} P_m(t)\,\delta(X-X_m) \end{bmatrix} \tag{7}$$

skomplikowanym zapisem matematycznym tych procesów, jednakże nie dającym pełnej gwarancji dobrego ich opisu (np. trudność w opisie efektów temperaturowych i niemożność precyzyjnego wyznaczenia współczynników rozwinięcia w szereg Taylora).

Zatem korzystając w praktyce z zdefiniowanych w (8) funkcji stanu (przy założeniu, że równanie (7) da się rozwiązać) może nie przynieść zadowalających rezultatów. W tym przypadku pomocnym narzędziem może okazać się estymacja tych funkcji stanu na podstawie znajomości pewnego zbioru wielkości obserwowanych oraz określonego przez (7) modelu zjawiska.

3.2. Rozpatrywane zjawiska reaktorowe dotyczą przestrzennych oscylacji gęstości mocy a ich analiza ma np. służyć w przyszłości optymalnemu sterowaniu tymi oscylacjami, a ściślej ich "wygaszaniu", czy też utrzymywaniu najmniejszej możliwej amplitudy tych oscylacji wokół pewnego stałego poziomu mocy. Mając to na uwadze, można przekształcić równanie (7) do postaci (porównaj [3]) opisanej przez (9) (str.37).

Funkcje:

$$\varphi_F = \Phi_F - \Phi_{Fo} ,$$

$$\varphi_S = \Phi_S - \Phi_{So} ,$$

$$c = C - C_o ,$$

$$n_X = N_X - N_{Xo} ,$$

$$n_I = N_I - N_{Io} ,$$

$$\theta = T - T_o ,$$

będą nowymi funkcjami stanu, odniesionymi do pewnego stałego poziomu mocy reaktora, określonego przez funkcje Φ_{Fo}, Φ_{So}, C_o, N_{Xo}, N_{Io}, T_o, które spełniają równanie (7) dla stanu ustalonego, tj. dla $t = t_o$.

Definiując wektor

$$U(t,X) = \mathrm{col}\left[\varphi_F, \varphi_S, c, n_X, n_I, \theta\right],$$

otrzymano nową wektorową funkcję stanu $U(t,X)$.

$$
\begin{aligned}
&\begin{bmatrix}
v_F^{-1}, & 0, & 0, & 0, & 0, & 0, \\
0, & v_S^{-1}, & 0, & 0, & 0, & 0, \\
0, & 0, & 1, & 0, & 0, & 0, \\
0, & 0, & 0, & 1, & 0, & 0, \\
0, & 0, & 0, & 0, & 1, & 0, \\
0, & 0, & 0, & 0, & 0, & \varrho C_T,
\end{bmatrix}
\frac{\partial}{\partial t}
\begin{bmatrix} \varphi_F \\ \varphi_S \\ C \\ n_X \\ n_I \\ \theta \end{bmatrix}
= \\
&\left[\begin{matrix}
\nabla D_F \nabla - \sum_{a_F} + (1-\beta)\nu \sum_{f_F}, & (1-\beta)\nu \sum_{f_S}, & \lambda_C, & 0, & 0, & \nabla(\nabla \phi_{Fo}) \frac{\partial D_F}{\partial T} - \frac{\partial \sum_{a_F}}{\partial T} \phi_{Fo} + (1-\beta)\left(\nu \frac{\partial \sum_{f_F}}{\partial T} \phi_{Fo} + \frac{\partial \sum_{f_S}}{\partial T} \phi_{So}\right), \\
\sum_R, & \nabla \cdot D_S \nabla - \sum_{a_{So}} - \sigma^X_{a_S} N_{Xo}, & 0, & -\sigma^X_{a_S} \phi_{So}, & 0, & \nabla(\nabla \phi_{So}) \frac{\partial D_S}{\partial T} + \frac{\partial \sum_R}{\partial T} \phi_{Fo} - \frac{\partial \sum_{a_{So}}}{\partial T} \phi_{So} - \frac{\partial \sigma^X_{a_S}}{\partial T} N_{Xo} \phi_{So}, \\
\beta\nu \sum_{f_F}, & \beta\nu \sum_{f_S}, & -\lambda_C, & 0, & 0, & \beta\nu \left(\phi_{Fo} \frac{\partial \sum_{f_F}}{\partial T} + \phi_{So} \frac{\partial \sum_{f_S}}{\partial T}\right), \\
\gamma_X \sum_{f_F}, & \gamma_X \sum_{f_S} - \sigma^X_{a_S} N_{Xo}, & 0, & -\left(\lambda_X + \sigma^X_{a_{So}} \phi_{So}\right), & \lambda_I, & \gamma_X \left(\phi_{Fo} \frac{\partial \sum_{f_F}}{\partial T} + \frac{\partial \sum_{f_S}}{\partial T} \phi_{So}\right) - \frac{\partial \sigma^X_{a_S}}{\partial T} N_{Xo} \phi_{So}, \\
\gamma_X \sum_{f_F}, & \gamma_I \sum_{f_S}, & 0, & 0, & -\lambda_I, & \gamma_I \left(\phi_{Fo} \frac{\partial \sum_{f_F}}{\partial T} + \frac{\partial \sum_{f_S}}{\partial T} \phi_{So}\right), \\
\varepsilon_\phi \sum_{f_F}, & \varepsilon_\phi \sum_{f_S}, & 0, & 0, & 0, & \varepsilon_\rho \left(\phi_{Fo} \frac{\partial \sum_{f_F}}{\partial T} + \frac{\partial \sum_{f_S}}{\partial T}\right) + \nabla \varkappa \nabla,
\end{matrix}\right]
\times
\begin{bmatrix} \varphi_F \\ \varphi_S \\ C \\ n_X \\ n_I \\ \theta \end{bmatrix} + \\
&+ \begin{bmatrix}
0, \\
-\sum_{n=1}^{n=N} \phi_{So}\, \delta(X-X_n) U_n(t) \\
0, \\
0, \\
0, \\
-\varepsilon_\rho \sum_{m=1}^{m=M} \delta(X-X_m) P_m(t)
\end{bmatrix}
+ \left[\begin{matrix}
\nabla \cdot \theta \frac{\partial D_F}{\partial T} \nabla_F - \frac{\partial \sum_{a_F}}{\partial T} \varphi_F \theta + (1-\beta)\nu \frac{\partial \sum_{f_F}}{\partial T} \varphi_F \theta + (1-\beta)\nu \frac{\partial \sum_{f_S}}{\partial T} \varphi_S \theta + \theta \frac{\partial v_F^{-1}}{\partial T} \frac{\partial \varphi_F}{\partial t}, \\
\frac{\partial \sum_R}{\partial T} \varphi_F \theta + \nabla\theta \frac{\partial D_S}{\partial T} \nabla \varphi_S - \frac{\partial \sum_{a_{So}}}{\partial T} \varphi_S - \frac{\partial \sigma^X_{a_S}}{\partial T} \theta \left(N_{Xo} \varphi_S + \phi_{So} + \varphi_S\right) + \theta \frac{\partial v_S^{-1}}{\partial T} \frac{\partial \varphi_S}{\partial t} - \sigma^X_{a_S} \varphi_S - \varphi_S \sum_{n=1}^{n=N} U_n(t)\, \delta(X-X_n), \\
-\theta\beta\nu \left(\frac{\partial \sum_{f_F}}{\partial T} \varphi_F + \frac{\partial \sum_{f_S}}{\partial T}\right) \varphi_S, \\
\gamma_X \theta \left(\frac{\partial \sum_{f_F}}{\partial T} \varphi_F + \frac{\partial \sum_{f_S}}{\partial T} \varphi_S\right) - \frac{\partial \sigma^X_{a_S}}{\partial T} \left(N_{Xo} \varphi_S + \phi_{So} + \varphi_S\right) - \sigma^X_{a_S} \varphi_S, \\
\gamma_I \theta \left(\frac{\partial \sum_{f_F}}{\partial T} \varphi_F + \frac{\partial \sum_{f_S}}{\partial T} \varphi_S\right), \\
\varepsilon_\phi \theta \left(\frac{\partial \sum_{f_F}}{\partial T} \varphi_F + \frac{\partial \sum_{f_S}}{\partial T} \varphi_S\right),
\end{matrix}\right]
\end{aligned}
\tag{9}
$$

Zależność (9) można zapisać krócej, a mianowicie

$$\mu(X)\ \frac{\partial}{\partial t}\ U(t,X) = \mathcal{L}_o(X)\ U(t,X) + \xi_o(t,X) + f[U(t,X)] \tag{10}$$

gdzie: $\mu(X)$ - macierz,
$\mathcal{L}_o(X)$ - macierzowy operator liniowy,
$\xi_o(t,X)$ - wektor,
f - wektor zawierający składowe "nieliniowe".

Dla małych zmian wektorowej funkcji stanu $U(t,X)$ możliwa jest linearyzacja (10) (porównaj [3]), powodująca jednak pewien (niekiedy do pominięcia) błąd w opisie dynamiki rozpatrywanych procesów reaktorowych.

Odrzucając w (10) f otrzymano

$$\mu(X)\ \frac{\partial}{\partial t}\ U(t,X) = \mathcal{L}_o(X)\ U(t,X) + \xi_o(t,X) \tag{11'}$$

lub

$$\frac{\partial}{\partial t}\ U(t,X) = \mathcal{L}(X)\ U(t,x) + \xi(t,X) \tag{11}$$

gdzie: $\mathcal{L}(X) = \mu^{-1}(X)\ \mathcal{L}_o(X)$
$\xi(t,X) = \mu^{-1}(X)\ \xi_o(t,X)$

Zapisanie modelu dynamiki w tak ogólnej postaci jak (11) pozwala na ewentualną zmianę klasy przestrzenno-czasowych zjawisk zachodzących w reaktorze jądrowym, o ile liczba rozwiązanych zjawisk jest niewystarczająca lub za duża. Modyfikując bowiem operator $\mathcal{L}_o(X)$ i wektory $\mu(X)$, $\xi_o(t,X)$ można powiększyć lub pomniejszyć ich aktualną liczbę, zachowując jednakże dalej liniowy charakter opisu matematycznego.

3.3. Zdefiniowano następujące funkcje błędu opisu dynamiki rozpatrywanych zjawisk:

$$\left.\begin{matrix} f^{r}_{\varphi_F}(t,X) \\ f^{r}_{\varphi_S}(t,X) \\ f^{r}_{c}(t,X) \end{matrix}\right\}$$ - funkcje błędu opisu zjawisk rozszczepienia i sposobu sterowania reaktorem,

$$\left.\begin{array}{l} f^{r}_{n_X}(t,X) \\ f^{r}_{n_I}(t,X) \end{array}\right\}$$ – funkcje błędu opisu zjawisk zatruciowych,

$f^{r}_{\theta}(t,X)$ – funkcje błędu opisu zjawisk temperaturowych.

W zapisie wektorowym

$$F^{r}_{\Omega}(t,X) = \mathrm{col}\left[f_{\varphi_F},\ f_{\varphi_S},\ f_c,\ f_{n_X},\ f_{n_I},\ f_{\theta}\right], \tag{12}$$

W funkcji F^{r}_{Ω} mogą zawierać się również bliżej nieokreślone oddziaływania otoczenia na rozpatrywane procesy reaktorowe.

Zmodyfikowano następnie opis modelu dynamiki rozważanych zjawisk (11), mając na uwadze jego późniejszą przydatność do celów estymacji funkcji stanu. Założono, że wystarczający jest taki opis:

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t,X) = \mathcal{L}(X)\ U(t,X) + \xi(t,X) + F^{r}_{\Omega}(t,X) \qquad X \in \Omega . \tag{13}$$

Należy zaznaczyć, że przyjęcie liniowego związku F^{r}_{Ω} z $\mathcal{L}(X)\ U(t,X)$ jest założeniem arbitralnym i może, na równi z modelem (11) podlegać korekcie na kolejnym etapie opracowywania lepszego niż poprzedni modelu dynamiki.

3.4. Warunki graniczne i początkowe dla (13) – dla celów estymacji – wynikają z analizy rozważanych zjawisk, przeprowadzonej w p.2.1 i z uwag zawartych w p.3.2.

Przyjęto następujące opisy warunków granicznych

$$U(t,X) = 0 \quad \text{dla} \quad X \in \partial\Omega \tag{14}$$

oraz warunków początkowych

$$U(t_0,X) - F^{r}_{\Omega}(t_0,X) = 0 \qquad X \in \Omega , \tag{15}$$

gdzie $F^{r}_{\Omega}(t_0,X)$ jest funkcją błędu opisu dynamiki dla $t = t_0$ i $X \in \bar{\Omega}$.

Liniowy związek $F_{\Omega}^{r}(t_o,X)$ z $U(t_o,X)$ oraz postaci warunków początkowych (15) są założeniami wstępnymi i mogą podlegać korekcie na kolejnym etapie opracowania lepszego modelu dynamiki rozważanych procesów.

3.4. Model obserwacji rozpatrywanej grupy zjawisk reaktorowych można wyznaczyć rozpatrując sposoby pomiaru i oprzyrządowania stosowane w reaktorze jądrowym. Podstawowymi elementami tego oprzyrządowania są detektory promieniowania [2]. Dla uproszczenia można przyjąć, że informacje o funkcjach stanu rozważanych procesów są zbierane przez kilka detektorów rozmieszczonych punktowo w objętości reaktora Ω lub na jego brzegu $\partial\Omega$.

Model obserwacji rozważanych procesów musi uwzględniać fakt, że w praktyce możliwe jest zebranie informacji tylko o części składowych wektorowej funkcji stanu $U(t,X)$, a mianowicie o strumieniach neutronów i temperaturze w reaktorze oraz to, że każdy detektor może rejestrować nie tylko pożądane informacje (np. oprócz pomiaru strumienia neutronów prędkich w części może rejestrować strumień neutronów spowolnionych).

Uwzględniając powyższe można zasugerować następujący model obserwacji, ograniczając się - bez zmniejszenia ogólności - do 3 detektorów (porównaj [2]):

$$\begin{bmatrix} z_1(t) \\ z_2(t) \\ z_3(t) \end{bmatrix} = \int_{\bar{\Omega}} d\bar{\Omega} \begin{bmatrix} \delta(X-X_1), & 0, & 0, \\ 0, & \delta(X-X_2), & 0, \\ 0, & 0, & \delta(X-X_3) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sum_{1,\phi_F}^{d}, \sum_{1,\phi_S}^{d}, 0,0,0,0 \\ \sum_{2,\phi_F}^{d}, \sum_{2,\phi_S}^{d}, 0,0,0,0, \\ 0, \quad 0,\ 0,0,0, \sum_{3,T}^{d} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varphi_F \\ \varphi_S \\ c \\ n_X \\ n_I \\ \theta \end{bmatrix} \tag{16}$$

gdzie: i - liczba detektorów = 3,

$\delta(X-X_i)$ - funkcja delta Diraca,

$\sum^d_{i,\Phi_F}$ - funkcja określająca czułość rejestracji strumienia neutronów prędkich przez i-ty detektor,

$\sum^d_{i,\Phi_S}$ - funkcja określająca czułość rejestracji strumienia neutronów spowolnionych przez i-ty detektor,

$\sum^d_{i,\theta}$ - funkcja określająca czułość rejestracji temperatury przez i-ty detektor,

$z_i(t)$ - wielkości obserwowane w przedziale czasu estymacji.

Zapisując w postaci wektorowej mamy

$$Z(t) = \int_{\Omega} d\Omega D(X)\ S(t)\ U(t,X)\ , \tag{17}$$

gdzie ogólnie: $D(X)$ - jest $(k\times k)$ macierzą diagonalną o wyrazach $\delta(X-X_i)$,
gdzie k - liczba detektorów,

$S(t)$ - jest $(k\times n)$ macierzą prostokątną o wyrazach $\sum^d_{i,(\cdot)}$, spełniająca rolę macierzy wagi,
n - liczba funkcji stanu.

3.5. Zdefiniowano funkcje błędu w opisie sposobu obserwacji funkcji stanu rozważanych zjawisk reaktorowych

$$F^v_{\Omega} = \mathrm{col}\left[f^v_1,\ f^v_2,\ \ldots\ f^v_k\right], \tag{18}$$

gdzie: f^v_i - funkcja błędu obserwacji właściwa i-temu detektorowi $i = 1,2,3..\ k$, po umieszczeniu go w punkcie X_i,
k - liczba detektorów.

W funkcji F^v_{Ω} może się zawierać również bliżej nieokreślone oddziaływanie otoczenia na proces obserwacji funkcji stanu $U(t,X)$.

Modyfikując (17), zdefiniowano nowy model obserwacji rozważanych procesów reaktorowych, zakładając, że jest on wystarczający do celów estymacji

$$Z(t) = \int_{\bar{\Omega}} d\bar{\Omega}\, D(X) \left[S(t)\, U(t,X) + F^{v}_{\bar{\Omega}}(t,X)\right] \qquad (19)$$

Model (19) może być korygowany na dalszych etapach opracowania lepszego modelu obserwacji.

3.6. W dalszym ciągu pracy, mówiąc o modelu dynamiki i obserwacji rozważanych procesów reaktorowych, przyjmuje się, że są one opisane przez zależności:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t} U(t,X) = \mathcal{L}(X)\, U(t,X) + \xi(t,X) + F^{r}_{\Omega}(t,X) && X \in \Omega \\ &U(t,X) = 0 && X \in \partial\Omega \qquad (20) \\ &U(t_o,X) - F^{r}_{\bar{\Omega}}(t_o,X) = 0 && X \in \bar{\Omega} \end{aligned}$$

oraz

$$Z(t) = \int_{\bar{\Omega}} d\bar{\Omega}\, D(X) \left[S(t)\, U(t,X) + F^{v}_{\bar{\Omega}}(t,X)\right] \qquad X \in \bar{\Omega} \qquad (20)'$$

gdzie znaczenie $U(t,X)$, $\mathcal{L}(X)$, $\xi(t,X)$, $F^{r}_{\Omega}(t,X)$, $F^{r}_{\bar{\Omega}}(t_o,X)$, $F^{v}_{\bar{\Omega}}(t,X)$, $Z(t)$, $D(X)$, $S(t)$ zostało poprzednio omówione.

3.7. Przy sformułowaniu modelu dynamiki i obserwacji omawianych zjawisk reaktorowych, należy również rozważyć kwestię dodatkowych ograniczeń jakie powinny być ewentualnie nałożone na funkcje stanu, czy też funkcje błędu opisu dynamiki i obserwacji, aby zapewnić poprawność postawienia zadania optymalnej estymacji z fizycznego punktu widzenia. W danym przypadku tym ograniczeniem będzie

$$U(t,X) + U_p(X) + F^{r}_{\bar{\Omega}}(t_o,X) \geqslant 0 \quad \text{dla} \quad X \in \bar{\Omega} \quad \text{i} \quad t \in [t_o,T], \qquad (20)''$$

gdzie $U_p(X) = \operatorname{col}\left[\Phi_{Fo}, \Phi_{So}, C_o, N_{Xo}, N_{Io}, T_o\right]$ (porównaj p.2.2).

W toku dalszych prac nad modelem dynamiki i obserwacji rozważanych procesów mogą być narzucane inne ograniczenia tego typu.

4. Warunki poprawnego określenia modelu dynamiki i obserwacji rozważanych procesów reaktorowych

4.0. Przyjęty model dynamiki i obserwacji rozważanych procesów reaktorowych, aby reprezentował zjawiska fizyczne, powinien spełniać pewne warunki (porównaj rozdz.2 w [1]), a mianowicie:

1) powinno istnieć jednoznaczne rozwiązanie równania (13) z warunkami brzegowymi (14),

2) rozwiązanie to powinno zależeć w sposób ciągły od warunków początkowych (15),

3) transformacja w (19) z przestrzeni funkcji stanu w przestrzeń wielkości obserwowanych $Z(t)$ powinna być ciągła.

4.1. Spełnienie 1) i 2) wymaga nałożenia na występujące w (13): operator $\mathcal{L}(X)$ i wektory $\xi(t,X)$ i $F^{\Gamma}_{\Omega}(t,X)$ pewnych ograniczeń jakie wynikają z rozważenia istnienia i jednoznaczności rozwiązania układu równań różniczkowych liniowych parabolicznych niejednorodnych z warunkami brzegowymi pierwszego rodzaju [10], [9] (porównaj p.2.2.1 w [1]).

4.2. Ponieważ zdefiniowana w (19) transformacja z przestrzeni funkcji stanu w przestrzeń wielkości obserwowanych jest dana operatorem uśredniającym po obszarze $\bar{\Omega}$

$$\mathcal{H} \triangleq \int_{\bar{\Omega}} D(X) \; [S(t)(\cdot) + F^{v}_{\bar{\Omega}}(t,X) \; d\bar{\Omega} \; , \tag{21}$$

to przy założeniu, że macierz $S(t)$ jest macierzą określonych w (16) funkcji $\sum^{d}_{i,(\cdot)}(t)$ ciągłych oraz że $F^{v}_{\bar{\Omega}}$ są też funkcjami ciągłymi, warunek (3) będzie spełniony.

4.3. W dalszym ciągu zakłada się, że można dla danego przypadku, dobrać tak (przez nałożenie najsłabszych warunków matematycznych) klasę funkcji błędu opisu dynamiki i obserwacji procesu, aby warunki (1), (2), (3) były spełnione.

5. Kryterium jakości estymacji funkcji stanu rozważanych procesów reaktorowych

5.0. Z szeregu funkcjonałów, bardziej szczegółowej postaci niż (6) z p.3.2.1 w [1], które mogą stanowić kryterium jakości estymacji funkcji stanu rozpatrywanych procesów reaktorowych, wydaje się za celowe przyjęcie takiego, którego stopień ogólności odpowiadałby stopniowi ogólności określonego przez (20) i (20)' modelu dynamiki i obserwacji tych procesów.

5.1. Niech to kryterium jakości estymacji funkcji stanu U(t,X) będzie ogólnym całkowo-kwadratowym kryterium o postaci:

$$\begin{aligned}\beta = &\int_{t_0}^{T}\int_{\Omega} \left[F^r_{\Omega}(t,X)\right]^{Tr} Q_{F^r_{\Omega}}(t,X)\ F^r_{\Omega}(t,X)\ d\Omega\, dt + \\ &+ \int_{t_0}^{T}\int_{\bar\Omega} \left[F^v_{\bar\Omega}(t,X)\right]^{Tr} Q_{F^v_{\bar\Omega}}(t,X)\ F^v_{\bar\Omega}(t,X)\ d\bar\Omega\, dt + \\ &+ \int_{\bar\Omega} \left[F^r_{\bar\Omega}(t_0,X)\right]^{Tr} Q_{F^r_{\bar\Omega}}(X)\ F^r_{\bar\Omega}(t_0,X)\ d\bar\Omega + \\ = &\int_{t_0}^{T} \left[Z(t) - \int_{\bar\Omega} D(X)\left[S(t)\hat U(t,X) + F^v_{\bar\Omega}(t,X)\right] d\bar\Omega\right]^{Tr} Q_Z(t)\left[(\cdot)\right] dt\ ,\end{aligned} \tag{22}$$

gdzie: Tr - oznacza transpozycję,

$\hat U(t,X)$ - estymata funkcji stanu,

$Q_{F^r_{\bar\Omega}}(X), Q_{F^r_{\Omega}}(t,X), Q_{F^v_{\bar\Omega}}(t,X), Q_Z(t)$ - symetryczne, dodatnio lub półdodatnio określone macierze wagowe.

Funkcjonał (22) spełnia warunek przyjęcia poprawnego kryterium jakości estymacji (porównaj p.2.2.1 w [1]), tzn. dąży do zera, gdy funkcje błędu opisu dynamiki i obserwacji dążą do zera.

5.2. Interpretując to kryterium można powiedzieć, że dążyć się będzie do wyznaczenia optymalnej estymaty $\hat U_{opt}(t,X)$

takiej, dla której wartości całek po obszarze przestrzennym i przedziale czasu estymacji z sumy kwadratów występujących w (20) i (20)' funkcji błędu opisu modelu dynamiki i obserwacji będą minimalne oraz która minimalizuje w przedziale czasu estymacji całkę z sumy kwadratów różnicy między danymi wielkościami obserwowanymi a wielkościami zależnymi (liniowo) od wyznaczanej estymaty.

Z punktu widzenia optymalnej estymacji funkcji stanu rozpatrywanych procesów reaktorowych poszczególne składniki tego kryterium mają sens następujący: pierwsze trzy minimalizują błąd modelu matematycznego dynamiki i obserwacji procesu, czwarty zaś dopasowuje estymatę stanu do zadanej wielkości obserwowanej.

5.3. Należy podkreślić, że zdefiniowany powyżej wskaźnik wybrany został arbitralnie w oparciu o ogólną koncepcję minimalizacji całki z kwadratu błędu. Na skutek tego wyboru wyznaczona estymata będzie optymalna jedynie w sensie kryterium (22). Jego postać może być korygowana w dalszych etapach prac nad optymalną estymacją funkcji stanu omawianej klasy procesów reaktorowych.

6. Sformułowanie zadania optymalnej estymacji rozważanej klasy procesów reaktorowych

6.0. Zadanie optymalnej estymacji funkcji stanu rozpatrywanych procesów reaktorowych można postawić następująco (porównaj p.3.2 rozdz.3 w [1]):
należy znaleźć taką funkcję $\hat{U}(t,X)$ oraz funkcje F^{Γ}_{Ω}, $F^{v}_{\bar{\Omega}}$, $F^{\Gamma}_{\Omega}(t_0,X)$, dla których funkcjonał β (wynikający z (22) przy założeniu, że wszystkie macierze wagi są macierzami jednostkowymi) o postaci:

$$\beta\left[\hat{U},F^{\Gamma}_{\Omega},F^{\Gamma}_{\bar{\Omega}}(t_0,X),F^{v}_{\bar{\Omega}}\right]=\int_{t_0}^{T}\int_{\Omega}(F^{v}_{\Omega})^{Tr}F^{v}_{\Omega}\,d\Omega\,dt+$$
$$+\int_{t_0}^{T}\int_{\bar{\Omega}}(F^{v}_{\bar{\Omega}})^{Tr}F^{v}_{\bar{\Omega}}\,d\bar{\Omega}\,dt+\int_{\bar{\Omega}}\left[F^{\Gamma}_{\bar{\Omega}}(t_0,X)\right]^{Tr}F^{\Gamma}_{\bar{\Omega}}(t_0,X)\,d\bar{\Omega}+$$
$$+\int_{t_0}^{T}\left[Z(t)-\int_{\bar{\Omega}}D\left[S\hat{U}+F^{v}_{\bar{\Omega}}\right]d\bar{\Omega}\right]^{Tr}\left[(\cdot)\right]dt$$

osiąga swoje minimum warunkowe przy spełnieniu ograniczeń równościowych:

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\hat{U} = \mathcal{L}(X)\,\hat{U} + \xi + F && X\in\Omega, \\ &\hat{U} = 0 && X\in\partial\Omega, \\ &\hat{U}(t_0,X) - F_\Omega^r(t_0,X) = 0 && X\in\Omega, \end{aligned} \tag{24}$$

oraz ograniczenia dodatkowego nierównościowego (porównaj p.3.6):

$$\begin{aligned} &\hat{U}(t,X) + U_p(X) + F_\Omega^r(t_0,X) \geqslant 0 && X\in\bar{\Omega} \\ & && t\in[t_0,T]. \end{aligned} \tag{24}$$

6.1. W sformułowaniu, jakie podano powyżej, zadanie optymalnej estymacji funkcji stanu rozważanych procesów reaktorowych jest równoważne zadaniu optymalizacji dynamicznej znajdowania minimum warunkowego funkcjonału całkowo-kwadratowego, przy spełnieniu ograniczeń równościowych typu równań różniczkowych cząstkowych oraz ograniczeń nierównościowych nałożonych na funkcje minimalizujące ten funkcjonał. A zatem do rozwiązania tego zadania może być użyty formalny aparat matematyczny stosowany w teorii optymalizacji dynamicznej.

6.2. Wyznaczenie warunków istnienia i jednoznaczności rozwiązania powyżej postawionego zadania optymalnej estymacji patrywanej klasy procesów, jest jednocześnie określeniem możliwości optymalnej (przy proponowanym wskaźniku jakości) estymacji funkcji stanu rozważanych zjawisk reaktorowych (porównaj [1]), charakteryzowanych omówionym modelem dynamiki i obserwacji. Sprawdzeniem możliwości estymacji funkcji stanu $U(t,X)$ będzie również fakt przynależności optymalnych estymat $\hat{U}_{opt}(t,X)$ i wyznaczonych funkcji błędu opisu dynamiki i obserwacji minimalizujących przyjęty wskaźnik jakości estymacji do klasy funkcji, które zapewniają poprawne określenie przyjętego modelu dynamiki i obserwacji rozważanych procesów reaktorowych.

7. Podsumowanie

W artykule rozważano problem optymalnej estymacji funkcji stanu niektórych przestrzenno-czasowych zjawisk zachodzących w jądrowych reaktorach, w szczególności mocy. Wyprowadzono ogólny model matematyczny dynamiki i obserwacji tych zjawisk, użyteczny w rozważanym problemie oraz krótko omówiono warunki poprawnego określenia tego modelu. Zaproponowano i przedyskutowano ogólny całkowo-kwadratowy wskaźnik jakości estymacji rozważanych zjawisk reaktorowych. Sformułowano zadanie optymalnej estymacji funkcji stanu tych procesów, opierając się na omówionym ich modelu matematycznym oraz proponowanym całkowo-kwadratowym wskaźniku jakości estymacji.

Bibliografia

[1] Masłowski A.: "O optymalnej estymacji niektórych przestrzenno-czasowych procesów fizycznych". Biuletyn Informacyjny ITC PW, nr 32, Warszawa 1971.

[2] Praca zbiorowa: "The Technology of Nuclear Reactor Safety. MIT Press, 1964.

[3] Wiberg D.M.: "Optimal feedback control of spatial xenon oscillations in nuclear reactor". Advances in Control Systems vol.V, Academic Press, 1967 (także TID-21273).

[4] Masłowski A.: "Analitical and numerical investigations of transients in nuclear reactor with temperature feedback". Opracowanie IBJ 0-628/69.

[5] Bonilla C.F.: Nuclear Engineering. McGraw-Hill, 1957.

[6] Kramerow A.J., Szewieliew J.W.: Inżyniernyje rasczèty jadiernych reaktorow. Atomizdat, Moskwa 1964.

[7] Megreblian R., Holmes D.: Teorija reaktorow. Izd. Inostrannoj Lit., Moskwa 1962 (tłum. z angielskiego).

[8] Mika J.: Obliczenia fizyczne reaktorów. Postępy techniki jądrowej, Warszawa 1967.

[9] Wigner E.P.: "Mathematical problems of nuclear reactor theory". Prof. of the Symp. in Applied Math. Vol.XI,1959.

[10] Ładyżenskaja O.A., Sołonnikow W.A., Uralcewa NN: Liniejnyje i kwaziliniejnyje urawnienija paraboliczeskowo tipa. Izd. Nauka Moskwa 1967.

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ НЕКОТОРЫХ ПРОСТРАБСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ПРОЦЕССОВ, ВОЗНИКАЮЩИХ В ЯДЕРНЫХ РЕАКТОРАХ

Краткое содержание

В статье обсуждается проблема оптимальной оценки функции состояния некоторых пространбственно-временных явлений, возникающих в ядерных реакторах, в частности в энергетических реакторах. Выводится общая математическая модель динамики и наблюдений этих явлений, полезная в рассмотренной проблеме, а также кратко обсуждается условия корректной формулировки.

Предлагается и обсуждается общий интегрально-квадратичный показатель качества оценки рассматриваемых реакторных явлений..

Формируется задача оптимальной оценки функции состояния этих процессов на основе обсужденной математической модели их а также на предложенном интегрально-квадратичном показателе качества оценки.

OPTIMAL ESTIMATION OF SOME OF THE SPACE-TIME PROCESSES IN NUCLEAR REACTORS

Summary

Problem of optimal state function estimation of some of the space-time processes in nuclear reactors - particularly in power reactors - has been considered.

General mathematical model of dynamics and observations of these processes, useful for the problem being under consi-

deration has been given as well as the concise description of proper formulation of this problem.

General quadratic estimation performance index of some nuclear processes has been propesed and discussed.

Basing on the above mentioned mathematical model and proposed quadratic estimation performance index the problem of optimal state function estimation has been formulated.

Rękopis dostarczono w czerwcu 1971 r.