

Mgr inż. A. Kłopotcki
Katedra Teorii Maszyn Ciepłych

ANALIZA WYMIANY CIEPŁA DROGĄ SWOBODNEJ KONWEKcji
W UKŁADZIE RÓWNOLEGLYCH PŁYT IZOTERMICZNYCH

Wstęp

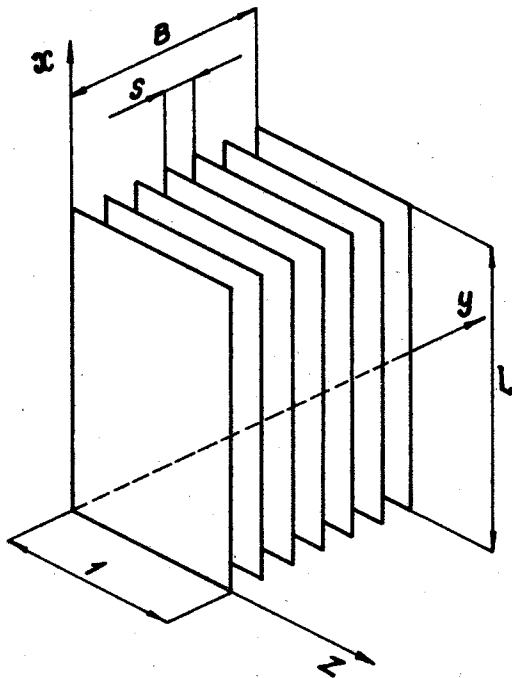
Wymiana ciepła drogą swobodnej konwekcji w układzie równoległych płyt izotermicznych była przedmiotem prac wielu badaczy. Dobrze znane są prace eksperymentalne Elenbaasa, Siegela i Norrisa Starnera i Mc. Manusa oraz rozważania teoretyczne Bodoia i Osterle a. Bodoia i Osterle'a rozwiązali metodą numeryczną układ równań "konwekcji nieściśliwej", uzyskując między innymi krzywą zmienności. $Nu = f(Gr Pr)$ dla układu równo-

ległych płyt izotermicznych, dającą bardzo dobrą zgodność z wynikami badań Elenbaasa.

Niniejsza praca stawia sobie za cel poszukiwanie takiego układu równoległych płyt izotermicznych, który w zajmowanej przez siebie objętości, określonej wymiarami gabarytowymi układu B.L. 1 (rys. 1) rozpraszałby największą ilość ciepła przy danych wartościach: temperatury płyt T , temperatury czynnika odbierającego ciepło T_0 oraz wysokości płyty L . Innymi słowy, zagadnienie sprowadza się do określenia optymalnego odstępu między płytami S w zależności od wartości wyrażenia $A =$

$$= \frac{1}{\theta_0} \frac{T - T_0}{\nu^2} \frac{1}{L}, \text{ lub też}$$

określenia ilości płyt równoległych o wysokości L i pomijalnie małej grubości δ rozmieszczonych wzdłuż wymiaru B w równych odstępach S .



Rys. 1

W wyrażeniu A użyto następujących oznaczeń:

- θ_0 - temperatura bezwzględna czynnika odbierającego ciepło,
- ν - współczynnik lepkości kinematycznej czynnika.

Dodatkowo zakłada się, że wszystkie wielkości wpływające na charakter zależności $Nu = f(Gr, Pr)$ nie wykazują zmian w kierunku osi Z .

Należy podkreślić, że tak postawione zagadnienie odnosi się wyłącznie do układu wielu płyt równoległych, natomiast zupełnie traci sens w odniesieniu do jednego tylko kanału utworzonego przez dwie płyty równoległe.

Oczywiście rozwiązanie postawionego zagadnienia możliwe jest jedynie w przypadku posiadania zależności $Nu = f(Gr, Pr)$. W tej pracy posłużono się krzywą uzyskaną przez Bodoia i Osterle'a (rys. 2).

Przedstawienie analityczne zagadnienia

Ilość ciepła przejmowana z powierzchni układu płyt wyznaczana jest zazwyczaj z równania Newtona

$$Q = \bar{\alpha} F_p (T - T_0), \quad (1)$$

gdzie: $\bar{\alpha}$ - średni współczynnik przejmowania ciepła,

F_p - całkowita powierzchnia wymiany ciepła,

T - temperatura płyt,

T_0 - temperatura czynnika odbierającego ciepło przed jego wejściem do kanału.

Równanie (1) można przedstawić w innej formie

$$\frac{Q}{T - T_0} = \bar{\alpha} F_p. \quad (2)$$

Dalsze rozważania przeprowadzane są w oparciu o żądanie

$$\frac{Q}{T - T_0} = \max. \quad (3a)$$

Wyrażenie (3a) jest równoważne

$$\bar{\alpha} F_p = \max \quad (3b)$$

Czynniki występujące po lewej stronie równania (3b) można przedstawić jeszcze w innej formie

$$\bar{\alpha} = Nu \frac{\lambda}{s}, \quad (4)$$

gdzie Nu - liczba Nusselta,

λ - współczynnik przewodności cieplnej czynnika odbierającego ciepło,

s - odstęp między płytami.

Według wzoru przytoczonego w pracy Bodoia i Osterle'a

$$Nu = H'(Gr) Gr Pr \quad (5)$$

tutaj

$$Pr = \frac{C_p \rho \nu}{\lambda} - \text{liczba Prandtla,}$$

C_p - ciepło właściwe czynnika,

ρ - gęstość.

Elenbaas wprowadził w odniesieniu do wymiany ciepła w kanałach utworzonych z płyt równoległych następującą definicję liczby Grashofa

$$Gr = g \frac{1}{\theta_0} \frac{T - T_0}{\nu^2} \frac{s^4}{L}, \quad (6)$$

g - przyspieszenie ziemskie.

Powierzchnię wymiany ciepła występującą w wyrażeniu (3b) można wyrazić przez wymiary płyt

$$F_p = 2 L \frac{B}{S}. \quad (7)$$

Przyjęto w kierunku osi z wymiar jednostkowy.

Wstawiając do lewej strony równości (3b) wartości z równań (4), (5) i (7) otrzymuje się

$$\begin{aligned} \bar{\alpha} F_p &= Nu \frac{\lambda}{S} F_p = H'(Gr) Gr Pr \frac{\lambda}{S} 2 L \frac{B}{S} = \\ &= 2 L B \lambda Pr H'(Gr) Gr \frac{1}{s^2}. \end{aligned} \quad (8)$$

Obecnie można przeprowadzić maksymalizowanie wyrażenia (8) względem szerokości kanału s

$$\frac{d}{ds} \left[2 L B \lambda Pr H'(Gr) Gr \frac{1}{s^2} \right] = \quad (9a)$$

$$= 2 L B \lambda Pr \frac{d}{ds} \left[H'(Gr) Gr \frac{1}{s^2} \right] = 0.$$

Oczywiście również

$$\frac{d}{ds} \left[H'(Gr) Gr \frac{1}{s^2} \right] = 0, \quad (9b)$$

czyli

$$\frac{dH'(Gr)}{dGr} \frac{dGr}{ds} Gr \frac{1}{s^2} + H'(Gr) \frac{dGr}{ds} \frac{1}{s^2} - 2 H'(Gr) Gr \frac{1}{s^3} = 0 \quad (10)$$

Przeprowadzając proste przekształcenia algebraiczne i uwzględniając, że $\frac{dGr}{ds} = 4 \frac{Gr}{s}$ otrzymuje się następujące równanie różniczkowe

$$\frac{d H'(Gr)}{d Gr} Gr + \frac{1}{2} H'(Gr) = 0 . \quad (11)$$

Rozdzielając zmienne

$$\frac{dH'(Gr)}{H'(Gr)} = - \frac{1}{2} \frac{d Gr}{Gr} . \quad (12)$$

Scałkowanie równania (12) prowadzi do zależności

$$H'(Gr) = \frac{C}{Gr^{1/2}} , \quad (13)$$

gdzie C - stała dowolna wynikła z całkowania.

Podstawiając uzyskane wyrażenie (13) do równości (5) otrzymuje się zależność $Nu = f(Gr Pr)$, przy której wartość iloczynu F_p nie zależy w ogóle od odstępów S.

$$Nu = \frac{C}{Gr^{1/2}} Gr Pr = C Gr^{1/2} Pr , \quad (14a)$$

lub

$$Nu = C'(Gr Pr)^{1/2} , \quad (14b)$$

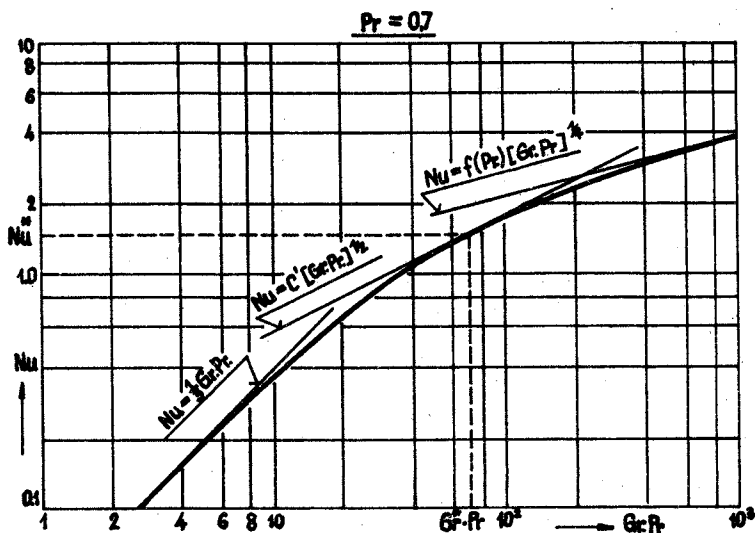
$C' = C Pr^{1/2}$ - nowa stała dowolna.

Równanie (14b) wykreślone we współrzędnych Nu, Gr Pr logarytmicznych przedstawia linię prostą.

Zależność rzeczywista $Nu = f(Gr Pr)$ dla płyt równoległych otrzymana na podstawie rozważań teoretycznych Bodoia i Osterle'a we współrzędnych logarytmicznych Nu, Gr Pr jest zobrazowana przez krzywą ciągłą, dla której tangens nachylenia stycznej zmienia się w zależności od wartości liczby Gr Pr w zakresie

od 1 do $\frac{1}{4}$ (dla małych liczb $Gr Pr - Nu = \frac{1}{3} Gr Pr$, natomiast dla wielkich wartości $Gr Pr Nu = f(Pr) [Gr Pr]^{\frac{1}{4}}$).

Wobec tego z ciągłej zmiany nachylenia stycznej do linii $Nu = f(Gr Pr)$ w zakresie $1 - \frac{1}{4}$ można wnioskować, że równość (14b) przedstawia styczną do linii $Nu = f(Gr Pr)$ w punkcie określonym przez pewne szczególne wartości liczb Nu^* oraz $Gr^* Pr$ (rys. 2).



Rys. 2

Po lewej stronie punktu Nu^* , $Gr^* Pr$ styczna ma wykładnik potęgi przy liczbie Gr większy niż $1/2$, natomiast po prawej stronie punktu Nu^* , $Gr^* Pr$ wykładnik potęgi przy liczbie Gr jest mniejszy niż $1/2$.

Wstawiając wartość $H'(Gr)$ z równania (13) do równania (8) otrzymać można

$$\bar{\alpha} F_p = 2 L B \lambda Pr C Gr^{1/2} \frac{1}{S^2}, \quad (15)$$

$$Gr = g \frac{1}{\theta_0} \frac{T - T_0}{\nu^2} \frac{s^4}{L}.$$

Z analizy wyrażenia (15) wynika, że przy ustalonych wielkościach T_0 , T , i L iloczyn $\bar{\alpha} F_p$ dla wartości liczb Gr leżą-

cych po lewej stronie Gr^* rośnie ze wzrostem s , zaś dla liczb Gr leżących po prawej stronie Gr^* iloczyn $\bar{\alpha} F_p$ maleje ze wzrostem s , zatem osiąga on swoje maksimum dla wartości liczby $Gr = Gr^*$.

Wartości liczb Gr^* , Nu^* oraz stałej dowolnej C' zależą od wielkości liczby Pr .

Linia określająca zmienność $Nu = f(Gr Pr)$ wyznaczona była drogą obliczeń numerycznych i kształt funkcji $Nu = f(Gr Pr)$ w całym obszarze zmienności liczby Gr jest nieznanym, zatem bezpośrednio wyznaczenie punktu styczności stycznej (w układzie logarytmicznym) wynikającej z równości (14b) do linii $Nu = f(Gr Pr)$ było niemożliwe.

Dlatego do określenia wartości Nu^* , Gr^* Pr oraz c' posłużono się metodą graficzną.

Dla często spotykanej, ze względu na zastosowanie w technice, liczby $Pr = 0,7$ wartości poszukiwanych liczb są następujące: $Gr^* Pr = 70$; $Gr^* = \frac{70}{Pr} = \frac{70}{0,7} = 100$; $Nu^* = 1,55$;

$$c' = CPr^{1/2} = \frac{Nu^*}{(Gr^* Pr)^{1/2}} = \frac{1,55}{\sqrt{70}} = 0,185$$

Stąd szerokość kanału S przy ustalonych T_0 , T i L z uwzględnieniem podstawienia

$$A = g \frac{1}{\theta_0} \frac{T - T_0}{\nu^2} \frac{1}{L}, \quad (16)$$

wynosi

$$S^* = \sqrt[4]{\frac{100}{A}} \quad (17)$$

oraz współczynnik przejmowania ciepła

$$\bar{\alpha}^* = 1,55 \frac{\lambda}{S^*}. \quad (18)$$

Z równań (17) i (16) wynika, że wartość S^* rośnie ze wzrostem T_0 i L przy ustalonej temperaturze T oraz maleje ze wzrostem T przy ustalonych wielkościach T_0 i L .

Współczynnik przejmowania ciepła $\bar{\alpha}^*$ przy określonej wartości S^* rośnie ze wzrostem temperatury T , ponieważ wzrasta wówczas λ .

Z analizy równości (16), (17) i (18) wypływa jeszcze jeden wniosek mianowicie: jeżeli ustalona jest powierzchnia rozwinięcia, określona przez iloczyn wymiarów bazy wymiennika BL, to korzystniej jest rozwijać powierzchnię wymiany ciepła przez powiększanie wymiaru B i zmniejszanie jednocześnie wysokości L, ponieważ przy danych T_0 i T uzyskuje się w ten sposób wzrost współczynnika przejmowania ciepła $\bar{\alpha}^*$.

Zakończenie

Wymienniki ciepła z płaskimi żebrami umieszczonymi na pionowo usytuowanej bazie były przedmiotem badań eksperymentalnych Starnera i Mc.Manusa, podobne badania przeprowadzono również na terenie Katedry Teorii Maszyn Ciepłych. Uzyskane wyniki wykazują dobrą zgodność z krzywą $Nu = f(GrPr)$ otrzymaną przez Bodoia i Osterle'a. Ta zgodność jest tym lepsza, im żebra posiadają wyższą sprawność η_z oraz w przypadku, gdy powierzchnia bazy wymiennika nie stanowi więcej niż 8% całkowitej powierzchni wymiany ciepła.

Przytoczone zatem rozważania teoretyczne mogą znaleźć praktyczne zastosowanie przy projektowaniu wymienników ciepła posiadających żebra płaskie o wysokiej sprawności.

Bibliografia

1. Bodoia J.R., Osterle J.F.: The Development of Free Convection Between Heated Vertical Plates. ASME 1961.
2. Starner K.E., Mc Manus H.N. Jr.: An Experimental Investigation of Free-Convection Heat Transfer from Rectangular - Fin Arrays. Journal of Heat Transfer 1963/273.