

doc. dr hab. Bohdan Krajewski
Instytut Badań Jądrowych

UJĘCIE WARIACYJNE ZAGADNIENIŃ ZWIĄZANYCH Z NIELINIOWYM PRZEWODZENIEM CIEPŁA W STANACH NIEUSTALONYCH

WYKAZ OZNACZEŃ

T	= temperatura,
λ	= przewodność cieplna,
α	= współczynnik przewodności temperaturowej,
C_p	= ciepło właściwe,
ρ	= gęstość czynnika,
T_o	= temperatura odniesienia,
W	= natężenie źródeł ciepła,
q	= strumień ciepła,
α	= współczynnik przejmowania ciepła,
τ	= czas,
$F_o = \frac{\alpha_o \tau}{\delta^2}$	= współrzędna bezwymiarowa czasowa,
δ	= wymiar charakterystyczny liniowy.

1. WSTĘP

W niniejszej pracy przedstawiono bezpośrednią metodę, opartą na zasadzie wariacyjnej, za pomocą której można rozwiązywać zadania nieliniowe.

W pierwszej części pracy przeprowadzono formalny dowód na istnienie całki wariacyjnej w przypadku zagadnień nieliniowych. Autor niniejszego opracowania, wykorzystując publikacje innych badaczy, ustosunkował się do nich krytycznie i wysunął szereg zastrzeżeń i uwag merytorycznych w rozdziale poświęconym aktualnemu stanowi zagadnienia. W następnych częściach

tej pracy omówiono konstrukcję rozwiązań przybliżonych oraz przebieg obliczeń. Przebieg obliczeń zilustrowano przykładami liczbowymi.

2. AKTUALNY STAN ZAGADNIENIA. KRYTYCZNE OMÓWIENIE SFORMUŁOWAŃ WARIACYJNYCH

Równania opisujące przepływ ciepła - jak wiadomo - mogą być sprowadzone do zagadnień wariacyjnych w różny sposób. Prace z tej dziedziny można podzielić na dwie zasadnicze grupy. Do jednej grupy należą prace, w których rachunek wariacyjny stosowany jest poprawnie, w drugiej natomiast znajdują się prace, które nie mają nic wspólnego - poza mylącą nazwą - z rachunkiem wariacyjnym. Do pierwszej grupy należą prace wykorzystujące transformację Laplace'a. Propozycje oparte na tej idei były wysuwane przez wielu autorów, jak np. [1], [2], [3], [4], [5]. Poważnym ograniczeniem stosowalności tej metody jest to, że można posługiwać się nią tylko w przypadku zagadnień liniowych. Inne ujęcia tego zagadnienia przedstawione są w [6], [7], [8]. Nowe ujęcie polega na tym, że pewne wybrane zmienne niezależne traktuje się jako parametry. Całka wariacyjna, zgodnie z przyjętą terminologią, nazywa się w tym przypadku całką wariacyjną ograniczoną lub częściową. Niejasne sformułowania zawarte w pracach [6], [7] zostały uzupełnione i skorygowane w pracy [8]. Uzupełnienia dotyczą przede wszystkim zasad konstruowania funkcji przybliżających oraz warunków początkowych. Metody oparte na zasadach przedstawionych w [6], [7], [8] sprowadzają zagadnienia opisywane równaniem różniczkowym cząstkowym, z odpowiednimi warunkami brzegowymi, do układu równań różniczkowych zwyczajnych. Należy zauważyć, że podana metoda redukcji równań różniczkowych zwyczajnych, przy wykorzystaniu zasad rachunku wariacyjnego w przypadku równań typu eliptycznego, znana jest jako metoda Kantorowicza. Krytyczne komentarze i uwagi na temat sformułowania Rosena, przedstawione w pracy [7], uwzględniono w nowym ujęciu przedstawionym w [8]. Można wykazać, że w przypadku zagadnień liniowych obydwa podejścia, tzn. za pomocą transformacji i bezpośrednio, sformułowane w [8], są sobie równoważne. Wyniki obliczeń, uzyskane za pomocą jednej i drugiej

metody, są identyczne. Jednak metodą bezpośrednią można rozwiązywać zagadnienia o wiele bardziej skomplikowane. Obie metody opierają się na rachunku wariacyjnym i są - z tego punktu widzenia - poprawne. Nie można tego powiedzieć o drugiej grupie prac, dotyczących metod obliczeń przybliżonych związanych z zagadnieniem przepływu ciepła, takich np. jak metoda Biota. W tej metodzie - jak i w metodach jej podobnych - nie istnieje całka wariacyjna, a w związku z tym nie można orzec, czy ma się do czynienia z extremum. Stosując np. bezpośrednio metodę Galerkina uzyskuje się identyczne wyniki. Jak wiadomo, metodę Galerkina można stosować z pozytywnym skutkiem do przybliżonego rozwiązywania równań różniczkowych - liniowych i nieliniowych - również i wtedy, gdy nie mamy do czynienia z zagadnieniem wariacyjnym.

Poważnym ograniczeniem metody Biota jest to, że nadaje się ona tylko do zagadnień jednowymiarowych, przy czym rozwiązanie składa się z dwu rozwiązań częściowych. Oddzielnie traktuje się penetrację termiczną oraz dalszy - odbywający się po penetracji - przebieg zjawiska. W każdym z tych etapów obowiązuje odrębna funkcja przybliżająca. W modelach jednowymiarowych konstrukcja funkcji przybliżających nie nastrocza trudności, natomiast w wielowymiarowych modelach jest sprawą bardzo trudną, o ile w ogóle jest możliwa. Do wspomnianej poprzednio grupy należy również metoda Djukicia i Vujanovicia [9], która podobnie jak metoda Biota jest tylko z nazwy metodą wariacyjną. Wymieniona metoda posługuje się zasadą wariacyjną w sposób niewłaściwy. W ujęciu przedstawionym w [9] całka wariacyjna zawiera pewien parametr λ , który dopiero po dokonaniu wariacji nad wyrażeniem podcałkowym dąży do zera. W wyniku tej operacji otrzymuje się równanie różniczkowe, które - co należy podkreślić - nie jest warunkiem koniecznym założonej całki wariacyjnej. Dalszy tok obliczeń przebiega podobnie jak w metodzie zaproponowanej przez Biota. Stosując np. bezpośrednio metodę Galerkina uzyskuje się identyczne wyniki. Jak wiadomo, metody oparte na rachunku wariacyjnym (np. metoda Kantorowicza) i metoda Galerkina posiadają tę ważną własność w zastosowaniach do zagadnień brzegowych liniowych, że niezależnie od wyboru metody do obliczeń, w obu przypadkach uzyskanym układem równań jest jeden i ten sam układ zwykłych

równań różniczkowych. Gdy natomiast mamy do czynienia z zagadnieniem nieliniowym, wymieniona własność nie występuje. W metodzie zaproponowanej w [9] nie widać żadnej różnicy w traktowaniu zagadnień liniowych i nieliniowych. W tym stanie rzeczy autor uznał za celowe podać wyprowadzenia odpowiednich zależności, poprawne i zgodne z ogólnie przyjętymi zasadami wariacyjnymi, które umożliwiają przedstawienie nieliniowego zagadnienia przepływu ciepła jako zagadnienia wariacyjnego.

Uzyskano dwie różne postaci całki wariacyjnej. Decydujący wpływ na wybór jednej z dwu postaci całki wariacyjnej, do dalszych obliczeń, mają warunki brzegowe.

3. MATEMATYCZNY MODEL ZJAWISKA. SFORMUŁOWANE WARIACYJNE

Rozważać będziemy zagadnienie nieustalonego przepływu ciepła w ciele o objętości V otoczonej powierzchnią F , przy czym rozróżniać będziemy trzy powierzchnie częściowe, którym przyporządkowane są odpowiednio różne warunki brzegowe. Wymienione powierzchnie częściowe spełniają warunek:

$$F = \sum_1^3 F_1.$$

Przepływ ciepła odbywa się na drodze przewodzenia, przy czym założymy, że przewodność λ oraz ciepło właściwe C jest funkcją temperatury. W ciele generowane jest ciepło za pomocą źródła, będącego również znaną funkcją temperatury o intensywności W .

Przeniesienie wspomnianych rozważań na przypadek przepływu ciepła na drodze konwekcji wymuszonej nie nastrocza żadnych trudności i jest sprawą tylko formalną.

Równanie różniczkowe opisujące rozważane zjawisko przyjmie postać

$$\operatorname{div} [\lambda(T) \operatorname{grad} T] + W[T] = C(T) \frac{\partial T}{\partial \tau}. \quad (3.1)$$

Warunki brzegowe przyporządkowane temu równaniu są następujące:

$$\left[T - T_k \right]_{F_1} = 0, \quad \tau > 0, \quad (3.2)$$

$$\left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} + q(T) \right]_{F_2} = 0, \quad \tau > 0, \quad (3.3)$$

$$\left[\lambda(T) \frac{\partial T}{\partial n} + \alpha (T_a^m - T_a^m) \right]_{F_3} = 0, \quad \tau > 0. \quad (3.4)$$

Warunek początkowy natomiast

$$T = T_p(\xi, \eta, \zeta), \quad \tau = 0. \quad (3.5)$$

Jak wspomniano poprzednio, można uzyskać dwie różne i równoważne całki wariacyjne.

3.1. PIERWSZA POSTAĆ CAŁKI WARIACYJNEJ

Aby w ten sposób sformułowane zagadnienie wyrazić w języku wariacyjnym, wprowadzimy funkcje pomocnicze, a mianowicie

$$\lambda(T) = \lambda_0 + \int_{T_0}^T \omega(\vartheta) d\vartheta, \quad C(T) = C_0 + \int_{T_0}^T \pi(\vartheta) d\vartheta, \quad (3.6)$$

przy czym obowiązują następujące reguły przekształceń:

$$\text{grad } \lambda = \omega(T) \text{grad } T, \quad \delta \lambda = \omega(T) \delta T. \quad (3.7)$$

Podobnie dla innych wielkości.

Dla tak postawionego zagadnienia można sformułować zadanie wariacyjne, dotyczące poszukiwania ekstremum pewnego funkcjonału, przy czym całka wariacyjna przyjmie postać

$$\begin{aligned} I \langle T \rangle \equiv & \int_0^t \left\{ \int_V \left[\frac{\lambda^2(T)}{2} (\text{grad } T)^2 - \right. \right. \\ & \left. \left. - \int_{T_0}^T W(\vartheta) \lambda(\vartheta) d\vartheta + F(x, y, z, t) \int_{T_0}^T C(\vartheta) \lambda(\vartheta) d\vartheta \right] dV \right\} d\tau + \\ & + \int_0^t \left\{ \int_{F_2} \left[\int_{T_0}^T q(\vartheta) \lambda(\vartheta) d\vartheta \right] dF + \alpha \int_{F_3} \left[\int_{T_0}^T (\vartheta^m - T_a^m) \lambda(\vartheta) d\vartheta \right] dF \right\} d\tau + \\ & + Z \Big|_{\tau=0} = \text{minimum}, \end{aligned} \quad (3.8)$$

gdzie: $Z|_{\tau=0}$ oznacza $Z|_{\tau=0} = \frac{1}{2} \int_V (T - T_p)^2 dV$,

natomiast $\frac{\partial T}{\partial \tau} = F(x, y, z, t)$.

Następnie dowodzi się, że równanie Eulera dla powyższego funkcjonału jest wyjściowym równaniem różniczkowym łącznie z warunkami brzegowymi i warunkiem początkowym. Przedstawiony funkcjonał (3.8) spełnia - jak wykażemy - warunek Eulera i silniejszy warunek Legendre'a. Zespół tych dwu koniecznych warunków nie jest jeszcze warunkiem wystarczającym na istnienie minimum. Tworząc pierwszą wariację δI i korzystając z podstawienia $\frac{\partial T}{\partial \tau} = F(x, y, z, t)$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \delta I < T > \equiv & \int_0^t \left\{ \int_V \left[(\text{grad } T)^2 \lambda(T) \omega(T) \delta T + \lambda^2(T) \text{grad } T \text{ grad } \delta T - \right. \right. \\ & \left. \left. - W(T) \lambda(T) \delta T + \frac{\partial T}{\partial \tau} C(T) \lambda(T) \delta T \right] dV \right\} d\tau + \int_0^t \left\{ \int_{F_2} \left[q(T) \lambda(T) \delta T \right] dF \right\} d\tau + \\ & + \int_0^t \left\{ \int_V \alpha \left[(T^m - T_a^m) \lambda(T) \delta T \right] dF \right\} d\tau + \int_V \left[(T - T_p) \delta T \right]_{\tau=0} dV = 0. \quad (3.9) \end{aligned}$$

Korzystając następnie z twierdzeń Gaussa - Ostrogradskiego, a mianowicie

$$\int_V \left[\text{div} (\lambda^2 \delta T \text{ grad } T) \right] dV = \int_F \lambda^2 \vec{n} \text{ grad } T \delta T dF, \quad (3.10)$$

przy czym

$$\begin{aligned} & \int_V \left[\text{div} (\lambda^2 \delta T \text{ grad } T) \right] dV \equiv \\ & \equiv \int_V \left[2\lambda \omega(T) (\text{grad } T)^2 \delta T + \lambda^2 \text{grad } T \text{ grad } \delta T + \right. \\ & \left. + \lambda^2 \text{div} (\text{grad } T) \delta T \right] dV \quad (3.11) \end{aligned}$$

otrzymamy na podstawie (3.10) i (3.11) wyrażenie na drugi człon w równ. (3.9)

$$\int_V \lambda^2 \text{grad } T \text{ grad } \delta T \, dV = \int_F \left[\lambda^2 \vec{n} \text{ grad } T \delta T \right] dF + \\ - \int_V \left[2\lambda \omega(T) (\text{grad } T)^2 \delta T + \lambda^2 \text{div}(\text{grad } T) \delta T \right] dV. \quad (3.12)$$

Po wprowadzeniu ostatnio uzyskanej zależności do równ.

(3.9) oraz po wykorzystaniu zależności $F = \sum_1^3 F_i$, otrzymamy

$$\delta I < T > \equiv \int_0^t \left\{ \int_V \left[\frac{\partial T}{\partial \tau} c(T) \lambda(T) - \lambda(T) \omega(T) (\text{grad } T)^2 - \right. \right. \\ \left. \left. - \lambda^2(T) \text{div}(\text{grad } T) - w(T) \lambda(T) \right] \delta T \, dV \right\} d\tau + \\ + \int_0^t \left\{ \int_{F_1}^0 \left[\lambda(T) \vec{n} \text{ grad } T \right] \lambda(T) \delta T \, dV \right\} d\tau + \\ + \int_0^t \left\{ \int_{F_2} \left[\lambda(T) \vec{n} \text{ grad } T + q(T) \right] \lambda(T) \delta T \, dF \right\} d\tau + \\ + \int_0^t \left\{ \int_{F_3} \left[\lambda(T) \vec{n} \text{ grad } T + \alpha (T^m - T_a^m) \right] \lambda(T) \delta T \, dF \right\} d\tau + \\ + \int_V \left[(T - T_p) \delta T \right]_{\tau=0} dV = 0. \quad (3.13)$$

Korzystając następnie z zależności

$$\lambda(T) \text{div} \left[\lambda(T) \text{grad } T \right] = \lambda(T) \omega(T) (\text{grad } T)^2 + \lambda^2(T) \text{div}(\text{grad } T)$$

oraz zakładając ponadto, że wariacja $\delta T / F_1 = 0$ otrzymamy ostatecznie

$$\delta I < T > \equiv \int_0^t \left\{ \int_V \left[\frac{\partial T}{\partial \tau} c(T) - \text{div}(\lambda(T) \text{grad } T) - w(T) \right] \lambda(T) \delta T \, dV \right\} d\tau + \\ + \int_0^t \left\{ \int_{F_2} \left[\lambda(T) \vec{n} \text{ grad } T + q(T) \right] \lambda(T) \delta T \, dF \right\} d\tau +$$

$$\begin{aligned}
 & + \int_0^t \left\{ \int_{F_3} \left[\lambda(T) \vec{n} \operatorname{grad} T + \alpha(T^m - T_a^m) \right] \lambda(t) \delta T \, dF \right\} d\tau + \\
 & + \int_V \left[(T - T_p) \delta T \right] \Big|_{\tau=0} dV = 0. \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Do dalszych rozważań zastosujemy metodę I.W. Kantorowicza. Aby ją zastosować należy posłużyć się lematem Lagrange'a. Lemat Lagrange'a umożliwia napisanie zależności

$$\begin{aligned}
 & \int_V \left[c(T) \frac{\partial T}{\partial \tau} - \operatorname{div}(\lambda(T) \operatorname{grad} T) - w(T) \right] \lambda(T) \delta T \, dV + \\
 & + \int_{F_2} \left[\lambda(T) \vec{n} \operatorname{grad} T + q(T) \right] \lambda(T) \delta T \, dF + \\
 & + \int_{F_3} \left[\lambda(T) \vec{n} \operatorname{grad} T + \alpha(T^m - T_a^m) \right] \lambda(T) \delta T \, dF = 0. \quad (3.15)
 \end{aligned}$$

Jak jest to widoczne bezpośrednio z równ. (3.15), pierwsze wyrażenie podcałkowe odpowiada wyjściowemu równaniu różniczkowemu, następne zaś wyrażenia dotyczą warunków brzegowych. Ponieważ w rozważaniach nałożono ograniczenie na wariację $\delta T/F_1 = 0$, więc występują również wyrażenia dotyczące tylko dwóch następnych warunków brzegowych.

W rozważanym przypadku spełniony jest również warunek Legendre'a, a mianowicie:

$$\frac{\partial}{\partial T_\xi} \left(\frac{\partial L}{\partial T_\xi} \right) = \lambda^2 > 0, \quad \frac{\partial}{\partial T_\eta} \left(\frac{\partial L}{\partial T_\eta} \right) = \lambda^2 > 0, \quad \frac{\partial}{\partial T_\zeta} \left(\frac{\partial L}{\partial T_\zeta} \right) = \lambda^2 > 0,$$

przy czym oznaczają:

Wyrażenie podcałkowe równ. (3.8)

$$L \equiv \frac{\lambda^2}{2} (\operatorname{grad} T)^2 - \int_{T_0}^T w(v) \lambda(v) dv + \frac{\partial T}{\partial \tau} \int_{T_0}^T c(v) \lambda(v) dv$$

oraz

$$T_\xi = \frac{\partial T}{\partial \xi}, \quad T_\eta = \frac{\partial T}{\partial \eta}, \quad T_\zeta = \frac{\partial T}{\partial \zeta}.$$

Należy zauważyć, że funkcje, jak np. λ , C , W , q , mogą mieć również inną postać, a mianowicie:

$$\begin{aligned}\lambda &= \lambda_1(\xi, \eta, \zeta)\lambda_2(T), \\ C &= C_1(\xi, \eta, \zeta)C_2(T), \\ W &= W_1(\xi, \eta, \zeta)W_2(T), \\ q &= q_1(\xi, \eta, \zeta)q_2(T).\end{aligned}\tag{3.16}$$

Postać wymienionych funkcji nie wpływa na wywody, przy czym obliczenia przebiegają podobnie. Można wykazać następnie, wychodząc z rozważań ogólnych na podstawie równ. (3.15), że podejście wariacyjne i tzw. Galerkinowskie, nie są sobie równoważne w przypadku zagadnień nieliniowych.

Jak wiadomo, metoda Kantorowicza i rozszerzona w tym sensie metoda Galerkina posiada tę ważną własność w zastosowaniu do zagadnień brzegowych liniowych, że niezależnie od wyboru metody, w obu przypadkach określającym układem równań jest jeden i ten sam układ zwykłych równań różniczkowych liniowych.

Wykażemy na przykładzie rozważanego obecnie zagadnienia, że w przypadku zagadnień nieliniowych nie występuje identyczność układów równań. Założymy w tym celu, że rozwiązanie przybliżone można zapisać w postaci kombinacji liniowej

$$T_n = \Theta_0(\xi, \eta, \zeta) + \sum_1^n a_i(\tau)\varphi_i(\xi, \eta, \zeta)\tag{3.17}$$

$$[i = 1, 2, \dots, n].$$

Pierwszy człon tego wyrażenia, a mianowicie $\Theta_0(\xi, \eta, \zeta)$ spełnia niejednorodne warunki brzegowe, natomiast drugi człon,

tzn. $\sum_1^n a_i(\tau)\varphi_i(\xi, \eta, \zeta)$ spełnia jednorodne warunki brzegowe.

Założymy następnie, że skonstruowane wyrażenie spełnia warunki brzegowe, wymienione w równ. (3.2), (3.3), (3.4).

Układ równań Galerkina otrzymuje się wykorzystując równ. (3.1), a mianowicie

$$\int_V L[T_n] \varphi_i dV = 0 \quad (3.18)$$

$$[i = 1, 2, \dots, n],$$

przy czym $L[T_n]$ oznacza

$$L[T_n] \equiv C(T_n) \frac{\partial T_n}{\partial \tau} - \operatorname{div} [\lambda(T_n) \operatorname{grad} T_n] - W(T_n). \quad (3.19)$$

W przypadku, gdy obliczenia przeprowadzamy na podstawie wzoru (3.15), który uzyskano wychodząc z zasad rachunku wariacyjnego, to otrzymamy

$$\delta I \langle T_n \rangle \equiv \int_V L[T_n] \lambda(T_n) \varphi_i dV = 0 \quad (3.20)$$

$$[i = 1, 2, \dots, n].$$

Jak widać z bezpośredniego porównania równ. (3.19) i (3.20) otrzymujemy na wyznaczenie T_n , w zależności od zastosowanej metody, dwa różne układy równań różniczkowych zwyczajnych. Wykazane różnice, zależne od zastosowanej metody, są przez badaczy tego zagadnienia nie dostrzegane.

3.2. DRUGA POSTAĆ CAŁKI WARIACYJNEJ

W wielu przypadkach, technicznie ważnych, można zagadnienie opisane równaniami (3.1), (3.2), (3.4), (3.5) przedstawić w inny sposób jako zagadnienie wariacyjne. Zależności wyprowadzone w tym rozdziale są szczególnie operatywne przy zagadnieniach Neumanna. Wiąże się to bezpośrednio z konstrukcją rozwiązania przybliżonego. Dalsze wywody przeprowadzimy przy założeniu, że równ. (3.1) przyporządkowany jest tylko warunek brzegowy (3.3).

Do dalszych wywodów konieczne jest wprowadzenie nowej funkcji określonej za pomocą zależności

$$\Theta = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^{\psi} \lambda(t) dt, \quad (3.21)$$

przy czym oznaczają:

$$\psi = T - T_0$$

T_0 = temperatura odniesienia (najniższa temperatura w pewnym punkcie ciała w chwili $\tau = 0$).

Jeśli znana jest funkcja $\lambda(t)$, to otrzymujemy na podstawie (3.21) zależność

$$\Theta = H(\psi). \quad (3.22)$$

Zakładamy ponadto, że można uzyskać zależność odwrotną, to znaczy

$$\psi = F(\Theta). \quad (3.23)$$

Po podstawieniu zależności (3.21) i (3.23) do równ. (3.1), (3.3), (3.5) otrzymamy

$$\lambda_0 \operatorname{div}(\operatorname{grad} \Theta) + W[F(\Theta)] = C[F(\Theta)] \frac{\partial [F(\Theta)]}{\partial \tau} \quad (3.24)$$

oraz

$$\lambda_0 \frac{\partial \Theta}{\partial n} + q[F(\Theta)] \Big|_F = 0, \quad \tau > 0, \quad (3.25)$$

$$F(\Theta) = F_p(\Theta), \quad \tau = 0. \quad (3.26)$$

Zadanie wariacyjne dla opisanego zagadnienia przyjmie postać

$$\begin{aligned} I < \Theta > = & \int_0^t \int_V \left[\frac{\lambda_0}{2} (\operatorname{grad} \Theta)^2 - \int_0^\Theta W[F(\omega)] d\omega + G(x, y, z, t) \int_0^\Theta C[F(\omega)] d\omega \right] dV d\tau + \\ & + \int_0^t \left\{ \int_F [q[F(\omega)] d\omega] dF \right\} d\tau + \frac{1}{2} \int_V [F(\Theta) - F_p]^2 dV = \text{minimum}, \quad (3.27) \\ & \tau = 0 \end{aligned}$$

przy czym obowiązuje zależność $\frac{\partial F}{\partial \tau} = G(x, y, z, t)$.

Podobnie jak poprzednio dowodzi się, że równanie Eulera jest wyjściowym równaniem różniczkowym łącznie z warunkiem brzegowym.

Przedstawiony funkcjonal spełnia warunek Eulera i silniejszy warunek Legendre'a. Zespół tych dwu warunków koniecznych może być warunkiem wystarczającym na istnienie minimum.

Tworząc następnie pierwszą wariację i podstawiając $\frac{\partial F}{\partial \tau} = G(x, y, z, t)$ otrzymamy

$$\begin{aligned} \delta I < \Theta > \equiv & \int_0^t \left\{ \int_V \left[\lambda_0 \text{grad } \Theta \text{ grad } \delta \Theta - W[F(\Theta)] \delta \Theta + \right. \right. \\ & \left. \left. + \frac{\partial F(\Theta)}{\partial \tau} C[F(\Theta)] \delta \Theta \right] dV \right\} d\tau + \int_0^t \left\{ \int_F q[F(\Theta)] \delta \Theta dF \right\} d\tau + \\ & + \int_V \left\{ \left[F(\Theta) - F_p \right] \delta \Theta \right\} \Big|_{\tau=0} dV = 0. \end{aligned} \quad (3.28)$$

Do następnych przekształceń wykorzystamy twierdzenie Ostrogradskiego - Gaussa

$$\int_V [\text{div}(\delta \Theta \text{ grad } \Theta)] dV = \int_F \delta \Theta \vec{n} \text{ grad } \Theta dF. \quad (3.29)$$

Po podstawieniu (3.29) do (3.28) otrzymamy

$$\begin{aligned} \delta I < \Theta > \equiv & \int_0^t \left\{ \int_V \left[\frac{\partial F(\Theta)}{\partial \tau} C[F(\Theta)] - \lambda_0 \text{div}(\text{grad } \Theta) - W[F(\Theta)] \right] \delta \Theta dV \right\} d\tau + \\ & + \int_0^t \left\{ \int_F \left[\lambda_0 \vec{n} \text{ grad } \Theta + q[F(\Theta)] \right] \delta \Theta dF \right\} d\tau + \\ & + \int_V \left\{ \left[F(\Theta) - F_p \right] \delta \Theta \right\} \Big|_{\tau=0} dV = 0. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Postępując podobnie jak poprzednio, po wykorzystaniu lematu Lagrange'a, otrzymamy ostatecznie

$$\begin{aligned} \int_V \left[\frac{\partial F(\Theta)}{\partial \tau} C[F(\Theta)] - \lambda_0 \text{div}(\text{grad } \Theta) - W[F(\Theta)] \right] \delta \Theta dV + \\ + \int_F \left[\lambda_0 \vec{n} \text{ grad } \Theta + q[F(\Theta)] \right] \delta \Theta dF = 0. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Zależność wyprowadzona ostatnio jest szczególnie dogodna przy zagadnieniach Neumanna. W zagadnieniach technicznych występuje przeważnie liniowa zależność określająca $\lambda(\psi)$, a mianowicie

$$\lambda(\psi) = \lambda_0 - \lambda_1 \psi. \quad (3.32)$$

Na tej podstawie

$$\Theta = \frac{1}{\lambda_0} \int_0^\psi (\lambda_0 - \lambda_1 \omega) d\omega = \psi - \frac{\lambda_1}{2\lambda_0} \psi^2. \quad (3.33)$$

Zależność odwrotną można przedstawić w postaci

$$\psi = \frac{\lambda_0}{\lambda_1} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{2\lambda_1\Theta}{\lambda_0}} \right). \quad (3.34)$$

Dysponując wyznaczoną wielkością Θ można określić ψ .

4. KONSTRUKCJA ROZWIĄZANIA PRZYBLIŻONEGO

4.1. ROZWIĄZANIE CZĘŚCIOWE

Metoda przedstawiona w tej pracy posługuje się rozwiązaniami pomocniczymi, które dotyczą części równania wyjściowego, a mianowicie wydzielonej części eliptycznej. Wydzieloną część równania wyjściowego (3.1) można zapisać w postaci

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} T) = \sum_{m,n,l=0}^N A_{m,n,l} \xi^m \eta^n \zeta^l. \quad (4.1)$$

$$[m,n,l = 1,2,\dots,N]$$

lub

$$\operatorname{div}(\operatorname{grad} \Theta) = \sum_{m,n,l=0}^N A_{m,n,l} \xi^m \eta^n \zeta^l \quad (4.2)$$

$$[m,n,l = 1,2,\dots,N].$$

Wybór jednej z dwu postaci uzależniony jest od tego, które z dwu ujęć wariacyjnych (3.8) lub (3.27) zostanie wykorzystane do rozwiązania przybliżonego.

Prawa strona równ. (4.1) i (4.2) przedstawia potrójny szereg potęgowy. Współczynniki $A_{m,n,l}$ występujące w tym szeregu są w pierwszym etapie obliczeń nie oznaczone. Wspomniane współczynniki, które są pewną funkcją τ , wyznacza się w dalszym toku obliczeń. Rozwiązania częściowe uzyskujemy dołączając kolejne wyrazy szeregu. Otrzymujemy w ten sposób ciąg rozwiązań częściowych. Pierwszy wyraz ciągu uzyskuje się rozwiązując równ. (4.1) lub (4.2) dla $m = n = l = 0$.

W tym pierwszym rozwiązaniu powinny być uwzględnione wszystkie warunki brzegowe niejednorodne. Następne rozwiązania częściowe otrzymywane są, gdy prawa strona równ. (4.1) i (4.2) zawiera kolejne potęgi, a mianowicie $m,n,l=1,2,\dots,N$, przy czym warunki brzegowe przyjmowane są jako jednorodne. W większości przypadków można uzyskać rozwiązania ściśle tych częściowych zagadnień, wiele z nich jest dostępnych przy okazji rozwiązywania innych problemów. Dodatkowe szczegóły dotyczące konstruowania rozwiązań częściowych można znaleźć w [8], jak również w rozdziale dotyczącym przykładów obliczeniowych.

4.2. POSTAĆ OGÓLNA ROZWIĄZANIA PRZYBLIŻONEGO

Dysponując rozwiązaniami częściowymi części eliptycznej równ. (3.1), możemy zapisać rozwiązanie przybliżone w postaci kombinacji liniowej

$$T_n = \sum_0^n A_i(\tau) \varphi_i(\xi, \eta, \zeta) \quad (4.3)$$

$[i = 0, 1, \dots, n].$

Pierwszy wyraz tej zależności, a mianowicie $A_0(\tau) \varphi_0(\xi, \eta, \zeta)$ spełnia niejednorodne warunki brzegowe, następne zaś, tzn. $\sum_1^n A_i(\tau) \varphi_i(\xi, \eta, \zeta)$ spełniają jednorodne warunki brzegowe.

W wyrażeniu (4.3) założono, że współczynniki A_i , początkowo występujące w szeregu potęgowym jako nie oznaczone,

są nieznaną funkcją τ . Współczynniki A_i a właściwie funkcje, które reprezentują wspomniane współczynniki, wyznaczone są z układu równań otrzymanych z (3.15) lub (3.31), przy czym rolę funkcji φ_i odgrywać będą pochodne cząstkowe wyrażenia (4.3) względem współczynników A_i , a mianowicie

$$\delta T_n = \varphi_i = \frac{\partial T_n}{\partial A_i} \delta A_i. \quad (4.4)$$

W wyniku takiego postępowania otrzymamy, po przeprowadzeniu całkowania, nieliniowy układ równań różniczkowych zwyczajnych, umożliwiający wyznaczenie $A_i(\tau)$.

Układowi równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu przyporządkowane są pewne stałe określające wartości początkowe. Należy zauważyć, że wartości początkowe tych równań są w sposób ścisły związane z warunkiem początkowym rozważanego problemu.

4.3. WARUNKI.POCZĄTKOWE

Stałe całkowania przyporządkowane układowi równań zwyczajnych, które w sposób jednoznaczny określają przybliżone rozwiązanie, są wyznaczone z postulatu minimum całki kwadratu odchyień, przy czym jako odchylenie przyjmuje się

$$T_p - T_n = \varepsilon. \quad (4.5)$$

Wymieniona całka przyjmuje postać

$$\int_V [T_p - T_n]^2 dV = \text{minimum}. \quad (4.6)$$

W wyniku takiego postępowania otrzymuje się układ złożony z "n" nieliniowych równań algebraicznych. W przypadku większej liczby pierwiastków od "n" postulat minimum rozstrzyga o wyborze pierwiastków.

Opisane postępowanie sprowadza nieliniowe zadanie początkowo-brzegowe do nieliniowego zadania początkowego; ma to decydujące znaczenie dla uproszczenia i skrócenia czasu obliczeń numerycznych na maszynie cyfrowej.

5. PRZYKŁADY LICZBOWE

Jako przykład liczbowy, ilustrujący przebieg obliczeń posłuży zadanie dotyczące nieustalonego przewodzenia ciepła w płycie nieskończenie rozległej o grubości δ , której temperatura początkowa jest równa zero, natomiast jedna z płaszczyzn w miejscu $\xi = 0$ jest izolowana; temperatura drugiej płaszczyzny w miejscu $\xi = 1$ jest stała i wynosi $\vartheta = 1$. W rozważaniach założymy, że przewodność temperaturowa κ jest funkcją liniową zależną od temperatury o postaci

$$\kappa = \kappa_0 (1 - \kappa_1 \vartheta). \quad (5.1)$$

W celach porównawczych opisane zadanie zostanie rozwiązane metodą Galerkiną oraz metodą wariacyjną, wykorzystując zależności (3.15) i (3.31).

Równania wyjściowe, opisujące dane zjawisko przy wspomnianych założeniach, przyjmą następującą postać

$$\frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \kappa_1 \vartheta) \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \right] = \frac{\partial \vartheta}{\partial F_0}. \quad (5.2)$$

Warunki brzegowe przyporządkowane temu równaniu są:

$$\lambda \frac{\partial \vartheta}{\partial \xi} \Big|_{\xi=0} = 0, \quad \vartheta \Big|_{\xi=1} = 1. \quad (5.3)$$

Natomiast warunek początkowy określa zależność:

$$\vartheta_p(\xi, 0) = 0, \quad 0 \leq \xi \leq 1, \quad F_0 = 0. \quad (5.4)$$

5.1. METODA GALERKINA

Dla opisanego przykładu obliczeniowego równ. Galerkiną otrzymuje się z zależności

$$\int_0^1 \left\{ \frac{\partial \vartheta_n}{\partial F_0} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \kappa_1 \vartheta_n) \frac{\partial \vartheta_n}{\partial \xi} \right] \right\} \delta \vartheta_i d\xi = 0 \quad (5.5)$$

$$[i = 0, 1],$$

przy czym oznaczają:

$$\delta \psi_0 = \frac{\partial \psi_n}{\partial A_0} \delta A_0 = (\xi^2 - 1) \delta A_0,$$

$$\delta \psi_1 = \frac{\partial \psi_n}{\partial A_1} \delta A_1 = (\xi^3 - 1) \delta A_1,$$

oraz

$$\psi_n = 1 + A_0 (\xi^2 - 1) + A_1 (\xi^3 - 1). \quad (5.6)$$

Wyrażenie (5.6) uwzględnia odpowiednie warunki brzegowe. W jaki sposób uzyskano wyrażenie (5.6) opisane jest w [8]. Po wprowadzeniu wyrażenia (5.6) do (5.5) i przeprowadzeniu całkowania uzyskuje się następujący układ równań różniczkowych zwyczajnych:

$$1) - \frac{4}{3}(1-x_1)A_0 - \frac{3}{2}(1-x_1)A_1 - \frac{8}{15}x_1A_0^2 - \frac{7}{6}x_1A_0A_1 - \\ - \frac{9}{14}x_1A_1^2 - \frac{8}{15}\dot{A}_0 - \frac{7}{12}\dot{A}_1 = 0, \quad (5.7)$$

$$2) - \frac{3}{2}(1-x_1)A_0 - \frac{9}{5}(1-x_1)A_1 - \frac{x_1}{2}A_0^2 - \frac{81}{70}x_1A_0A_1 - \\ - \frac{27}{40}x_1A_1^2 - \frac{7}{12}\dot{A}_0 - \frac{9}{14}\dot{A}_1 = 0.$$

Wartości początkowe przypisane temu układowi uzyskano na podstawie zależności podanych w § 4.3, a mianowicie:

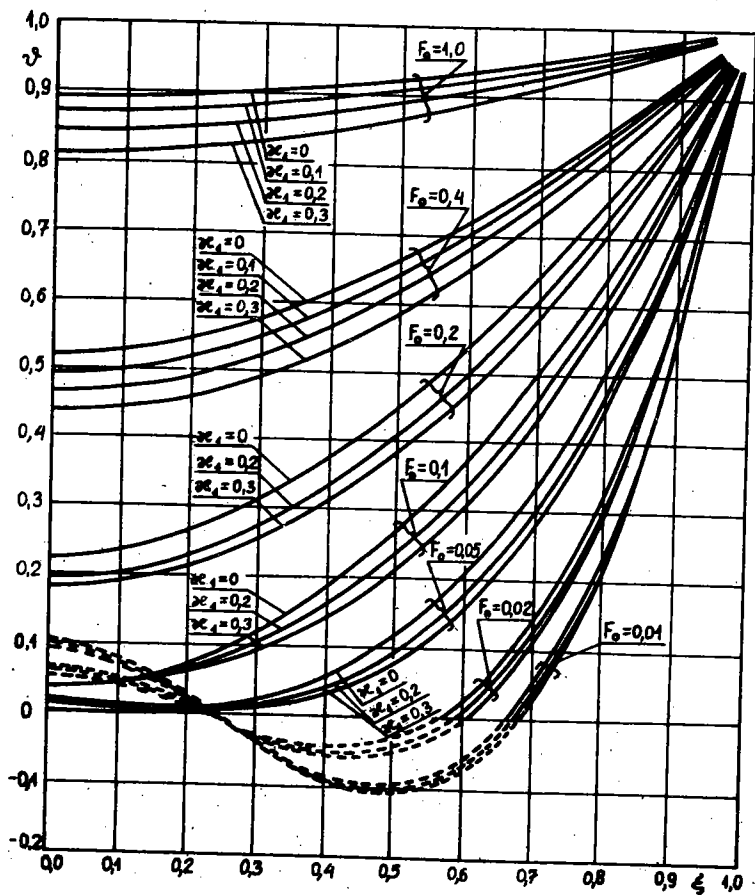
$$\int_0^1 [\psi_p - \psi_n]^2 d\xi = \text{minimum}. \quad (5.8)$$

Na tej podstawie otrzymujemy:

$$A_0(0) = -3,4608;$$

$$A_1(0) = 4,30719.$$

W tablicy 1 zebrano wartości liczbowe obliczeń dla różnych wartości współczynnika x_1 . Na rys.1 przedstawiono rozkład temperatury.



Rys.1. Rozkład temperatury w płaskiej płycie

Tablica 1

α_1	F_0	ξ										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
0	0,01	0,0940	0,0733	0,0244	-0,0330	-0,0787	-0,0931	-0,0564	0,0515	0,2503	0,5599	1,0000
0	0,02	0,0530	0,0397	0,0102	-0,0207	-0,0377	-0,0256	0,0306	0,1462	0,3362	0,6157	1,0000
0	0,05	0,0019	0,0026	0,0087	0,0265	0,0622	0,1219	0,2121	0,3386	0,5081	0,7264	1,0000
0	0,10	0,0413	0,0504	0,0777	0,1337	0,1887	0,2732	0,3775	0,5020	0,6470	0,8129	1,0000
0	0,20	0,2220	0,2326	0,2621	0,3092	0,3723	0,4499	0,5405	0,6424	0,7540	0,8737	1,0000
0	0,40	0,5232	0,5296	0,5483	0,5779	0,6175	0,6658	0,7218	0,7844	0,8524	0,9246	1,0000
0	1,00	0,8915	0,8930	0,8972	0,9040	0,9130	0,9240	0,9367	0,9510	0,9664	0,9829	1,0000
0,10	0,01	0,0970	0,0758	0,0258	-0,0335	-0,0812	-0,0974	-0,0619	0,0454	0,2447	0,5562	1,0000
0,10	0,02	0,0580	0,0439	0,0121	-0,0218	-0,0420	-0,0330	0,0210	0,1356	0,3265	0,6094	1,0000
0,10	0,05	0,0082	0,0076	0,0102	0,0234	0,0540	0,1092	0,1959	0,3213	0,4924	0,7163	1,0000
0,10	0,10	0,0404	0,0482	0,0725	0,1144	0,1751	0,2557	0,3576	0,4817	0,6294	0,8018	1,0000
0,10	0,20	0,2075	0,2167	0,2459	0,2909	0,3526	0,4295	0,5202	0,6238	0,7391	0,8649	1,0000
0,10	0,40	0,4941	0,5007	0,5197	0,5503	0,5913	0,6418	0,7006	0,7669	0,8396	0,9176	1,0000
0,10	1,00	0,8683	0,8701	0,8752	0,8833	0,8942	0,9075	0,9229	0,9401	0,9590	0,9790	1,0000
0,20	0,01	0,1000	0,0783	0,1051	-0,0340	-0,0837	-0,1016	-0,0675	0,0393	0,2392	0,5526	1,0000
	0,02	0,0630	0,0481	0,0140	-0,0228	-0,0465	-0,0405	0,0112	0,1250	0,3168	0,6032	1,0000
	0,05	0,0138	0,0117	0,0110	0,0193	0,0447	0,0951	0,1785	0,3027	0,4758	0,7055	1,0000
	0,10	0,0405	0,0470	0,0679	0,1053	0,1611	0,2375	0,3365	0,4603	0,6107	0,7899	1,0000
	0,20	0,1934	0,2024	0,2288	0,2722	0,3320	0,4075	0,4981	0,6032	0,7224	0,8548	1,0000
	0,40	0,4650	0,4716	0,4908	0,5219	0,5839	0,6160	0,6775	0,7474	0,8251	0,9095	1,0000
	1,00	0,8412	0,8432	0,8493	0,8588	0,8720	0,8879	0,9064	0,9273	0,9500	0,9744	1,0000
0,30	0,01	0,1040	0,0818	0,0289	-0,0336	-0,1188	-0,1051	-0,0724	0,0337	0,2339	0,5491	1,0000
	0,02	0,0680	0,0522	0,0159	-0,0241	-0,0510	-0,0481	0,0013	0,1141	0,3070	0,5967	1,0000
	0,05	0,0206	0,0172	0,0127	0,0160	0,0360	0,0815	0,1613	0,2841	0,4590	0,6947	1,0000
	0,10	0,0417	0,0468	0,0640	0,0963	0,1468	0,2185	0,3144	0,4375	0,5908	0,7773	1,0000
	0,20	0,1807	0,1888	0,2131	0,2537	0,3107	0,3841	0,4740	0,5805	0,7036	0,8434	1,0000
	0,40	0,4360	0,4424	0,4615	0,4925	0,5348	0,5882	0,6519	0,7256	0,8085	0,9001	1,0000
	1,00	0,8098	0,8123	0,8194	0,8306	0,8460	0,8648	0,8868	0,9117	0,9391	0,9687	1,0000

5.2. ZASTOSOWANIE METODY WARIACYJNEJ

To samo zadanie opisane w § 5 zostanie rozwiązane za pomocą zależności (3.15).

Zastosowanie wspomnianej zależności prowadzi do relacji

$$\delta I \equiv \int_0^1 \left\{ \frac{\partial \psi_n}{\partial F_0} - \frac{\partial}{\partial \xi} \left[(1 - \varkappa_1 \psi_n) \frac{\partial \psi_n}{\partial \xi} \right] \right\} (1 - \varkappa_1 \psi_n) \delta \psi_n d\xi = 0 \quad (5.9)$$

$$[i = 0, 1],$$

przy czym oznaczają:

$$\delta \psi_0 = \frac{\partial \psi_n}{\partial A_0} \delta A_0 = (\xi^2 - 1) \delta A_0,$$

$$\delta \psi_1 = \frac{\partial \psi_n}{\partial A_1} \delta A_1 = (\xi^3 - 1) \delta A_1,$$

oraz

$$\psi_n = 1 + A_0 (\xi^2 - 1) + A_1 (\xi^3 - 1).$$

Po wprowadzeniu ψ_n do (5.9) i przeprowadzeniu całkowania uzyskujemy następujący układ równań różniczkowych:

$$\begin{aligned} 1) \quad & \frac{8}{15} \dot{A}_0 (1 - \varkappa_1) + \frac{7}{12} (1 - \varkappa_1) \dot{A}_1 + \\ & + \varkappa_1 \left[\frac{16}{35} \dot{A}_0 A_0 + \frac{59}{120} A_0 \dot{A}_1 + \frac{59}{120} \dot{A}_0 A_1 + \frac{67}{126} \dot{A}_1 A_1 \right] + \\ & + \frac{4}{3} A_0 (1 - \varkappa_1)^2 + \frac{3}{2} A_1 (1 - \varkappa_1)^2 + \\ & + \varkappa_1 (1 - \varkappa_1) \left[\frac{24}{15} A_0^2 + \frac{10}{3} A_0 A_1 + \frac{9}{5} A_1^2 \right] + \\ & + \varkappa_1^2 \left[\frac{111}{60} A_0^2 A_1 + \frac{602}{315} A_0 A_1^2 + \frac{64}{105} A_0^3 + \frac{189}{280} A_1^3 \right] = 0; \end{aligned} \quad (5.10)$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & \frac{7}{12} \dot{A}_0 (1 - \varkappa_1) + \frac{9}{14} \dot{A}_1 (1 - \varkappa_1) + \\ & + \varkappa_1 \left[\frac{59}{120} \dot{A}_0 A_0 + \frac{67}{126} A_0 \dot{A}_1 + \frac{67}{126} A_0 A_1 + \frac{81}{140} \dot{A}_1 A_1 \right] + \\ & + \frac{3}{2} A_0 (1 - \varkappa_1)^2 + \frac{9}{5} A_1 (1 - \varkappa_1)^2 + \end{aligned} \quad (5.11)$$

T a b l i c a 2

α_1	F_0 \ / \ ξ	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,00
$\alpha_1 = 0,1$	0,02	0,0580	0,0438	0,0117	-0,0224	-0,0430	-0,0343	0,0195	0,1341	0,3253	0,6086	1,00
	0,05	0,0085	0,0077	0,0101	0,0228	0,0530	0,1077	0,1942	0,3196	0,4909	0,7153	1,00
	0,10	0,0406	0,0484	0,0724	0,1140	0,1744	0,2548	0,3564	0,4805	0,6283	0,8011	1,00
	0,20	0,2072	0,2169	0,2450	0,2904	0,3521	0,4289	0,5197	0,6233	0,7386	0,8640	1,00
	0,40	0,4939	0,5005	0,5195	0,5501	0,5910	0,6415	0,7004	0,7667	0,8394	0,9175	1,00
$\alpha_1 = 0,2$	1,00	0,8683	0,8700	0,8751	0,8833	0,8941	0,9074	0,9229	0,9401	0,9590	0,9790	1,00
	0,02	0,0633	0,0482	0,0138	-0,0235	-0,0475	-0,0420	0,0095	0,1231	0,3152	0,6021	1,00
	0,05	0,0148	0,0126	0,0113	0,0190	0,0438	0,0936	0,1765	0,3006	0,4738	0,7043	1,00
	0,10	0,0409	0,0472	0,0678	0,1047	0,1601	0,2361	0,3348	0,4584	0,6091	0,7889	1,00
	0,20	0,1931	0,2020	0,2284	0,2716	0,3312	0,4066	0,4971	0,6023	0,7215	0,8543	1,00
$\alpha_1 = 0,3$	0,40	0,4645	0,4711	0,4903	0,5213	0,5633	0,6155	0,6770	0,7470	0,8247	0,9093	1,00
	1,00	0,8411	0,8431	0,8492	0,8589	0,8718	0,8878	0,9063	0,9272	0,9499	0,9743	1,00
	0,02	0,0683	0,0524	0,0159	-0,0244	-0,0517	-0,0491	0,0001	0,1128	0,3058	0,5959	1,00
	0,05	0,0211	0,0175	0,0126	0,0155	0,0350	0,0800	0,1594	0,2822	0,4573	0,6936	1,00
	0,10	0,0420	0,0469	0,0639	0,0959	0,1460	0,2174	0,3130	0,4360	0,5894	0,7764	1,00
$\alpha_1 = 0,4$	0,20	0,1805	0,1886	0,2128	0,2532	0,3100	0,3833	0,4732	0,5796	0,7029	0,8430	1,00
	0,40	0,4357	0,4421	0,4611	0,4920	0,5344	0,5877	0,6515	0,7251	0,8081	0,8999	1,00
	1,00	0,8097	0,8122	0,8192	0,8306	0,8458	0,8646	0,8867	0,9116	0,9390	0,9688	1,00

$$+ \kappa_1 (1 - \kappa_1) \left[\frac{5}{3} A_0^2 + \frac{126}{35} A_0 A_1 + \frac{81}{40} A_1^2 \right] + \\ + \kappa_1^2 \left[\frac{602}{315} A_0^2 A_1 + \frac{567}{280} A_1^2 A_0 + \frac{37}{60} A_0^3 + \frac{81}{110} A_1^3 \right] = 0. \quad (5.11)$$

Wartości początkowe wyznaczamy z relacji

$$\int_0^1 [\dot{v}_p - \dot{v}_n]^2 d\xi = \text{minimum}. \quad (5.12)$$

Na tej podstawie otrzymujemy:

$$A_0(0) = -3,4608;$$

$$A_1(0) = 4,30719.$$

Wartości liczbowe rozwiązania układu równań (5.10), (5.11) przy wartościach początkowych (5.12) zebrano w tablicy 2.

5.3. ZASTOSOWANIE DRUGIEJ POSTACI CAŁKI WARIACYJNEJ

W celach porównawczych przeprowadzono obliczenia, wykorzystując drugą postać całki wariacyjnej, mianowicie zależność (3.27).

Jak wykazano w (3.34) istnieje zależność między v a Θ o następującej postaci

$$v = \frac{1}{\kappa_1} \left(1 - \sqrt{1 - 2 \kappa_1 \Theta} \right). \quad (5.13)$$

Równanie różniczkowe (5.2) przyjmie więc postać

$$\frac{\partial^2 \Theta}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\sqrt{1 - 2 \kappa_1 \Theta}} \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} = 0. \quad (5.14)$$

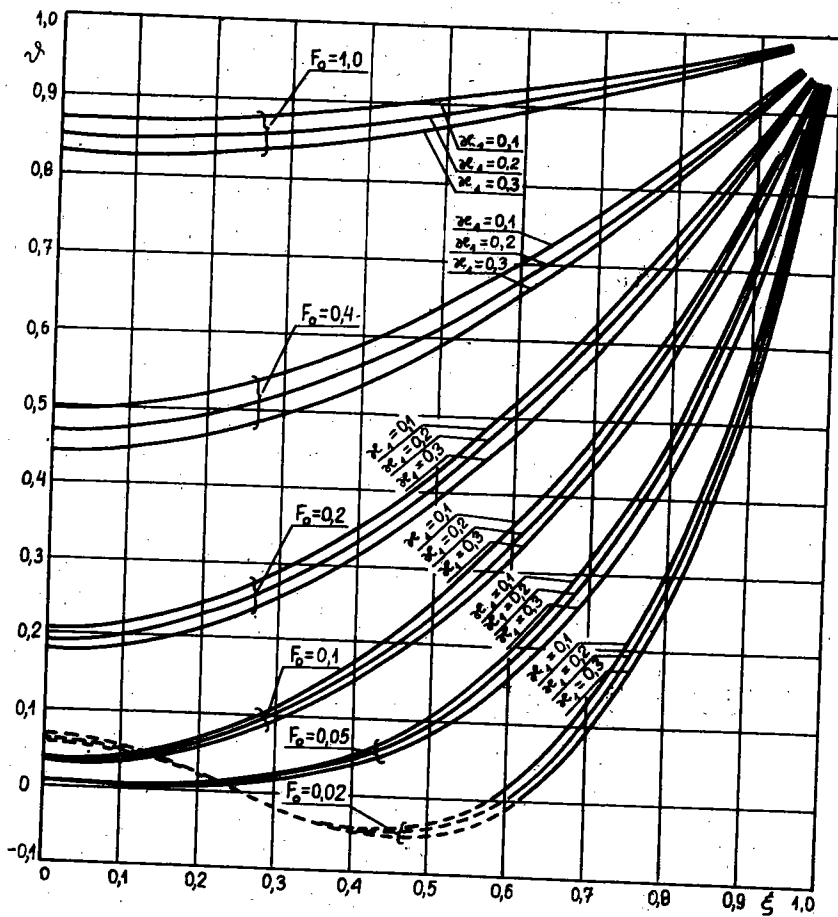
Warunki brzegowe po transformacji ulegną zmianie, a mianowicie:

$$\left. \frac{\partial \Theta}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0, \quad \left. \Theta \right|_{\xi=1} = 1 - \frac{\kappa_1}{2}. \quad (5.15)$$

Rozwiązanie przybliżone, utworzone z rozwiązań częściowych, przedstawiamy w postaci kombinacji liniowej

T a b l i c a 3

η_1	ξ	F_0										
		0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,00
$\eta_1 = 0,1$	0,02	0,0595	0,0456	0,0139	-0,0201	-0,0414	-0,0347	0,0150	0,1240	0,3098	0,5931	1,00
	0,05	0,0067	0,0064	0,0100	0,0238	0,0545	0,1087	0,1933	0,3158	0,4845	0,7088	1,00
	0,10	0,0384	0,0466	0,0715	0,1140	0,1751	0,2556	0,3569	0,4802	0,6272	0,7998	1,00
	0,20	0,2063	0,2161	0,2445	0,2903	0,3523	0,4292	0,5200	0,6236	0,7389	0,8647	1,00
	0,40	0,4943	0,5009	0,5201	0,5507	0,5917	0,6421	0,7009	0,7671	0,8397	0,9177	1,00
	1,00	0,8700	0,8717	0,8767	0,8848	0,8955	0,9086	0,9239	0,9409	0,9595	0,9793	1,00
$\eta_1 = 0,2$	0,02	0,0642	0,0498	0,0168	-0,0195	-0,0438	-0,0416	0,0024	0,1047	0,2849	0,5697	1,00
	0,05	0,0097	0,0087	0,0103	0,0208	0,0472	0,0963	0,1755	0,2935	0,4605	0,6897	1,00
	0,10	0,0354	0,0428	0,0655	0,1048	0,1620	0,2385	0,3364	0,4580	0,6064	0,7853	1,00
	0,20	0,1908	0,2002	0,2275	0,2719	0,3323	0,4081	0,4987	0,6035	0,7222	0,8545	1,00
	0,40	0,4665	0,4732	0,4926	0,5238	0,5659	0,6180	0,6793	0,7489	0,8261	0,9101	1,00
	1,00	0,8480	0,8500	0,8558	0,8651	0,8775	0,8928	0,9105	0,9304	0,9522	0,9755	1,00
$\eta_1 = 0,3$	0,02	0,0689	0,0540	0,0197	-0,0186	-0,0460	-0,0479	-0,0097	0,0856	0,2592	0,5437	1,00
	0,05	0,0127	0,0111	0,0107	0,0182	0,0404	0,0845	0,1582	0,2710	0,4350	0,6680	1,00
	0,10	0,0328	0,0394	0,0601	0,0962	0,1494	0,2218	0,3158	0,4349	0,5837	0,7687	1,00
	0,20	0,1763	0,1852	0,2114	0,2540	0,3125	0,3867	0,4764	0,5819	0,7037	0,8425	1,00
	0,40	0,4394	0,4461	0,4657	0,4972	0,5399	0,5932	0,6565	0,7292	0,8110	0,9014	1,00
	1,00	0,8251	0,8273	0,8339	0,8444	0,8586	0,8760	0,8963	0,9192	0,9443	0,9714	1,00



Rys.2. Rozkład temperatury w płaskiej płycie (druga postać całki wariacyjnej)

$$\Theta_n = \left(1 - \frac{\kappa_1}{2}\right) + A_0(\xi^2 - 1) + A_1(\xi^3 - 1). \quad (5.16)$$

Zastosowanie następnie zależności (3.31) prowadzi do układu równań różniczkowych zwyczajnych

$$\int_0^1 \left[\frac{\partial^2 \Theta_n}{\partial \xi^2} - \frac{1}{\sqrt{1-2\kappa_1\Theta_n}} \frac{\partial \Theta_n}{\partial F_0} \right] \psi_i d\xi = 0 \quad (5.17)$$

$$[i = 0, 1],$$

przy czym $\psi_i = \frac{\partial \Theta_n}{\partial A_i}$.

Wartości początkowe wyznacza się wychodząc z podobnej zasady jak poprzednio. Prowadzi to do układu równań algebraicznych:

$$\int_0^1 \left[\left(1 - \sqrt{1-2\kappa_1\Theta_n} \Big|_{F_0=0}\right) \frac{(\xi^2-1)}{\sqrt{1-2\kappa_1\Theta_n}} \Big|_{F_0=0} \right] d\xi = 0, \quad (5.18)$$

$$\int_0^1 \left[\left(1 - \sqrt{1-2\kappa_1\Theta_n} \Big|_{F=0}\right) \frac{(\xi^3-1)}{\sqrt{1-2\kappa_1\Theta_n}} \Big|_{F=0} \right] d\xi = 0. \quad (5.19)$$

Wartości funkcji ψ zebrano w tabelicy 3, wykres funkcji dla różnych parametrów κ_1 przedstawiono na rys.2.

6. UWAGI KOŃCOWE

Przy rozpatrywaniu zagadnień związanych z nieustalonym przepływem ciepła przyjmowano dotychczas stałość parametrów fizycznych. W przedstawionej obecnie pracy zmienione zostały dotychczasowe założenia, umożliwiając uzyskanie rozwiązań przybliżonych w szerszej klasie zagadnień. Jak wykazano to w pracy - zagadnienia tego typu można przedstawić jako zadanie wariacyjne. Uzyskano dwie różne postaci całki wariacyjnej. Decydujący wpływ na wybór jednej z dwu postaci całki waria-

cyjnej do dalszych obliczeń mają warunki brzegowe. Przebieg obliczeń zilustrowano trzema przykładami liczbowymi.

Jednocześnie w tym miejscu chciałbym podziękować mgr.inż. J. Łachowi za pomoc w wykonaniu niektórych przykładów liczbowych.

BIBLIOGRAFIA

- [1] W e i n e r J.H.: "A method for the approximate solution of the heat equation". Wright Air Development Center, Technical Report 54-427. 1955.
- [2] D i c k e r D., F r i e d m a n M.B.: "Solution of heat conduction problems with nonseparable domains". American Society of Mechanical Engineers Paper 63-Wa-2. 1963.
- [3] K r a j e w s k i B.: "Application of variational methods to problems of unsteady heat flow". Arch. Mech. Stosowanej 5, 20. 1968.
- [4] L o r e t a n P.A.: "Laplace-variational method to transient multidimensional temperature distribution". Nucl. Eng. Design 11. 1969. No 1, 27-40.
- [5] S a v k a r S.D.: "On a variational formulation of a class of thermal entrance problems". Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.13, 1970 Pergamon Press, pp.1187-1197.
- [6] R o s e n P.: "Use of restricted variational principles for the solution of differential equations". J.Appl.Phys. 25, 336. 1954.
- [7] F i n l a y s o n B.A., S c r i v e n L.E.: "On the search for variational principles". J. Heat Mass Transfer, Vol.10, No 6, pp.799-821, Pergamon Press 1967.
- [8] K r a j e w s k i B.: "Ein direktes Variationsverfahren zur Behandlung der Wärmeübertragungsprobleme für erzwungene Konvektion". Int. Heat Mass Transfer, Vol.16, pp.469-483. Pergamon Press 1973.
- [9] D j u k i c Dj., V u j a n o v i c B.: "On a New Variational Principle of Hamiltonian Typ for Classical Field Theory". ZAMM, Bd 51, Nr 8, 1971, pp.611-616.

- [10] B i o t M.A.: "New methods in heat flow analysis with application to flight structures". J. Aeronaut. Sci. 24, 857. 1957.
- [11] B i o t M.A.: "Further developments of new methods in heat-flow analysis". J. Aerospace Sci. 26, 367. 1959.
- [12] B i o t M.A.: "Lagrangian thermodynamics of heat transfer in systems including fluid motion". J. Aerospace Sci. 29, 568. 1962.

ВАРИАЦИОННЫЙ ПОДХОД К ВОПРОСАМ СВЯЗАННЫМ С НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕПЛОПРОВОДНОСТЬЮ В НЕУСТАНОВИВШЕМСЯ СОСТОЯНИИ

К р а т к о е с о д е р ж а н и е

Представленный в работе вариационный принцип можно практически использовать для получения приближённого решения нелинейных вопросов теплопроводности.

Посредством вариационной техники, основанной на методе Канторовича, проблему нелинейного граничного значения можно привести к системе обыкновенных дифференциальных уравнений. Точность предлагаемого метода можно оценить путём сравнения результатов решений вопросов применяя вариационный метод или другие.

В настоящей работе излагается также метод конструирования пробных функции. Для иллюстрации метода приведены три численных примера.

A VARIATION APPROACH TO PROBLEMS INVOLVED IN NON-LINEAR HEAT CONDUCTION IN TRANSIENT STATES

S u m m a r y

It has been proved in this paper that a partial non-linear differential equation can be reduced to the variation problem. A non-linear boundary value problem can be reduced with the application of the variation technique based on the Kantorovich method, to a set of ordinary differential equations.

The accuracy of the method in question is estimated herein by comparing solutions to problems solved with the application of the variation method, and of the other method as well.

The method for the construction of trial functions has also been presented herein. Three examples have been quoted in order to explain the above method