Jarosław Mikielewicz

Instytut Maszyn Przepływowych, Politechnika Gdańska

ZASADY FORMUŁOWANIA MODELI MATEMATYCZNYCH ZJAWISK CIEPLNO-PRZEPŁYWOWYCH

W pracy przedstawiono podstawy bilansowania ekstensywnych wielkości fizycznych, zasady tworzenia równań konstytutywnych i zamknięć modeli. W oparciu o podstawy termodynamiki klasycznej i procesów nieodwracalnych przedstawiono wariacyjne sformułowania modeli. Podano sposoby upraszczania opisu matematycznego i wynikające stąd teorie: warstwy przyściennej, przepływu w kanale.

OZNACZENIA

a – dyfuzyjność cieplna, współczynnik absorpcji
c – ciepło właściwe
E – energia
e – energia właściwa
F – siła, wielkość ekstensywna
f – siła jednostkowa, funkcja, parametr właściwy
G – bezwymiarowy profil temperatury
g – przyspieszenie ziemskie
h – entalpia
J – strumień termodynamiczny
K – kręt
L – współczynnik fenomenologiczny
m – masa
M – moment siły
n – wektor kierunkowy
p – ciśnienie
Q – ciepło, źródło
q – gęstość strumienia ciepła, źródło właściwe
r – promień

S – entropia, pole powierzchni bocznej
s – entropia właściwa
T – temperatura
t – czas
u – energia wewnętrzna właściwa
V – objętość
υ – objętość właściwa
w – prędkość
X – siły termodynamiczne
x – zmienna niezależna
y – współrzędna
z – współrzędna
β – współczynnik rozszerzalności termicznej
δ – grubość, symbol Kroneckera
ε – tensor permutacji
μ – dynamiczny współczynnik lepkości
ν – kinematyczny współczynnik lepkości
ρ – gęstość
τ – naprężenie styczne
Ω – wielkość ekstensywna

Indeksy dotyczą:
1, 2, 3 – współrzędnych
w – ścianki
k – kinetycznej
s – entropii
υ – objętości
x – sił termodynamicznych
J – przepływów termodynamicznych
p – ciśnienia
t – termicznej
h – hydraulicznej

WSTĘP

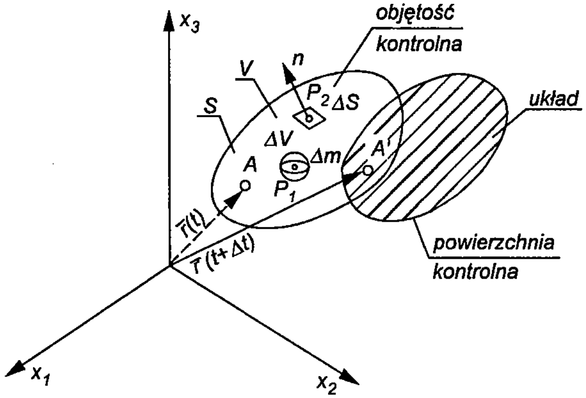
Przewidywanie przebiegu procesów, w tym procesów cieplnych polega na badaniu ich modeli. Model odtwarzający fizycznie proces nazywa się *modelem fizycznym*, a model opisany zależnościami matematycznymi nazywa się *modelem matematycznym*. Modelowanie matematyczne przeprowadza się wtedy, gdy proces posiada dostateczny opis matematyczny. Modelowanie matematyczne zjawiska lub procesu przeprowadza się w kilku etapach:

- formułuje się opis matematyczny zjawiska,
- ustala się metodę rozwiązania problemu oraz algorytm obliczeń, wykonuje się obliczenia,
- porównuje się uzyskane rezultaty z modelem fizycznym rzeczywistego zjawiska.

Jeżeli nie znajduje się odpowiedniej metody rozwiązania lub uzyskany rezultat nie jest zadowalający w porównaniu z wynikami modelu fizycznego, wprowadza się zmiany w modelu matematycznym zjawiska i cały proces modelowania powtarza się. Przy formułowaniu modeli matematycznych łączy się wiedzę fizyczną o zjawisku z wiedzą matematyczną [1], [9], [10], [11], [16], [18], [20].

W opisie matematycznym zjawisk cieplno-przepływowych zachodzących w przestrzeni i czasie występują różne wielkości fizyczne. W zależności od roli jaką odgrywają w zjawisku rozróżniamy wielkości *ekstensywne* i *intensywne*. Mogą one mieć różny *charakter tensorowy*: skalarny, wektorowy lub tensora wyższego rzędu.

Przestrzeń fizyczną, w której zachodzi zjawisko uważa się za przestrzeń jednorodną i izotropową. Modeluje się ją *przestrzenią Euklidesa*, w której istnieje tensor metryczny. Tensor jako obiekt fizyczny lub geometryczny istnieje niezależnie od układu współrzędnych. Rozpatrując zjawisko lub proces wyodrębnia się w przestrzeni za pomocą powierzchni zamkniętej przedmiot badań, zwany *układem*. Układ zawiera stale tą samą materię molekularną oraz pole związane z tą materią. Przestrzeń zajętą przez układ w chwili początkowej nazywa się *objętością kontrolną*, a powierzchnia otaczająca objętość kontrolną nazywa się *powierzchnią kontrolną*. Układ zawiera stale te same cząstki materii, natomiast przez objętość kontrolną przechodzą różne inne cząstki z wyjątkiem chwili początkowej (rys. 1).



Rys. 1. Układ, objętość kontrolna, powierzchnia kontrolna

Rozróżnia się dwie metody opisu ruchu: *metodę substancjonalną*, śledzącą cząstki układu zwaną *metodą Lagrange'a* i metodę opisującą zachowanie się materii w objętości kontrolnej, zwaną *metodą Eulera*. Wielkość, która opisuje szybkość zmian funkcji opisującej własności cząstek nazywa się *pochodną materialną* lub *substancjalną*. Można ją wyrazić w zmiennych materialnych lub przestrzennych. Własności globalne układu wyrażają się przez całki rozciągnięte na objętość zajętą przez układ. Pochodną materialną wielkości globalnej podaje tzw. *ogólny teoremat transportu* wielkości ekstensywnych Reynoldsa [13], [17].

1. PODSTAWY BILANSOWANIA WIELKOŚCI EKSTENSYWNYCH

Podstawowe prawa fizyczne, którym podlegają wszystkie ośrodki ciągłe to:
a. zasada zachowania masy (Lavoisiera),
b. zasada bilansu pędu (Newtona),
c. zasada bilansu momentu pędu,
d. zasada bilansu energii (Joula – Pierwsza Zasada Termodynamiki),
e. Druga Zasada Termodynamiki, która określa kierunek zachodzenia procesów.

Zasady bilansowania można przedstawić w postaci ogólnej w zmiennych materialnych:

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = Q, \tag{1}$$

gdzie: $F(m, m\upsilon, E)$ i $Q(0, F, Q - L)$.
Aby uzyskać zapis we współrzędnych przestrzennych wykorzystuje się ogólny teoremat Reynoldsa.
Dla parametrów skupionych w objętości kontrolnej można na podstawie ogólnego teorematu transportu wyprowadzić zależność:

$$\dot{F} = \frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial t} + \sum_{1}^{n} (f_i \dot{m}_i)_{\text{wyj}} - \sum_{1}^{n} (f_i \dot{m}_i)_{\text{wej}} = Q \tag{2}$$

a dla parametrów rozłożonych w objętości kontrolnej:

$$\rho \dot{f} = q \quad \text{lub} \quad \frac{\partial(\rho f)}{\partial t} + J = q, \tag{3}$$

gdzie: $J = (\rho f w_i)_{,i}$ – strumień, $q = Q/m$.

a. Zasada zachowania masy, na podstawie (1):

$$\dot{m} = \frac{d}{dt} \int_V \rho\,(x_k, t)\,dV = 0. \tag{4}$$

Po wykorzystaniu ogólnego teorematu Reynoldsa otrzymujemy:

$$\int_V \left(\dot{\rho} + \rho w_{i,i}\right) = \int_V \left(\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\rho w_i\right)_{,i}\right) dV = 0. \tag{5}$$

Wynikają stąd lokalne – różniczkowe prawa zachowania.
Teoremat transportu Reynoldsa szczególny, wprowadza się w przypadku, gdy:

$$P_{ij} = \int_V \left(\rho\, \Omega_{ij}\right) dV. \tag{6}$$

Po wykorzystaniu zasady zachowania masy z ogólnego teorematu transportu Reynoldsa otrzymuje się:

$$\dot{P}_{ij} = \int_V \left(\rho\, \Omega_{ij}\right) dV = \int_V \left(\rho\, \dot{\Omega}_{ij}\right) dV. \tag{7}$$

b. Równanie bilansu pędu, wykorzystując (1), mamy:

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho w_i dV = \int_V \tau_i^{(n)} dS + \int_V \rho f_i dV. \tag{8}$$

Po skorzystaniu z teorematu szczególnego Reynoldsa oraz twierdzenia Gaussa-Ostrogradzkiego otrzymuje się:

$$\int_V \left(\sigma_{ki,k} + \rho f_i - \rho w_i\right) dV = 0. \tag{9}$$

Całkowa postać pozwala na otrzymanie lokalnej postaci.
c. Równanie bilansu krętu lub momentu pędu, wykorzystując (1), ma postać:

$$\frac{d}{dV} \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho w_k dV = \int_S \varepsilon_{ijk} x_j \tau_k^n dS + \int_V \varepsilon_{ijk} x_j \rho f_k dV. \tag{10}$$

Uwzględniając teoremat szczególny Reynoldsa (zasadę zachowania masy) oraz równanie ruchu, uzyskuje się $\varepsilon_{ijk}\sigma_{jk} = 0$.
Oznacza to, że tensor σ_{jk} jest symetryczny przy spełnieniu równania bilansu masy i pędu.
d. Równanie bilansu energii, wykorzystując (1), ma postać:
Dla zachowawczych pól masowych:

$$\frac{d}{dt}\left(E_k + U + E_p\right) = \int_S \tau_k^n w_k dS + \int_V q_\upsilon dV - \int_V q_i n_i dS, \tag{11}$$

gdzie:

$$E_k = \frac{1}{2} \int_V \rho w_k w_k dV; \quad U = \int_V u_\upsilon dV; \quad f_i = -E_{p,i}.$$

Dla ciała sztywnego $\dot{U} = 0$ i wówczas przy braku wymiany ciepła i źródeł ciepła zmiana energii jest spowodowana tylko pracą sił powierzchniowych.

Przy braku sił powierzchniowych energia mechaniczna (kinetyczna + potencjalna) jest zachowana, co wynika z (11). Wyznaczając bilans energii wewnętrznej z zależności (11), mamy:

$$\int_V \rho\, \dot{u}\, dV = \int_V \sigma_{ki} d_{ki}\, dV - \int_V q_{i,i}\, dV + \int_V q_\upsilon\, dV. \tag{12}$$

Można go uzyskać z bilansu energii całkowitej lub przez odjęcie od bilansu energii całkowitego bilansu energii mechanicznej (energię kinetyczną i energię potencjalną lub pracę sił powierzchniowych).

Wprowadzając ciśnienie oraz tensor naprężeń stycznych do tensora naprężeń

$$\sigma_{ki} = -\delta_{ik} p + \tau_{ik}$$

otrzymamy z (12) równanie energii wewnętrznej:

$$\rho \dot{u} = -q_{i,i} - p\left(\frac{1}{\rho}\right)_{i,i} + \tau_{ik} w_{i,k} + q_\upsilon . \tag{13}$$

Zwykle interesuje nas rozkład temperatur. W tym celu do równania energii wewnętrznej (13) wprowadzamy entalpię:

$$h = u + \frac{p}{\rho}.$$

Korzystając z prawa zachowania masy otrzymuje się równanie bilansu energii wewnętrznej w postaci:

$$\rho \frac{dh}{dt} = -q_{i,i} + \frac{dp}{dt} + \tau_{ik} w_{i,k} + q_\upsilon . \tag{14}$$

W wielu zagadnieniach pomija się zmiany ciśnienia, wówczas:

$$\rho c_p \frac{dT}{dt} = -q_{i,i} + \tau_{ik} w_{i,k} + q_\upsilon . \tag{15}$$

e. Nierówność entropijna.

Wprowadzamy bilans energii i masy do równania Gibbsa w postaci:

$$\rho \frac{du}{dt} = T\rho \frac{ds}{dt} - p\rho \frac{d\left(\frac{1}{\rho}\right)}{dt} = \rho T \frac{ds}{dt} - p w_{i,i}. \tag{16}$$

Otrzymuje się:

$$\rho \frac{ds}{dt} + \left(\frac{1}{T} q_i\right)_{,i} - \frac{q_\upsilon}{T} = -\frac{1}{T^2} q_i T_{,i} + \frac{1}{T} \tau_{ik} w_{i,k} \ge 0 . \tag{17}$$

Przedstawione prawa fizyczne są słuszne dla każdego ośrodka (gazów, cieczy, ciał stałych).

Równania zapisane w zapisie tensorowym są niezmiennicze i nie zależą od układu współrzędnych.

2. RÓWNANIA KONSTYTUTYWNE I ZAMKNIĘCIA MODELI

a. *Równania konstytutywne* to związki wiążące stan obciążenia mechanicznego (stan naprężeń) ze stanem odkształceń ośrodka:

$$F\left(\sigma_{ij}, \dot{\sigma}_{ij}, \ldots, \varepsilon_{ij}, \dot{\varepsilon}_{ij}, \ldots\right) = 0. \tag{18}$$

Odzwierciedlają one najważniejsze modelowe cechy ośrodka. Równania konstytutywne podlegają ograniczeniom, tzw. postulatom:

- determinizmu (wyznacza jednoznacznie naprężenia),
- lokalnego działania (lokalny stan naprężeń zależy od lokalnych deformacji),
- niezależności materialnej (stan naprężeń nie zależy od układu współrzędnych),

i innym.

Uproszczone i zlinearyzowane równania konstytutywne przedstawiają się następująco:

$$\sigma_{ij} = C_{ijkm}\varepsilon_{km} \tag{19}$$

lub

$$\varepsilon_{ij} = a_{ijkm}\sigma_{km}. \tag{20}$$

Uwzględniając symetrię tensorów oraz izotropię ośrodka, liczbę niezależnych współczynników redukuje się z 81 do 2. Tak jest np. dla ciał sprężystych (Lame'go), dla płynu lepkiego. Zgodnie z postulatem o lokalnej równowadze można lokalnie wprowadzić entropię i zdefiniować temperaturę i ciśnienie.

b. W stanie równowagi obowiązuje *równanie stanu* np. $u = u(p, \rho)$. Wprowadzając do opisu temperaturę musimy dysponować równaniem *termicznym* i *kalorycznym stanu* lub *równaniem fundamentalnym*. Z zasady stanu wynika, że: *dla substancji złożonej* liczba niezależnych parametrów opisujących stan, to wszystkie parametry intensywne wykonujące prace odwracalne oraz temperatura i jeden dowolny parametr ekstensywny łatwo mierzalny.

c. W przypadku oddziaływania termicznego potrzebne jest równanie Fouriera:

$$q_i = -\lambda T_{,i}. \tag{21}$$

Jeżeli układ realizuje kilka procesów nieodwracalnych, zależność na odpowiednie strumienie jest bardziej złożona, określa ją *termodynamika procesów nieodwracalnych.*

Do równania Gibbsa, z *termodynamiki klasycznej*, wprowadza się pochodne substancjalne: energii wewnętrznej, gęstości czynnika (z bilansu masy). Następnie w tak zapisanym równaniu identyfikuje się *strumienie termodynamiczne* oraz *źródło entropii.* Źródło entropii daje się przedstawić w postaci sumy iloczynów *sił termodynamicznych* X_i i *strumieni termodynamicznych* J_i:

$$\sigma_s = X_i J_i .$$

Po zdefiniowaniu sił i strumieni w ramach *liniowej termodynamiki procesów nieodwracalnych* można zapisać związki liniowe np. na strumienie:

$$J_i = L_{ik} X_k ,$$

gdzie:

L_{ik} – *współczynniki fenomenologiczne* tworzące macierz symetryczną. Jest to tak zwana *Zasada Onsagera* lub *Czwarta Zasada Termodynamiki* [8], [12], [21].

Powyższe związki zwane są *równaniami fenomenologicznymi.* Występujące w nich współczynniki L_{ii} dotyczące czystych procesów (przewodzenia ciepła, dyfuzji itp.) wyznacza się na podstawie znanych praw fizyki (Fouriera, Ficka, Ohma itp.). Współczynniki dotyczące procesów „krzyżowych" ($L_{ik} = L_{ki}$) wyznacza się eksperymentalnie. Z uwagi na to, że źródło entropii jest dodatnie, współczynniki fenomenologiczne muszą spełniać odpowiednie związki wynikające z dodatniego określenia formy kwadratowej, jaką tworzą strumienie (twierdzenie Silvestra). Równania fenomenologiczne po wyznaczeniu współczynników są ponownie wprowadzane do równań bilansowych. Ogólnie równania te można zapisać w postaci:

$$\frac{\partial(\rho f_i)}{\partial t} + \left(\sum_i L_{ik} X_k + f_i w_k\right)_{,k} = q_i . \tag{22}$$

Jak wynika z (22), równania bilansowe są *sprzężone* przez odpowiednie człony związane z przepływem strumieni: masy, pędu i energii.

Aby istniało jednoznaczne rozwiązanie szczególnego problemu muszą być dodatkowo zdefiniowane *warunki jednoznaczności problemu*: geometria układu, warunki graniczne (początkowe i brzegowe), własności fizyczne ośrodka.

3. WARIACYJNE SFORMUŁOWANIA PROBLEMU

Sformułowanie wariacyjne zagadnienia daje możliwość zapisania praw fizycznych w alternatywnej formie *ekstremum funkcjonału.* Zagadnienia rozwiązywane metodami wariacyjnymi można podzielić na dwie grupy. Do pierwszej zalicza się zagadnienia wariacyjne prowadzące do równania minimalizującego funkcjonał (Eulera-Lagrange'a). Do drugiej grupy należą tzw. *zagadnienia optymalizacyjne* [2], [3], [6], [7], [19].

Sformułowanie wariacyjne zagadnienia daje możliwość zapisania praw fizycznych w alternatywnej formie ekstremum funkcjonału. Zadanie sprowadza się do skonstruowania odpowiedniego funkcjonału. Sprawdzeniem doboru właściwego funkcjonału są równania Eulera-Lagrange'a wynikające z minimalizacji tego funkcjonału. W przypadku zagadnień cieplno-przepływowych powinny one mieć postać równań bilansowych: masy, pędu i energii. Opis wariacyjny ma szereg zalet. Po pierwsze operujemy całkami, a nie pochodnymi. Po drugie własności funkcjonału nie zależą od układu współrzędnych. Po trzecie funkcjonał w postaci całki daje możliwość użycia innych metod przybliżonych w rozwiązaniu.

Zagadnienia optymalizacyjne polegają na wykorzystaniu własności ekstremum funkcjonału. Ekstrema te wynikają z zasad fizycznych lub proponowanych hipotez. W termodynamice procesów równowagowych funkcjami takimi mogą być *potencjały termodynamiczne*: energia, entalpia, funkcja Helmholtza czy Gibbsa, w zależności od więzów układu. Korzystając z kryteriów (funkcji) termodynamiki klasycznej przyjmuje się brak nieodwracalności w procesie. Jest to czasami zbyt duże uproszczenie. Korzystanie z kryteriów równowagowych wymaga specjalnych założeń upraszczających lub też sztucznego wmontowania do opisu nieodwracalności. Aby skorzystać z wariacyjnego sformułowania problemu ujmującego nieodwracalności należy stosować kryteria termodynamiki procesów nieodwracalnych: *minimum produkcji entropii* i *minimum dyssypacji energii*. Kryteria te dotyczą przypadków, gdy strumienie i siły termodynamiczne na granicy układu nie zmieniają się w czasie. Wtedy układ osiąga stan stacjonarny, a dyssypacja energii lub produkcja entropii wewnątrz układu osiąga wartość minimalną. Minimum produkcji entropii lub równoważne mu minimum dyssypacji energii należą do kryteriów liniowej termodynamiki procesów nieodwracalnych. Oznacza to, że obowiązują one dla stanów stacjonarnych niezbyt oddalonych od stanu równowagi. Można wówczas przyjąć, że współczynniki fenomenologiczne są niezależne od sił i strumieni termodynamicznych i spełnione są zależności Onsagera-Casimira. Jest to możliwe, gdy człony konwekcyjne (nieliniowe) w równaniach bilansowych są pomijalne. Równaniem różniczkowym minimalizującym funkcjonał jest najczęściej równanie bilansu energii wewnętrznej lub pędu. Przydatność metody badawczej opartej na kryterium minimum produkcji entropii lub minimum dyssypacji energii rozstrzyga ostatecznie eksperyment.

Bardziej ogólnym kryterium wychodzącym poza ramy liniowej termodynamiki procesów nieodwracalnych jest *kryterium ewolucji*. Z potencjału ewolucyjnego otrzymujemy te same równania zachowania, które zostały użyte do jego konstrukcji [19].

4. MODELE OŚRODKÓW PŁYNNYCH

Płyn lepki Newtona opisują równania [5], [15]:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \left(\rho w_k\right)_{,k} = 0 .$$

1. $\sigma_{mk,k} + \rho f_k = \rho \dot{w}_k$ (23)

$$\rho \dot{u} = \sigma_{km} d_{km} - q_{i,i} .$$

2. Równania konstytutywne:

$$\sigma = -p ,$$

$$\tau_{ij} = 2 \mu D_{ij}^{d} .$$

3. Termiczne równanie stanu:

$$p = p(\rho , T) .$$

4. Kaloryczne równanie stanu:

$$u = u(p , T) .$$

5. Strumień cieplny:

$$q_i = -\lambda T_{,i} .$$

Ponadto:

$$\rho \dot{s} + \left(\frac{1}{T} q_i \right)_{,i} \geq 0 .$$

Jest to układ 16 równań z szesnastoma niewiadomymi.
Wprowadzając równania konstytutywne do równania ruchu (23) otrzymuje się równanie Naviera-Stokesa (N-S):

$$\rho w_i = -p_{,i} + \mu w_{i,jj} + \rho f_i . \tag{24}$$

Wprowadzając równanie Fouriera do równania energii (23) otrzymuje się równanie Fouriera-Kirchhoffa (F-K). Dla cieczy nieściśliwych przedstawia się ono następująco:

$$\rho c_{\upsilon} \frac{dT}{dt} = \left(\lambda T_{,i} \right)_i + \tau_{ij} w_{i,j} + q_{\upsilon} . \tag{25}$$

Równanie energii po wprowadzeniu entalpii sprowadza się do postaci:

$$\rho c_{\upsilon} \frac{dT}{dt} = \left(\frac{\partial \ln \upsilon}{\partial \ln T} \right)_p \frac{dp}{dt} - q_{i,i} + \tau_{ij} w_{i,j} + q_{\upsilon} \tag{26}$$

dla małych zmian p można otrzymać równanie F-K. Dla nieizotermicznego płynu w polu ciężkości (konwekcji naturalnej) stosuje się koncepcję Boussinesqa. Równanie ruchu po wykorzystaniu koncepcji Boussinesqa przedstawia się następująco:

$$\rho \dot{w} = \rho \frac{dw_i}{dt} = \mu w_{i,jj} - p_{,i} - \rho_0 \beta (T - T_0) g . \tag{27}$$

5. UPROSZCZENIA OPISU MATEMATYCZNEGO

Uproszczenia opisu matematycznego polegają m.in. na przyjęciu, że:

- stałe są własności fizyczne,
- zagadnienie jest stacjonarne,
- zmniejszone są wymiary przestrzeni,
- pominięto człony w równaniach lub warunkach brzegowych.

Uproszczenia polegające na ocenie rzędu wielkości członów równań opisujących zagadnienie, to teorie: warstwy przyściennej, przepływu w kanale, przepływów pełzających ... .

Teoria warstwy przyściennej

Pole prędkości i temperatur podzielono na: obszar silnych gradientów prędkości i temperatur, obszar małych gradientów. Obszar silnych gradientów występuje na małych odległościach od ścianki. Daje to możliwość wprowadzenia uproszczeń. W wyniku uproszczeń otrzymuje się różniczkowe równania warstwy przyściennej.

Równania różniczkowe warstwy przyściennej:

$$w_x \frac{\partial w_x}{\partial x} + w_y \frac{\partial w_y}{\partial y} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x} + \upsilon \frac{\partial^2 w_x}{\partial y^2},$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0, \tag{28}$$

$$\frac{\partial w_x}{\partial x} + \frac{\partial w_y}{\partial y} = 0,$$

$$w_x \frac{\partial T}{\partial x} + w_y \frac{\partial T}{\partial y} = a \frac{\partial^2 T}{\partial y} + \frac{q_\upsilon}{c_p \rho}.$$

Równania różniczkowe warstwy przyściennej pozwalają na znalezienie tzw. ścisłych rozwiązań. Uzyskane przez scałkowanie równań różniczkowych, całkowe równania warstwy przyściennej pozwalają na znalezienie rozwiązań przybliżonych.

Równania całkowe warstwy przyściennej:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dx}\int_0^{\delta_h} w_x\left(w_\infty - w_x\right) dy &= \frac{\tau_w}{\rho}, \\ \frac{d}{dx}\int_0^{\delta_t} w_x\left(T_\infty - T\right) dy &= \frac{q_w}{\rho c_p}. \end{aligned} \tag{29}$$

Pierwsze z tych równań to równanie Karmana, a drugie to równanie Krużylina.

Przepływy w kanałach

Przyjmuje się następujące założenia upraszczające:

$$w_x \gg w_y; \quad \frac{\partial w_x}{\partial y} \gg \frac{\partial w_x}{\partial x}; \quad \frac{\partial T}{\partial y} \gg \frac{\partial T}{\partial x}.$$

Wówczas dla q = const otrzymuje się równanie energii w postaci:

$$w_x \frac{d\langle T\rangle}{dx} = a\frac{1}{y^k}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^k \frac{\partial T}{\partial y}\right), \tag{30}$$

gdzie: $k = 0, 1, 2$ w zależności od układu współrzędnych.

Dla T_w = const

$$w_x \frac{d\langle T\rangle}{dx} G = a\frac{1}{y^k}\frac{\partial}{\partial y}\left(y^k \frac{\partial T}{\partial y}\right), \tag{31}$$

gdzie:

$$G = \frac{T_w - T}{T_w - \langle T\rangle},$$

$k = 0, 1, 2$ w zależności od układu współrzędnych.

Średnią wartość temperatury $\langle T\rangle$ w przekroju kanału można uzyskać z bilansu globalnego kanału.

Przepływy jednowymiarowe

Przy wyprowadzeniu równań bilansowych korzysta się z ogólnych równań bilansowych, które uśrednia się po przekroju kanału (rys. 2), np. dla przypadku bilansu masy mamy:

$$\frac{d}{dt}\int_V \rho\, dV = \frac{d}{dt}\int_l dl \int_S \rho\, dS,$$

$$\int_S \rho\, dS = \langle\rho\rangle S. \tag{32}$$

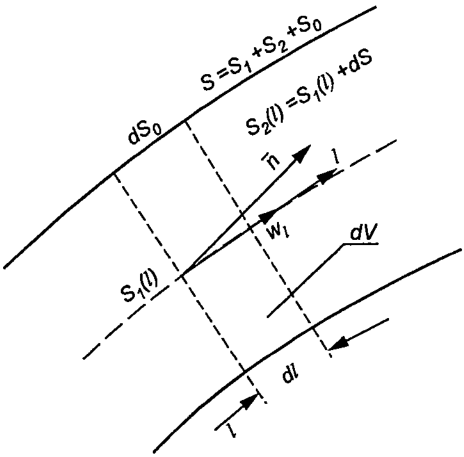
Różniczkując substancjalnie całkę po współrzędnej l otrzymuje się:

$$\frac{d}{dt}\int_l \langle\rho\rangle S\, dl = \int_l \left[\frac{\partial(\langle\rho\rangle S)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l}(\langle\rho\rangle S w)\right] dl = 0 \tag{33}$$

lub w postaci lokalnej:

$$\frac{\partial(\langle\rho\rangle S)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial l}(\langle\rho\rangle S w) = 0. \tag{34}$$

W analogiczny sposób uzyskuje się równania bilansu pędu i energii oraz nierówność entropijną Clausiusa-Duhema dla przepływu jednowymiarowego.



Rys. 2. Uśrednienie równań – równania jednowymiarowe

ZAKOŃCZENIE

Modelowanie zjawisk jest jedną z metod ich poznania. Jeżeli modelowanie zostało prawidłowo przeprowadzone, to rozwiązanie matematyczne dostarczy wszechstronnej wiedzy o badanym zjawisku lub procesie. Wiedza ta pozwoli na przewidywanie przebiegu i skutków zjawiska w różnych warunkach, kontrolowanych przez człowieka (technice), czy też niekontrolowanych (przyroda).

W przypadku zjawisk kontrolowanych przez człowieka, wiedza o zjawisku pozwala na optymalizację pożądanych dla człowieka skutków. Istotny jest cel prowadzenia badań, w zależności od niego w różny sposób przeprowadza się modelowanie. Może to być:

- dalszy rozwój nauki,
- chęć zastosowania wyników w praktyce inżynierskiej.

Wyniki, które mają być zastosowane w praktyce muszą być na ogół potwierdzone przez eksperyment. Poczynione w modelowaniu uproszczenia mogą prowadzić do wyników nie zadowalających praktyki. Zmusza to badacza do weryfikacji modelu.

W przypadku, gdy wyniki badań mają służyć poznaniu zjawiska – rozwojowi nauki, wówczas, podczas sekwencji badań wyciąga się wnioski, jakie dotychczas popełniono błędy podczas modelowania, jak należy formułować kolejny model zjawiska aby wyniki zbliżyć do rzeczywistości. Podczas takich badań powstaje zawsze pytanie, czy dotychczasowa wiedza o zjawisku jest wystarczająca do formułowania modelu zjawiska. Często sukces badacza uzależniony jest od badań innych badaczy. Prawidłowo uzyskane wyniki mogą mieć dużą uniwersalność i być może, będą przeniesione do innej dziedziny wiedzy posiadającej zjawiska mające ten sam model matematyczny. Takie wyniki badań mają największą wartość i są przedmiotem poszukiwań wytrawnych badaczy.

BIBLIOGRAFIA

[1] A. Auer: *Modelowanie analogowe procesów o stałych rozłożonych.* Małe Monografie PWN, Warszawa 1976.

[2] Z. Bilicki, J. Mikielewicz: *Minimum energii i minimum produkcji entropii w zastosowaniu do obliczeń stopnia zapełnienia w pęcherzykowym przepływie dwufazowym.* Archiwum Termodynamiki, vol. 5, No 2, 1984.

[3] Z. Bilicki: *Granice struktur przepływu dwufazowego.* Zeszyty Naukowe IMP PAN 211/1136/85.

[4] Z. Bilicki, J. Mikielewicz: *Potencjał ewolucyjny dla jednorodnego modelu przepływu dwufazowego.* Archiwum Termodynamiki, vol. 7, No 4, 1986.

[5] G.H.A. Cole: *Dynamika Płynów.* Małe Monografie PWN, Warszawa 1964.

[6] I. Gyarmati: *Non-equilibrium thermodynamics. Field Theory and Variational Priciples.* Springer-Verlag, Berlin 1970.

[7] K. Gumiński: *Termodynamika procesów nierównowagowych.* PWN, Warszawa 1983.

[8] J. Kestin: *A course in thermodynamics.* Hemisphere. Washington 1979.

[9] A.N. Lebiediew: *Modielirowanije w nauczno-tiechniczeskich issliedowanijach.* Radio i swiaz 1989.

[10] J. Malczewski, M. Piekarski: *Modele procesów transportu masy, pędu i energii.* PWN, Warszawa 1992.

[11] W.P. Masłow, W.G. Daniłowa, K.A. Wołosow: *Matiematiczeskoje modielirownije prociesow tiepło-masopierienosa.* Nauka, Moskwa 1987.

[12] J. Mikielewicz: *Zasady Termodynamiki.* Zeszyty Naukowe IMP PAN, 182/1098/84.

[13] J. Ostrowska-Maciejewska: *Podstawy mechaniki ośrodków ciągłych.* PWN, Warszawa 1982.

[14] R. Puzyrewski: *Podstawy teorii maszyn wirnikowych w ujęciu jednowymiarowym.* Maszyny Przepływowe t. 8, Ossolineum PAN 1992.

[15] W.J. Prosnak: *Wprowadzenie do numerycznej mechaniki płynów cz. 1. Równania mechaniki płynów i ich formy uproszczone.* Zeszyty Naukowe IMP PAN, Gdańsk 111/1037/81.

[16] T. Rychter, A. Teodorczyk: *Modelowanie matematyczne roboczego cyklu silnika tłokowego.* PWN, Warszawa, 1990.

[17] C. Rymarz: *Mechanika ośrodków ciągłych.* PWN, Warszawa 1993.

[18] J. Szargut: *Modelowanie numeryczne pól temperatury.* WNT, Warszawa 1992.

[19] R.S. Shehter: *The variational method in engineering.* McGraw Hill, New York 1967.

[20] E. Szucs: *Modelowanie matematyczne w fizyce i technice.* WNT, Warszawa 1977.

[21] S. Wiśniewski: *Termodynamika fenomenologiczna.* Skrypt Polit. Łódzka, Łódź 1983.

PRINCIPLES OF FORMULATION OF MATHEMATICAL MODELS FOR THERMAL AND FLOW PHENOMENA

S u m m a r y

In the paper principles of making balances of extensive physical quantities, constitutive equations and the closure problems for the models were presented. Variational formulations of the models based on the classical and non-equilibrium thermodynamics were given. Simplifications in the mathematical description of thermal and flow phenomena, which lead to theories of the boundary layer and the channel flow, were discussed.

ПРАВИЛА ФОРМУЛИРОВАНИЯ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ПРОТОЧНО-ТЕПЛОВЫХ ЯВЛЕНИЙ

К р а т к о е   с о д е р ж а н и е

В работе представлены основы составления балансов экстенсивных физических величин, правила образования конститутивных уравнений и заключений моделей. На основе класической термодинамики и необратимых процессов представлено вариационное формулирование моделей. Поданы способы упрощения математического описания и следующие отсюда теории: пограничного слоя и течения в канале.