

mgr inż. Jan Łach

Instytut Badań Jądrowych

**POLE TEMPERATURY W PRZEPLYWIE LAMINARNYM  
Z RADIACYJNĄ WYMIANĄ CIEPŁA NA ŚCIANCE KANAŁU**

1. Wstęp

Analiza ustalonych i nieustalonych zjawisk cieplnych w złożonych układach wielowymiarowych z nieliniowymi warunkami brzegowymi (radiacyjna lub złożona wymiana ciepła na brzegu układu) jest problemem na tyle skomplikowanym, że niezbędna jest gruntowna wiedza o przebiegu analogicznych procesów fizycznych w układach o stosunkowo prostej geometrii. Na podstawie tej wiedzy można, oczywiście jeszcze przy pewnych uzasadnionych założeniach upraszczających, uzyskać informacje odnośnie przybliżonego zachowania się rozpatrywanego układu. Wydaje się, że tego typu postępowanie ma większe szanse powodzenia niż bezpośrednia analiza bardzo złożonych, nieliniowych zagadnień brzegowych i abstrahowanie od fizyki danego zjawiska poprzez wprowadzanie bliżej nieuzasadnionych, z technicznego punktu widzenia, uproszczeń. Dążenie do uzyskania możliwie wiernych wyników (uwzględnienie niewielu założeń upraszczających) prowadzi do poszukiwania rozwiązania skomplikowanych zagadnień brzegowych. Wynika stąd, że w praktyce obliczeniowej trzeba jeszcze często decydować się na kompromis. Droga analizy numerycznej, chociaż w wielu przypadkach bywa niezawodna, jest zbyt żmudna i co najważniejsze nie zawsze skuteczna, mimo korzystania z najnowocześniejszych maszyn cyfrowych. Analiza kolejnych, coraz bardziej złożonych problemów powinna być oparta na wnioskach uzyskanych w trakcie rozpatrywania bardziej elementarnych modeli odpowiednich zjawisk

cieplnych. Uzyskane tą drogą wyniki mogą posłużyć jako cenne wskazówki odnośnie toku postępowania w sytuacji możliwie bliskiej rzeczywistości. Zagadnienie, które jest przedmiotem niniejszej pracy, stanowi element tzw. rozważań bazowych, na gruncie których będą realizowane pewne koncepcje dotyczące wyznaczania ustalonych i nieustalonych pól temperatury w nieliniowych, coraz bardziej złożonych układach wielowymiarowych.

## 2. Sformułowanie problemu. Model matematyczny

Zagadnienie ustalonej wymiany ciepła przy laminarnym przepływie płynu (przepływ Poiseuille'a) przez cylindryczny, prostosłupowy kanał o stałym przekroju, w przypadku liniowych warunków brzegowych typu: stała temperatura ścianki, stały strumień ciepły przy ściance, czy liniowa zmienność temperatury ścianki wzdłuż kanału—znane jest jako tzw. uogólniony problem Graetz-Nusselta. Problemowi temu poświęcono szereg prac [1] ÷ [6], w których przedstawiono różne metody uzyskania rozwiązania. W niniejszej pracy rozważa się zmodyfikowane zagadnienie Graetz-Nusselta, które określać się będzie dalej jako nieliniowy problem Graetz-Nusselta, a to ze względu na nieliniowy warunek brzegowy na ściance kanału. Jeśli przepływ jest ustalony i ustabilizowany hydraulicznie, to przy:

- a) braku wewnętrznych źródeł ciepła,
- b) pominięciu wzdłużnego przewodzenia ciepła i ciepła tarcia,
- c) założeniu stałych wartości parametrów fizycznych płynu, pole temperatury określone jest przez równanie zachowania energii, które w rozważanym przypadku ma postać parabolicznego równania różniczkowego cząsteczkowego drugiego rzędu

$$\frac{\partial^2 T}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial T}{\partial r} - \frac{1}{\kappa} u(r) \frac{\partial T}{\partial z} = 0, \quad (1)$$

gdzie

$$u(r) = 2 U \left[ 1 - (r/r_0)^2 \right]. \quad (2)$$

Przyjmuje się założenie, że wymiana ciepła na powierzchni kanału odbywa się wyłącznie drogą promieniowania cieplnego, zgodnie z prawem Stefana-Boltzmann'a

$$\bigwedge_{z>0} \lambda \frac{\partial T(r=r_0, z)}{\partial r} + \epsilon \sigma [T^m(r=r_0, z) - T_0^m] = 0, \quad (3)$$

gdzie

$$m = 4.$$

Jest to oczywiście nieliniowy warunek brzegowy trzeciego rodzaju.

Drugi warunek brzegowy jest naturalnym warunkiem symetrii

$$\bigwedge_{z>0} \frac{\partial T(r=0, z)}{\partial r} = 0. \quad (4)$$

Na wlocie płynu do kanału zakłada się stały profil temperatury

$$\bigwedge_{0 < r < r_0} T(r, z=0) = T_1 = \text{const.} \quad (5)$$

Po wprowadzeniu wielkości bezwymiarowych, które zdefiniowano w oznaczeniach, równanie różniczkowe (1) przybiera postać

$$\frac{\partial^2 \vartheta}{\partial \rho^2} + \frac{1}{\rho} \frac{\partial \vartheta}{\partial \rho} - (1-\rho^2) \frac{\partial \vartheta}{\partial \zeta} = 0, \quad (6)$$

a warunki brzegowe mają formę:

$$\bigwedge_{\zeta>0} \frac{\partial \vartheta(\rho=1, \zeta)}{\partial \rho} + \text{Nu}_z [\vartheta^m(\rho=1, \zeta) - 1] = 0, \quad (7)$$

$$\bigwedge_{\zeta>0} \frac{\partial \vartheta(\rho=0, \zeta)}{\partial \rho} = 0. \quad (8)$$

Natomiast warunek początkowy jest postaci:

$$\bigwedge_{0 < \rho < 1} \vartheta(\rho, \zeta=0) = \vartheta_1 = \text{const.} \quad (9)$$

Analogiczny problem rozpatrzono w pracy [12]. W wyniku zastosowania odpowiedniego przekształcenia całkowego zmodyfikowano wyjściowe równanie różniczkowe w ten sposób, że pojawił się w nim dodatkowy człon nieliniowy. Minimalizacja tego członu drogą odpowiedniego postępowania iteracyjnego doprowadziła do uzyskania przybliżonego rozwiązania numerycznego. W pracach [14], [15] również przeanalizowano problem wymiany ciepła przy laminarnym przepływie płynu w przypadku nieliniowego warunku brzegowego na ściance kanału, ale przy założeniu, że temperatura ścianki kanału jest równa zeru ( $T_0=0$ ), co stanowi poważne uproszczenie ze względu na fakt, że rozpatrywane zagadnienie staje się jednoparametrowe.

### 3. Zagadnienie wariacyjne

Do rozwiązania problemu (6) ÷ (9) stosuje się metodę opartą na zasadach rachunku wariacyjnego. Metodą tą posługiwano się wcześniej w [7] ÷ [10]. Poszukiwanie rozwiązania jest w tym przypadku równoważne rozpatrzeniu następującego zagadnienia na ekstremum funkcjonału o postaci

$$J\langle\psi\rangle = \int_0^{2\pi} \int_0^1 \left[ \frac{1}{2} (\text{grad } \psi)^2 + (1-\rho^2) \frac{\partial \psi}{\partial \zeta} \psi \right] \rho d\rho d\psi +$$

$$- \int_0^{2\pi} \text{Nu}_z \left[ \frac{1}{m+1} \psi^{m+1} (\rho=1, \zeta) - \psi (\rho=1, \zeta) \right] d\psi = \text{Extr.} \quad (10)$$

Spełnienie zespołu warunków:

a) silniejszego warunku Legendre'a (stosunkowo łatwo wykazać, że jest on spełniony),

b) warunku Eulera (znikanie pierwszej ograniczonej wariacji powyższego funkcjonału),  
wystarcza do istnienia tego ekstremum.

Stosując twierdzenie Greena-Gaussa-Ostrogradzkiego i uwzględniając warunki brzegowe: (7) i (8) otrzymuje się następujące wyrażenie na pierwszą ograniczoną wariację funkcjonału (10)

$$\delta J \langle v \rangle = \int_0^1 \left[ \operatorname{div}(\operatorname{grad} v) - (1-\rho^2) \frac{\delta v}{\delta \zeta} \right] \delta v \rho d\rho = 0. \quad (11)$$

Wykonanie całkowania wymaga uprzedniego założenia postaci wyrażenia na przestrzenny rozkład temperatury.

#### 4. Zastosowanie zmodyfikowanej metody Kantorowicza

Przy zastosowaniu metody Kantorowicza zakłada się przestrzenny rozkład temperatury w formie kombinacji liniowej

$$\tilde{v}(\rho, \zeta) = v_0(\rho, \zeta) + \sum_{i=1}^n q_i(\zeta) f_i(\rho). \quad (12)$$

W klasycznej metodzie Kantorowicza (w zastosowaniu do równań różniczkowych cząstkowych typu eliptycznego) dokonuje się intuicyjnego wyboru ciągu funkcji przybliżających  $f_i(\rho)$ . Jedynym kryterium jest spełnienie odpowiednich warunków brzegowych. W związku z tym powstał problem opracowania metody doboru tego ciągu i to przy zagadnieniach opisywanych nie tylko równaniami różniczkowymi cząstkowymi typu eliptycznego, ale i typu parabolicznego. Odpowiednie postępowanie zostało sprecyzowane w [7], a jego skuteczność wykazano w: [8], [9], [10]. Tak zmodyfikowana klasyczna metoda Kantorowicza będzie zastosowana do rozwiązania zagadnienia prezentowanego w niniejszej pracy.

Ciąg funkcji przybliżających dobiera się z eliptycznej części wyjściowego równania różniczkowego (6):

$$\begin{cases} \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dv_0}{d\rho} \right) - Q_0(\rho)(1-\rho^2) = 0, \\ \frac{1}{\rho} \frac{d}{d\rho} \left( \rho \frac{dv_i}{d\rho} \right) - Q_i(\rho)(1-\rho^2) = 0, \quad i = 1, 2, \dots, n, \end{cases} \quad (13)$$

gdzie

$$v_i(\rho, \zeta) = q_i(\zeta) f_i(\rho), \quad i=1, 2, \dots, n. \quad (14)$$

Odpowiednie warunki brzegowe są postaci:

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle \\ \zeta > 0 \end{array} \right. \frac{d v_0(\rho=1, \zeta)}{d \rho} + Nu_z [v_0^m(\rho=1, \zeta) - 1] = 0, \quad (15)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle \\ \zeta > 0 \end{array} \right. \frac{d v_0(\rho=0, \zeta)}{d \rho} = 0$$

oraz:

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle \\ \zeta > 0 \end{array} \right. \frac{d v_i(\rho=1, \zeta)}{d \rho} = 0, \quad (16)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} \triangle \\ \zeta > 0 \end{array} \right. \frac{d v_i(\rho=0, \zeta)}{d \rho} = 0.$$

Problem doboru funkcji przybliżających, spełniających jednorodne warunki brzegowe jest tzw. zewnętrznym zagadnieniem Neumanna (zagadnienie brzegowe drugiego rodzaju), które, jak wiadomo, jeśli posiada rozwiązanie, to z dokładnością do stałej addytywnej. Odpowiednie funkcje przybliżające określone są jednak jednoznacznie, a to ze względu na fakt, że rozpatrywany problem (6) ÷ (9) jest zagadnieniem brzegowym trzeciego rodzaju, które posiada rozwiązanie jednoznaczne. Jeśli w kombinacji liniowej (12) uwzględnić tylko jeden wyraz, to przybliżony rozkład temperatury płynu opisany jest wyrażeniem

$$\tilde{v}^{(1)}(\rho, \zeta) = v_0(\rho, \zeta) = \psi_0(\zeta) + 4 Nu_z [1 - \psi_0^m(\zeta)] f_0(\rho), \quad (17)$$

gdzie:

$$\psi_0(\zeta) = \left[ 1 - q_0(\zeta) / (4 Nu_z) \right]^{\frac{1}{m}}, \quad (18)$$

$$f_0(\rho) = \frac{1}{16} (4\rho^2 - \rho^4 - 3). \quad (19)$$

Stosunkowo łatwo można wykazać, że kolejne funkcje przybliżające określone są następująco:

$$f_1(\rho) = -\left(\frac{1}{25} \rho^5 - \frac{1}{9} \rho^3\right) + \frac{8}{15} \left(\frac{1}{16} \rho^4 - \frac{1}{4} \rho^2\right), \quad (20)$$

$$f_2(\rho) = -\left(\frac{1}{36}\rho^6 - \frac{1}{16}\rho^4\right) + \frac{5}{2}\left(\frac{1}{25}\rho^5 - \frac{1}{9}\rho^3\right) - \left(\frac{1}{16}\rho^4 - \frac{1}{4}\rho^2\right), \quad (21)$$

.....

$$f_n(\rho) = W_{n+4}(\rho). \quad (22)$$

Znajomość tych funkcji pozwala już wykonać całkowanie wyrażenia (11).

W wyniku otrzymuje się układ  $n+1$  nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych pierwszego rzędu:

$$\int_0^1 \left[ \operatorname{div}(\operatorname{grad} \tilde{v}) - (1-\rho^2) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \zeta} \right] \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \psi_0} \rho d\rho = 0, \quad (23a)$$

$$\int_0^1 \left[ \operatorname{div}(\operatorname{grad} \tilde{v}) - (1-\rho^2) \frac{\partial \tilde{v}}{\partial \zeta} \right] f_i(\rho) \rho d\rho = 0, \quad i=1,2,\dots,n, \quad (23b)$$

ponieważ

$$\frac{\partial v_i}{\partial q_i} \equiv \frac{\partial \tilde{v}}{\partial q_i} = f_i(\rho). \quad (24)$$

Do wyznaczenia warunków początkowych stosuje się metodę najmniejszych kwadratów. Żąda się, aby całka z kwadratu odchyżeń od funkcji zadanej przez (9) osiągała minimum. W konsekwencji prowadzi to do układu  $n+1$  nieliniowych równań algebraicznych.

$$\int_0^1 \left[ \tilde{v}(\rho, \zeta = 0) - v_i \right] \delta \tilde{v} \rho d\rho = 0. \quad (25)$$

W wyniku rozwiązania powyższych  $n+1$  zagadnień początkowych otrzymuje się ciąg współczynników funkcyjnych, co w połączeniu z faktem wcześniejszego wyznaczenia ciągu funkcji przybliżających prowadzi do określenia ostatecznych wyrażeń na kolejne przybliżenia poszukiwanego pola temperatury płynu.

## 5. Przykład numeryczny

Uwzględnienie w kombinacji liniowej (12) jednego członu sprowadza problem wyznaczenia odpowiedniego współczynnika funkcyjnego do nieliniowego zagadnienia początkowego:

$$\frac{d\psi_0}{d\zeta} = \frac{(\psi_0^{m-1} + \alpha)(\psi_0^m - \beta)}{a\psi_0^{2m-2} + b\psi_0^{m-1} + c}, \quad (26)$$

$$\psi_0^{2m-1}(\zeta=0) + \frac{40}{19 \text{Nu}_z} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \psi_0^m(\zeta=0) - \left(1 + \frac{40 \nu_i}{19 \text{Nu}_z}\right) \psi_0^{m-1}(\zeta=0) + \quad (26)$$

$$+ \frac{120}{19 m \text{Nu}_z^2} \psi_0(\zeta=0) - \frac{40(\text{Nu}_z + 3\nu_i)}{19 m \text{Nu}_z^2} = 0, \quad (27)$$

gdzie:

$$\alpha = \frac{24}{11 m \text{Nu}_z}, \quad \beta = 1,$$

$$a = -\frac{59}{440} m,$$

$$b = -\frac{1}{2 \text{Nu}_z},$$

$$c = -\frac{6}{11 m \text{Nu}_z}$$

(28)

Podobnie jak w [9] rozwiązanie można uzyskać w postaci zamkniętego wyrażenia algebraicznego, ale dla funkcji odwrotnej. Jest ono postaci

$$\zeta = P(m) \left[ R(-\sqrt[m]{\alpha}) \ln \left( \frac{\psi_0 + \sqrt[m]{\alpha}}{\psi_0(0) + \sqrt[m]{\alpha}} \right) + R(-\sqrt[m]{\beta}) \ln \left( \frac{\psi_0 + \sqrt[m]{\beta}}{\psi_0(0) + \sqrt[m]{\beta}} \right) \right] +$$

$$+ R(\sqrt[m]{\beta}) \ln \left( \frac{\psi_0 - \sqrt[m]{\beta}}{\psi_0(0) - \sqrt[m]{\beta}} \right) + \sum_{l=0}^{-\varepsilon(2-\nu_i m)} \text{re} R(\psi_{01}) \ln \left( \frac{\psi_0^2 - 2 \psi_0 \text{re} \psi_{01} + \psi_{01} \bar{\psi}_{01}}{\psi_0^2(0) - 2 \psi_0(0) \text{re} \psi_{01} + \psi_{01} \bar{\psi}_{01}} \right) +$$



$$\begin{aligned}
 & + \sum_{k=1}^{-\varepsilon(1-0,5m)} \operatorname{re} R(\Psi_{o_k}) \ln \left( \frac{\Psi_{o_k}^2 - 2 \Psi_{o_k} \operatorname{re} \Psi_{o_k} + \Psi_{o_k} \bar{\Psi}_{o_k}}{\Psi_{o_k}^2(0) - 2 \Psi_{o_k}(0) \operatorname{re} \Psi_{o_k} + \Psi_{o_k}(0) \bar{\Psi}_{o_k}(0)} \right) + \\
 & - 2 \left[ \sum_{l=0}^{-\varepsilon(2-0,5m)} \operatorname{im} R(\Psi_{o_l}) \operatorname{arctg} \left[ \frac{(\Psi_{o_l} - \Psi_{o_l}(0)) \operatorname{im} \Psi_{o_l}}{\Psi_{o_l} \Psi_{o_l}(0) - (\Psi_{o_l} + \Psi_{o_l}(0)) \operatorname{re} \Psi_{o_l} + \Psi_{o_l} \bar{\Psi}_{o_l}} \right] + \right. \\
 & \left. + \sum_{k=1}^{-\varepsilon(1-0,5m)} \operatorname{im} R(\Psi_{o_k}) \operatorname{arctg} \left[ \frac{(\Psi_{o_k} - \Psi_{o_k}(0)) \operatorname{im} \Psi_{o_k}}{\Psi_{o_k} \Psi_{o_k}(0) - (\Psi_{o_k} + \Psi_{o_k}(0)) \operatorname{re} \Psi_{o_k} + \Psi_{o_k} \bar{\Psi}_{o_k}} \right] \right], \quad (29)
 \end{aligned}$$

gdzie:

$$\Psi_{o_l} = \sqrt[m-1]{\alpha} \exp\left(\frac{2l+1}{m-1} \pi i\right), \quad l=0, 1, \dots, m-2, \quad (30)$$

$$\Psi_{o_k} = \sqrt[m]{\beta} \exp\left(\frac{2k}{m} \pi i\right), \quad k=0, 1, \dots, m-1, \quad (31)$$

$$R(\xi) = \frac{a\xi^{2m-2} + b\xi^{m-1} + c}{(2m-1)\xi^{2m-2} + \alpha m \xi^{m-1} - \beta(m-1)\xi^{m-2}}, \quad (32)$$

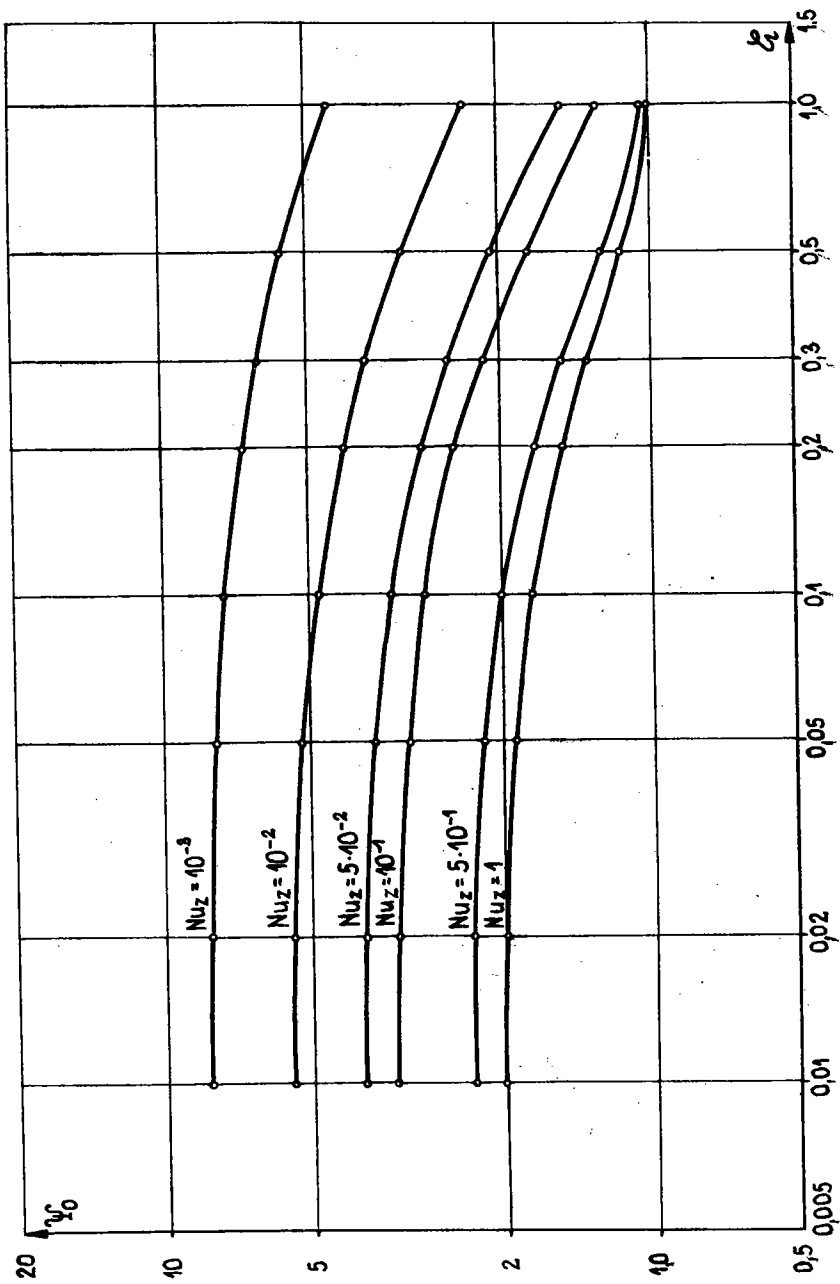
$$P(m) = \begin{cases} 1, & m=2n, \\ 0, & m=2n+1, \end{cases} \quad n=0, 1, 2, \dots \quad (33)$$

Oczywiście, że różnowartościowa w swej dziedzinie funkcja  $\zeta = f(\Psi_o)$  jest funkcją odwracalną, ale na drodze graficznej. Jeśli przyjąć formalne oznaczenie

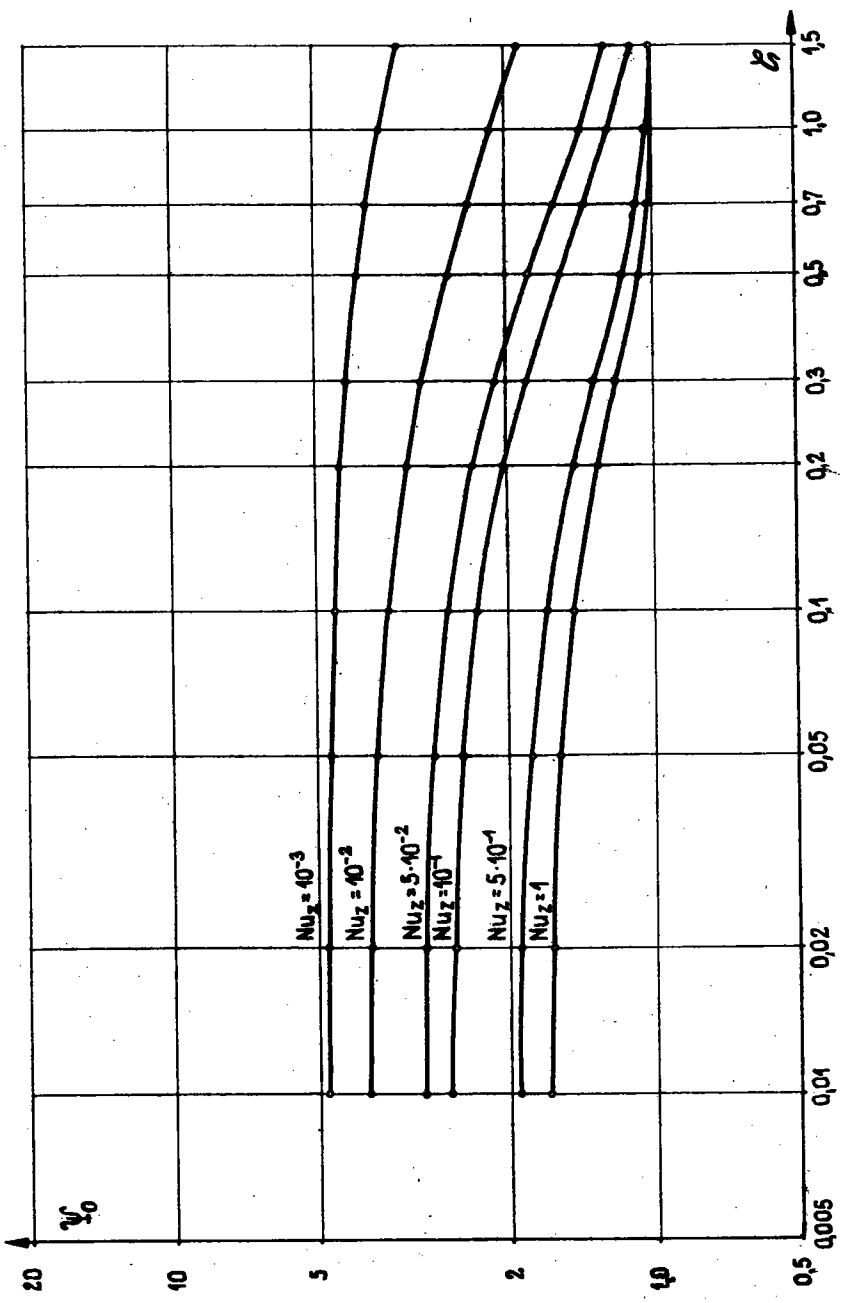
$$\Psi_o = f^{-1}(\zeta) \equiv g(\zeta), \quad (34)$$

to pierwsze przybliżenie pola temperatury płynu (uwzględnienie jednego członu w kombinacji liniowej (12)) określone jest wyrażeniem

$$\tilde{\psi}^{(1)}(\rho, \zeta) = g(\zeta) + 4 \operatorname{Nu}_Z [1 - g^m(\zeta)] f_o(\rho). \quad (35)$$



Rys. 1. Zależność współczynnika funkcyjnego  $\psi_0$  od bezwymiarowej współrzędnej  $\zeta (\psi_1=10,0, m=4)$



Rys. 2. Zależność współczynnika funkcyjnego  $\psi_0$  od bezwymiarowej współrzędnej  $\zeta$  ( $\gamma_1=5, 0, m=4$ )

Tablica 1

Wartości początkowe  $\Psi_0(\zeta=0)$ 

$Nu_z \backslash \psi_1$	10,0	5,0
$10^{-3}$	8,211391	4,811831
$10^{-2}$	5,635457	3,992164
$5 \times 10^{-2}$	4,040738	3,085571
$10^{-1}$	3,470138	2,705853
$5 \times 10^{-1}$	2,412826	1,951757
1,0	2,062942	1,694641

Tablica 2

$$\psi_1 = 5,0, m=4,0,$$

$Nu_z \backslash \rho$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$10^{-3}$	5,2078	5,1920	5,1661	5,1310	5,0877	5,0379	4,9831	4,9255	4,8675
$10^{-2}$	5,8644	5,7895	5,6670	5,5011	5,2966	5,0608	4,8018	4,5295	4,2553
$5 \times 10^{-2}$	6,4024	6,2698	6,0528	5,7588	5,3966	4,9789	4,5199	4,0376	3,5517
$10^{-1}$	6,5987	6,4430	6,1884	5,8433	5,4182	4,9280	4,3893	3,8232	3,2530
$5 \times 10^{-1}$	6,9509	6,7509	6,4240	5,9808	5,4349	4,8053	4,1135	3,3866	2,6543
1,0	7,0576	6,8431	6,4923	6,0169	5,4313	4,7559	4,0138	3,2340	2,4484

Tablica 3

$\psi_1 = 10,0 \text{ m}^2$

$\frac{\rho}{\mu z}$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$10^{-3}$	11,5750	11,4404	11,2204	10,9223	10,5550	10,1314	9,6659	9,1768	8,6841
$10^{-2}$	13,0917	12,7934	12,3057	11,6447	10,8306	9,8915	8,8598	7,7756	6,6834
$5 \times 10^{-2}$	13,8675	13,4745	12,8317	11,9606	10,8876	9,6500	8,2902	6,8613	5,4218
$10^{-1}$	14,1266	13,7003	13,0034	12,0587	10,8951	9,5530	8,0783	6,5288	4,9678
$5 \times 10^{-1}$	14,5831	14,0963	13,3003	12,2214	10,8925	9,3597	7,6756	5,9060	4,1232
1,0	14,7253	14,2188	13,3906	12,2681	10,8855	9,2907	7,5385	5,6974	3,8425

W tablicy 1 zamieszczono odpowiednie pierwiastki równania (27). Natomiast pierwsze przybliżenie warunku początkowego (9) dla dwu różnych wartości temperatury początkowej  $v_1$  przedstawiono w tablicach 2 i 3. Na rys. 1 i 2 pokazano przebieg zależności bezwymiarowego współczynnika funkcyjnego  $\Psi_0$  od bezwymiarowej współrzędnej w kierunku przepływu płynu  $-\zeta$ . Jest to funkcja odwrotna względem funkcji  $f$ , czyli zgodnie z wcześniej przyjętym oznaczeniem - funkcja  $g$  - (34).

Należy zauważyć daleko idącą analogię między rys. 1 i 2 oraz odpowiednimi zależnościami, które uzyskano w [9]. Rolę liczby podobieństwa Fouriera-Fo odgrywa tu bezwymiarowa współrzędna  $-\zeta$ . Analiza wyrażeń (17) i (35) prowadzi do wniosku, że funkcja  $g$  pokazuje zmienność temperatury płynu dla  $\rho = 1$ . W tablicach 4 i 5 przedstawiono pierwsze przybliżenie pola temperatury płynu w przekrojach:  $\zeta = 0,5$  i  $\zeta = 0,1$ . Jeśli w kombinacji liniowej (12) uwzględnia się dwa człony, to poszukiwane rozwiązanie jest postaci

$$\tilde{v}^{(2)}(\rho, \zeta) = v_0(\rho, \zeta) + v_1(\rho, \zeta) . \quad (36)$$

Oczywiście, że  $v_0(\rho, \zeta)$  określone jest wyrażeniem (17). Należy tu jednak zwrócić uwagę na fakt, że występujący tam współczynnik funkcyjny -  $\Psi_0(\zeta)$  będzie wyznaczony ponownie z innego niż poprzednio zagadnienia początkowego. Z (12), (20), (36) wynika, że drugie przybliżenie poszukiwanego pola temperatury płynu przedstawia się jako

$$\tilde{v}^{(2)}(\rho, \zeta) = \Psi_0(\zeta) + 4 Nu_z [1 - \Psi_0^m(\zeta)] f_0(\rho) + q_1(\zeta) f_1(\rho) . \quad (37)$$

Natomiast układ nieliniowych równań różniczkowych zwyczajnych, z którego wyznacza się współczynniki funkcyjne ma postać:

$$\left\{ \begin{array}{l} (r_1 \Psi_0^{m-1} + r_2 + r_3 \Psi_0^{1-m}) \frac{d\Psi_0}{d\zeta} - (r_4 + r_5 \Psi_0^{1-m}) \frac{dq_1}{d\zeta} = (r_6 + r_7 \Psi_0^{1-m})(1 - \Psi_0^m) + r_8 q_1 , \\ (r_9 \Psi_0^{m-1} + r_{13}) \frac{d\Psi_0}{d\zeta} - r_{10} \frac{dq_1}{d\zeta} = r_{11}(1 - \Psi_0^m) + r_{12} q_1 , \end{array} \right. \quad (38)$$

Tablica 4

Pole temperatury płynu w przekroju  $\zeta = 0,5$  ( $\psi_1 = 10,0$  i  $\psi_1 = 5,0$ ,  $m = 4$ )

$\frac{\delta}{Nu_z}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$10^{-3}$	6,3601 4,3544	6,3501 4,3514	6,3207 4,3428	6,2727 4,3287	6,2075 4,3096	6,1273 4,2860	6,0347 4,2588	5,9330 4,2290	5,8261 4,1976	5,7185 4,1660	5,6152 4,1357
$10^{-2}$	3,9367 3,0446	3,9266 3,0396	3,8967 3,0249	3,8478 3,0007	3,7814 2,9680	3,6998 2,9277	3,6056 2,8812	3,5021 2,8302	3,3933 2,7765	3,2837 2,7225	3,1786 2,6706
$5 \times 10^{-2}$	2,7789 2,2115	2,7698 2,2064	2,7428 2,1913	2,6986 2,1667	2,6388 2,1332	2,5651 2,0920	2,4800 2,0445	2,3866 1,9923	2,2884 1,9375	2,1859 1,8822	2,0946 1,8292
$10^{-1}$	2,4200 1,8994	2,4112 1,8947	2,3854 1,8808	2,3432 1,8580	2,2860 1,8270	2,2155 1,7890	2,1342 1,7451	2,0449 1,6968	1,9511 1,6461	1,8565 1,5950	1,7658 1,5460
$5 \times 10^{-1}$	1,8075 1,4381	1,8001 1,4343	1,7783 1,4230	1,7426 1,4046	1,6942 1,3795	1,6346 1,3487	1,5659 1,3132	1,4903 1,2742	1,4110 1,2332	1,3310 1,1918	1,2543 1,1522
1,0	1,6458 1,3190	1,6391 1,3158	1,6190 1,3061	1,5862 1,2902	1,5418 1,2687	1,4871 1,2423	1,4240 1,2117	1,3547 1,1782	1,2818 1,1430	1,2084 1,1075	1,1380 1,0734

U w a g a: w górnych wierszach zamieszczono wyniki przy  $\psi_1 = 10,0$ , w dolnych - przy  $\psi_1 = 5,0$  (odnosi się to także do tablicy 5)

Pole temperatury płynu w przekroju  $\zeta = 0,1$  ( $\psi_1 = 10,0$  i  $\psi_1 = 5,0, m = 4$ )

$\frac{f}{Nu_z}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$10^{-3}$	9,7286 4,9943	9,6980 4,9897	9,6075 4,9759	9,4596 4,9534	9,2591 4,9229	9,0121 4,8854	8,7272 4,8420	8,4142 4,7944	8,0853 4,7444	7,7540 4,6940	7,4361 4,6457
$10^{-2}$	9,1050 4,8484	9,0486 4,8317	8,8817 4,7824	8,6087 4,7017	8,2388 4,5924	7,7831 4,4577	7,2574 4,3024	6,6799 4,1317	6,0731 3,9524	5,4617 3,7717	4,8752 3,5984
$5 \times 10^{-2}$	8,7230 4,6141	8,6526 4,5884	8,4445 4,5125	8,1042 4,3883	7,6430 4,2199	7,0749 4,0126	6,4196 3,7734	5,6996 3,5107	4,9431 3,2345	4,1809 2,5964	3,4497 2,6895
$10^{-1}$	8,5585 4,5472	8,4837 4,5179	8,2624 4,4310	7,9005 4,2890	7,4100 4,0966	6,8058 3,8595	6,1089 3,5861	5,3432 3,2857	4,5386 2,9700	3,7281 2,6520	2,9504 2,3469
$5 \times 10^{-1}$	8,2313 4,3101	8,1488 4,2751	7,9047 4,1714	7,5054 4,0018	6,9644 3,7719	6,2979 3,4888	5,5292 3,1622	4,8646 2,8034	3,7971 2,4264	2,9030 2,0466	2,0452 1,6822
1,0	8,1113 4,2232	8,0266 4,1865	7,7757 4,0778	7,3654 3,9001	6,8094 3,6593	6,1246 3,3627	5,3347 3,0206	4,4667 2,6447	3,5547 2,2498	2,6360 1,8519	1,7545 1,4701



przy czym:

$$\left\{ \begin{array}{lll} r_1 = 0,061458 \text{ m Nu}_z, & r_5 = 0,004643 / (\text{m Nu}_z), & r_9 = 0,001752 \text{ m Nu}_z, \\ r_2 = 0,229167, & r_6 = 0,458333 \text{ Nu}_z, & r_{10} = 0,000104, \\ r_3 = 0,25 / (\text{m Nu}_z), & r_7 = \frac{1}{\text{III}}, & r_{11} = 0,018571 \text{ Nu}_z, \\ r_4 = 0,001752, & r_8 = -0,010317, & r_{12} = 0,000455, \quad (39) \\ & & r_{13} = 0,004643. \end{array} \right.$$

Układ ten można sprowadzić do postaci normalnej

$$\frac{d\Phi}{d\zeta} = F(\Phi(\zeta)), \quad (40)$$

gdzie:

$$\Phi = \begin{bmatrix} \psi_0(\zeta) \\ q_1(\zeta) \end{bmatrix}, \quad (41)$$

$$F = \begin{bmatrix} \frac{C_2 [A_3(\psi_0) + A_4(\psi_0)q_1] - A_2(\psi_0) [B_3(\psi_0) + C_4q_1]}{C_2A_1(\psi_0) - A_2(\psi_0)B_1(\psi_0)} \\ \frac{A_1(\psi_0) [B_3(\psi_0) + C_4q_1] - B_1(\psi_0) [A_3(\psi_0) + A_4(\psi_0)q_1]}{C_2A_1(\psi_0) - A_2(\psi_0)B_1(\psi_0)} \end{bmatrix}. \quad (42)$$

Przyjęto oznaczenia:

$$\left\{ \begin{array}{ll} A_1(\psi_0) = r_1\psi_0^{2m-1} + r_2\psi_0^{m-1} + r_3, & B_1(\psi_0) = r_9\psi_0^{m+1} + r_{13}, \\ A_2(\psi_0) = -(r_4\psi_0^{m-1} + r_5), & B_3(\psi_0) = r_{11}(1 - \psi_0^m), \\ A_3(\psi_0) = (1 - \psi_0^m)(r_6\psi_0^{m-1} + r_7), & C_2 = -r_{10}, \\ A_4(\psi_0) = r_8\psi_0^{m-1}, & C_4 = r_{12}. \end{array} \right. \quad (43)$$

Należy jeszcze określić odpowiednie warunki początkowe. Mają one następującą postać ogólną:

$$\left\{ \begin{array}{l} \int_0^1 \left[ \bar{v}^{(2)}(\rho, \zeta=0) - v_1 \right] \frac{\partial \bar{v}^{(2)}}{\partial \psi_0} \rho d\rho = 0, \\ \int_0^1 \left[ \bar{v}^{(2)}(\rho, \zeta=0) - v_1 \right] \frac{\partial \bar{v}^{(2)}}{\partial q_1} \rho d\rho = 0. \end{array} \right. \quad (44)$$

Jeśli uwzględnimy wcześniej uzyskane zależności, to otrzymuje się:

$$\left\{ \begin{aligned} & \psi_0^{2m-1}(\zeta=0) + \frac{1,007552}{\text{Nu}_z} \left(1 + \frac{1}{m}\right) \psi_0^m(\zeta=0) - \frac{\text{Nu}_z + 1,007552 v_1}{\text{Nu}_z} \psi_0^{m-1}(\zeta=0) + \\ & + \frac{1,090633}{m \text{Nu}_z^2} \psi_0(\zeta=0) - \frac{1,090633 v_1 + 1,007552 \text{Nu}_z}{m \text{Nu}_z^2} = 0, \\ & q_1(\zeta=0) = 10,512323 \text{Nu}_z \left[ \psi_0^m(\zeta=0) - 1 \right] + 39,737139 \left[ \psi_0(\zeta=0) - v_1 \right]. \end{aligned} \right. \quad (45)$$

Zwraca się uwagę, że nie zachodzi konieczność rozwiązania układu nieliniowych równań algebraicznych, (co jest trudnym zadaniem [16]).

Oczywiście, że w rozważanym przypadku nie jest możliwe uzyskanie rozwiązania w postaci zamkniętej. W związku z tym należy stosować jedną z iteracyjnych metod przybliżonych, zwracając uwagę na zbieżność odpowiedniego procesu iteracyjnego. Szczegółowa analiza rozpatrywanego zjawiska fizycznego dostarcza wystarczających do zapewnienia zbieżności iteracji informacji o poszukiwanym pierwiastku  $\psi_0(\zeta=0)$ . Natomiast gdyby konieczne było rozwiązanie układu nieliniowych równań algebraicznych, to mogłyby wystąpić poważne trudności związane z określeniem, wystarczająco bliskiego rozwiązaniu, przybliżenia początkowego, co w konsekwencji stawiałoby pod znakiem zapytania zbieżność ciągu kolejnych przybliżeń. Poważne kłopoty związane z zapewnieniem zbieżności iteracji prowadzą wtedy do stosowania różnego rodzaju subtelnych metod (np. metody najszybszego spadku). W rozpatrywanym przypadku zastosowano metodę Bairstowa a jako metody porównawczej użyto metody Newtona, przy czym stwierdzono zadowalającą zgodność wyników. Należy także wziąć pod uwagę fakt, że trzeba tu stosować arytmetykę zmiennoprzecinkową o wielokrotnej dokładności, a to w celu zabezpieczenia się przed wielomianami źle uwarunkowanymi [16].

Tablica 6

Wartości początkowe  $\Psi_0(\zeta=0)$  - drugie przybliżenie

$Nu_z \backslash u_1$	10,0	5,0
$10^{-3}$	7,285132	4,584814
$10^{-2}$	4,802417	3,522364
$5 \times 10^{-2}$	3,408318	2,647811
$10^{-1}$	2,921120	2,309529
$5 \times 10^{-1}$	2,034107	1,669090
1	1,748273	1,463170

Tablica 7

Wartości początkowe  $q_1(\zeta=0)$ 

$Nu_z \backslash u_1$	10,0	5,0
$10^{-3}$	-78,280949	-11,863801
$10^{-2}$	-150,725901	-42,640017
$5 \times 10^{-2}$	-191,530298	-68,159363
$10^{-1}$	-205,804345	-78,054519
$5 \times 10^{-1}$	-231,814351	-96,823812
1	-240,206951	-102,874603

Tablica 8

Drugie przybliżenie warunku początkowego (9),

$$v_1 = 5,0, \quad m = 4$$

$\rho$ Nu <sub>z</sub>	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$10^{-3}$	4,9255	4,9502	4,9814	5,0112	5,0329	5,0414	5,0336	5,0094	4,9718
$10^{-2}$	4,7061	4,7965	4,9111	5,0218	5,1043	5,1399	5,1178	5,0367	4,9075
$5 \times 10^{-2}$	4,5126	4,6583	4,8432	5,0226	5,1574	5,2178	5,1862	5,0606	4,8580
$10^{-1}$	4,4361	4,6033	4,8156	5,0219	5,1773	5,2475	5,2125	5,0700	4,8394
$5 \times 10^{-1}$	4,2888	4,4969	4,7615	5,0189	5,2137	5,3032	5,2623	5,0881	4,8047
1	4,2403	4,4617	4,7433	5,0173	5,2249	5,3208	5,2782	5,0941	4,7938

W tablicach 6 i 7 zamieszczono odpowiednie pierwiastki równań (45). Oczywiście, że przy  $m = 4$  występuje przynajmniej jedna para pierwiastków rzeczywistych.

W przypadku gdy istnieje ich kilka, to należy dokonać wyboru odpowiedniej z nich, zgodnie z zasadami podanymi w [9] i [10].

Natomiast w tablicach 8 i 9 przedstawiono drugie przybliżenie warunku początkowego (9) dla dwu rozważanych wartości bezwymiarowej temperatury początkowej  $v_1$ .

Układ nieliniowych równań różniczkowych (40) jest tzw. dwuwymiarowym układem autonomicznym. Można wykazać, że wektorfunkcja  $F$  jest różniczkowalna w sposób ciągły względem  $\Phi$ . Istnieje więc jednoznaczne rozwiązanie tego układu równań, które jednak w rozważanym przypadku nie da się zapisać w postaci zamkniętych wyrażeń algebraicznych. W związku z tym stosuje się standardową procedurę Mersn, która oparta jest na klasycznej metodzie Rungego-Kutty czwartego rzędu. W wyniku uzyskuje się zależność współczynników funkcyjnych  $\psi_0$  i  $q_1$  od bezwymiarowej współrzędnej w kierunku przepływu płynu  $\xi$ .

Tablica 9

Drugie przybliżenie warunku początkowego (9),  $\psi_1 = 10,0, m = 4$

$\rho$ $Nu_z$	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9
$10^{-3}$	9,4643	9,6301	9,8400	10,0427	10,1935	10,2581	10,2166	10,0669	9,8288
$10^{-2}$	8,9150	9,2376	9,6473	10,0450	10,3444	10,4793	10,4109	10,1348	9,6885
$5 \times 10^{-2}$	8,5980	9,0093	9,5323	10,0409	10,4253	10,6013	10,5194	10,1738	9,6120
$10^{-1}$	8,4862	8,9287	9,4914	10,0388	10,4531	10,6437	10,5572	10,1876	9,5855
$5 \times 10^{-1}$	8,2812	8,7804	9,4156	10,0342	10,5031	10,7205	10,6261	10,2128	9,5378
1	8,2143	8,7319	9,3906	10,0322	10,5189	10,7450	10,6482	10,2210	9,5226

Pole temperatury w przekroju  $\zeta = 0,1$  - drugie przybliżenie

$\frac{\rho}{Nu_z}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$10^{-3}$	9,5979 4,9415	9,5727 4,9380	9,4966 4,9271	9,3694 4,9088	9,1930 4,8831	8,9714 4,8506	8,7105 4,8119	8,4188 4,7684	8,1073 4,7216	7,7895 4,6736	7,4820 4,6270
$10^{-2}$	9,2038 4,7801	9,1528 4,7663	8,9990 4,7246	8,7438 4,6549	8,3923 4,5585	7,9532 4,4373	7,4393 4,2948	6,8676 4,1356	6,2596 3,9657	5,6417 3,7924	5,0452 3,6248
$5 \times 10^{-2}$	8,9783 4,6413	8,9121 4,6184	8,7132 4,5493	8,3839 4,4346	7,9313 4,2765	7,3670 4,0788	6,7079 3,8472	5,9759 3,5894	5,1987 3,3150	4,4098 3,0361	3,6487 2,7667
$10^{-1}$	8,8990 4,5868	8,8275 4,5603	8,6126 4,4803	8,2572 4,3478	7,7689 4,1653	7,1605 3,9374	6,4502 3,6707	5,6619 3,3742	4,8252 3,0590	3,9761 2,7387	3,1573 2,4295
$5 \times 10^{-1}$	8,7538 4,4824	8,6725 4,4489	8,4283 4,3479	8,0248 4,1810	7,4711 3,9516	6,7819 3,6657	5,9780 3,3318	5,0865 2,9612	4,1410 2,5678	3,1821 2,1686	2,2576 1,7835
1	8,7066 4,4483	8,6221 4,4124	8,3684 4,3046	7,9492 4,1263	7,3742 3,8815	6,6587 3,5766	5,8244 3,2208	4,8994 2,8260	3,9186 2,4071	2,9241 1,9822	1,9654 1,5725

Tabela 11

Pole temperatury w przekroju  $\zeta = 0,5$  - drugie przybliżenie

$\frac{\rho}{\mu}$	0,0	0,1	0,2	0,3	0,4	0,5	0,6	0,7	0,8	0,9	1,0
$10^{-3}$	6,3272 4,3365	6,3149 4,3333	6,2793 4,3240	6,2227 4,3090	6,1482 4,2889	6,0590 4,2644	5,9591 4,2366	5,8524 4,2063	5,7431 4,1749	5,6353 4,1435	5,5332 4,1136
$10^{-2}$	3,8171 3,0334	3,8036 3,0271	3,7650 3,0088	3,7047 2,9800	3,6264 2,9420	3,5344 2,8967	3,4331 2,8459	3,3267 2,7919	3,2194 2,7366	3,1153 2,6821	3,0177 2,6307
$5 \times 10^{-2}$	2,5805 2,1502	2,5683 2,1435	2,5336 2,1243	2,4798 2,0943	2,4109 2,0553	2,3309 2,0094	2,2439 1,9586	2,1538 1,9053	2,0642 1,8514	1,9783 1,7989	1,8983 1,7497
$10^{-1}$	2,1762 1,8413	2,1648 1,8349	2,1324 1,8164	2,0825 1,7877	2,0190 1,7507	1,9456 1,7073	1,8664 1,6597	1,7849 1,6100	1,7046 1,5601	1,6280 1,5119	1,5571 1,4668
$5 \times 10^{-1}$	1,4980 1,3235	1,4888 1,3183	1,4631 1,3038	1,4243 1,2817	1,3758 1,2538	1,3212 1,2219	1,2637 1,1879	1,2063 1,1534	1,1514 1,1197	1,1006 1,0881	1,0545 1,0591
1	1,3093 1,1886	1,3012 1,1843	1,2790 1,1723	1,2459 1,1542	1,2053 1,1319	1,1602 1,1068	1,1139 1,0806	1,0687 1,0548	1,0267 1,0302	1,0000 1,0078	1,0000 1,0000

W tablicach 10 i 11 przedstawiono drugie przybliżenie pola temperatury dla  $\zeta = 0,5$  i  $\zeta = 0,1$  przy rozpatrywanych poprzednio wartościach bezwymiarowej temperatury początkowej, przy czym w górnych wierszach zamieszczono wyniki przy  $\nu_1 = 10,0$ , a w dolnych przy  $\nu_1 = 5,0$ , zresztą analogicznie jak w tablicach 4 i 5 w przypadku pierwszego przybliżenia.

Uzyskane wyniki porównano z wynikami otrzymanymi przy zastosowaniu metody różnic skończonych, przy czym nieliniowy warunek brzegowy został oparty na tzw. ulepszonym schemacie Schmidta.

Jeśli przyjąć, że błąd względny określa się analogicznie jak w [9], to:

a) w przypadku pierwszego przybliżenia rozbieżność wyników prezentowanej metody i metody różnic skończonych jest:

1) dla  $\zeta = 0,5 < 2\%$ ,

2) dla  $\zeta = 0,1 < 5\%$ ;

b) w przypadku drugiego przybliżenia rozbieżność ta wynosi odpowiednio:

1) dla  $\zeta = 0,5 < 1\%$ ,

2) dla  $\zeta = 0,1 < 3\%$ .

Dyskusja błędu względnego, obliczonego przy użyciu metody pośredniej, potwierdza przypuszczenia oparte na analizie sposobu spełnienia warunku początkowego [9], [10]. Odpowiednia zgodność dwóch kolejnych przybliżeń warunku początkowego pociąga za sobą podobną zgodność pól temperatury w różnych przekrojach poprzecznych kanału, wyznaczonych przy pomocy: metody opartej na zasadach rachunku wariacyjnego i metody różnic skończonych.

Wyniki uzyskane w niniejszej pracy są podstawą do dalszej analizy cieplnej rozważanego układu (np. do wyznaczenia lokalnej wartości liczby podobieństwa Nusselta i jej wartości asymptotycznej).

#### WYKAZ OZNACZEŃ

r - współrzędna promieniowa

z - współrzędna osiowa



- $2r_0$  - średnica kanału  
 $\lambda$  - przewodność cieplna płynu  
 $\rho$  - gęstość płynu  
 $C_p$  - ciepło właściwe płynu przy  $p = \text{const}$   
 $u$  - prędkość płynu w kanale  
 $U$  - średnia prędkość płynu w kanale  
 $\chi$  - dyfuzyjność ciepła (współczynnik wyrównywania temperatur)  
 $\varepsilon$  - emisyjność powierzchni kanału  
 $\delta$  - stała Stefana-Boltzmana  
 $T, T_1, T_0$  - temperatura odpowiednio: płynu, płynu na wlocie do kanału, ośrodka otaczającego  
 $\rho = r/r_0$  - bezwymiarowa współrzędna promieniowa  
 $\zeta = z/(p_e \cdot r_0)$  - bezwymiarowa współrzędna osiowa  
 $Pe$  - liczba podobieństwa Pecleta  
 $\mathcal{T} = T/T_0$  - bezwymiarowa temperatura bezwzględna  
 $\mathcal{T}_1$  - bezwymiarowa temperatura płynu na wlocie do kanału  
 $Nu_Z = (\varepsilon \delta r_0 T_0^3) / \lambda$  - zmodyfikowana liczba podobieństwa Nusselta, parametr promieniowania  
 $\mathfrak{J}^{(k)}(\rho, \zeta)$  - k-te przybliżenie pola temperatury płynu  
 $\{f_i(\rho)\}$  - ciąg funkcji przybliżających  
 $\{a_i(\zeta)\}$  - ciąg współczynników funkcyjnych  
 $Q_i(\rho)$  - wielomian i-tego stopnia względem  $\rho$  o współczynnikach będących funkcjami  $\zeta$   
 $\text{re}Z$  - część rzeczywista liczby zespolonej  $Z$   
 $\text{im}Z$  - część urojona liczby zespolonej  $Z$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [ 1 ] Graetz L.: "Über die Wärmeleitfähigkeit von Flüssigkeiten". Annalen der Physik, 1883, s.79 oraz 1885, s.337.
- [ 2 ] Nusselt W.: "Die Abhängigkeit der Wärmeübergangszahl von der Rohrlänge". Zeitschrift des VDI, 1910, s.1154.
- [ 3 ] M. Abramowitz M.: "On solution of differential equation occuring in problem of heat convection laminar flow in tube". Journal of Mat. and Physics, 1953, s.184.
- [ 4 ] Sellars J.R., Tribus M., Klein J.S.: "Heat transfer to laminar flow in a round tube or flat conduit-The Graetz Problem Extended". Transactions ASME, 1956, s.441.

- [ 5 ] Lévêque M.A.: "Le lois de la transmission de la chaleur par convection". Ann.Mines, 1928, s.201,305,381.
- [ 6 ] Tribus M., Klein J.: "Forced convection from nonisothermal surfaces". Heat Transfer, Univ. of Michigan, 1953, s.211.
- [ 7 ] Krajewski B.: "Ein direktes Variationsverfahren zur Behandlung der Wärmeübertragungsprobleme für erzwungene Konvektion". Int. J. Heat Mass Transfer, Vol.16, s.469-483,1973.
- [ 8 ] Łach J.: "Zastosowanie zmodyfikowanej metody Kantorowicza do wyznaczenia nieustalonego pola temperatury". Biuletyn Informacyjny Instytutu Techniki Ciepłej Politechniki Warszawskiej. nr 36 Warszawa, 1972.
- [ 9 ] Łach J.: "Nieustalone pole temperatury przy nieliniowym warunku brzegowym". Archiwum Budowy Maszyn, w druku.
- [ 10 ] Łach J.: "Wariacyjne ujęcie nieustalonego przewodzenia ciepła w przypadku nieliniowego warunku brzegowego trzeciego rodzaju". Archiwum Budowy Maszyn, w druku.
- [ 11 ] Łuppow A.N., Ogłoblin B.G.: "Pribliżennoje reszenie niekatorych nieliniejszych zadacz teorii ciepłoprowodnosti", IFŻ, t. XVIII, nr 5, 1969.
- [ 12 ] Sałomatow W.W.: "K rascziotu radiacjonnowo ochładzienia twiordych tież", IFŻ, t. XVII, nr 1,1969.
- [ 13 ] Postolnik J.S.: "Tiempieraturnyj rascziot płastinki i cylindra, nagriewajemych odnowriemienno izkuczeniem i konwiekczej", IFŻ, t. XVI, nr 6, 1969.
- [ 14 ] Iwanow W.W., Miedwiediew G.G.: "Radiacjonnyj pierienos tiepła k łaminarnomu potoku žydkosti", IFŻ, t.XVIII, nr 3, 1970.
- [ 15 ] Kadanier J.S., Rassadkin J.P., Spiektow E.L.: "Tieploobmien pri łaminarnom tieczenii žydkosti w trubie, otwodjaszczzej tieplo izkuczeniem", IFŻ, t.XX, nr 1, 1971.
- [ 16 ] Ralston A.: Wstęp do analizy numerycznej. PWN. Warszawa 1971.

## ТЕМПЕРАТУРНОЕ ПОЛЕ ПРИ ЛАМИНАРНОМ ТЕЧЕНИИ С РАДИАЦИОННЫМ ТЕПЛООБМЕНОМ НА СТЕНКЕ КАНАЛА

### К р а т к о е   с о д е р ж а н и е

В работе представлено использование прямого вариационного метода для определения установившегося температурного поля при ламинарном течении с радиационным теплообменом на стенке канала. Показано процесс вычислений в конкретном численном примере. Полученные результаты представляют основу для дальнейших тепловых расчётов.

TEMPERATURE FIELD IN THE LAMINAR FLOW WITH THE RADIATIVE  
HEAT TRANSFER ON THE DUCT WALL

S u m m a r y

An application of the direct variational method to the determination of steady temperature field in the laminar flow with a radiative heat transfer on the duct wall has been presented in this paper.

The course of calculations as related to a specific numerical case has been reproduced here.

The results obtained furnish a starting point for further thermal calculations.

Rękopis dostarczoneo we wrześniu 1973 r.