BIULETYN INFORMACYJNY

INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ

POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

WARSZAWA **TEL. 21007 w. 1232 i 1248** **NOWOWIEJSKA 25**

Nr 18/K.T.M.C. 15 marzec 1969

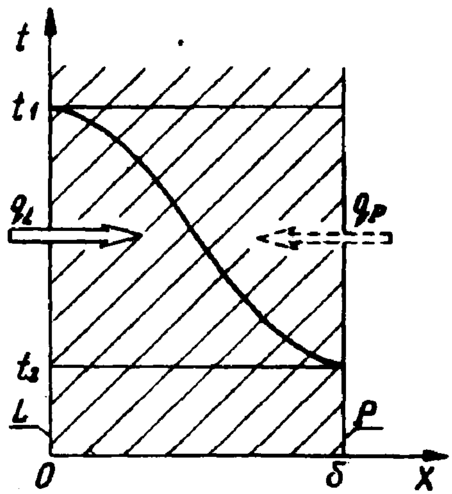
Dr inż. Wiesław Gogół
Katedra Teorii Maszyn Cieplnych
Politechniki Warszawskiej

PRZEWODZENIE CIEPŁA W CIAŁACH NIEJEDNORODNYCH O PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ ZMIENNEJ Z TEMPERATURĄ

1. Wstęp

Przedmiotem rozważań jest proces przewodzenia ciepła w stanie ustalonym w układzie jednowymiarowym (rys. 1).

Ciało przewodzące ciepło jest ciałem ciągłym, pozostającym w tej samej fazie (najlepiej stałej), nie podlegającym żadnym przemianom, pozbawionym wewnętrznych źródeł ciepła i izotropowym. Efekty krzyżowe w układzie nie występują. Ciało to może mieć przewodność cieplną λ, zależną od temperatury i może być niejednorodne; niejednorodność rozumiana jest jako odnosząca się do procesu przewodzenia ciepła w stanie ustalonym, tzn. możliwe jest dla dowolnych x_1 i x_2



Rys. 1

$$\lambda(x_1) \neq \lambda(x_2), \quad 0 < x < \delta. \tag{1}$$

Z tych względów można wyróżnić jednoznacznie dwie granice ciała (powierzchnie płyty nieograniczonej), a mianowicie powierzchnię L i powierzchnię P.

Płyta nieograniczona umieszczona jest w takim zewnętrznym polu termicznym, że na obu powierzchniach płyty ustalone są stałe temperatury.

Powierzchnia L może odpowiadać $x = 0$, a powierzchnia P $x = \delta$ i wtedy między ustalonymi temperaturami t_1 i t_2 przewodzony jest strumień q_L; albo też (po odwróceniu płyty w zewnętrznym polu termicznym) powierzchnia L odpowiada $x = \delta$, a powierzchnia P $x = 0$ i wtedy pomiędzy ustalonymi temperaturami t_1 i t_2 przewodzony jest strumień q_p. Zmiana strumieni może być również dokonana (bez obrotu płyty) przez zmianę kierunku zewnętrznego pola termicznego.

Przewodzenie ciepła w rozważanym układzie opisywane jest klasycznym prawem Fouriera

$$q = - \lambda(x,t) \frac{dt}{dx} , \tag{2}$$

przy czym istotna przewodność cieplna

$$\lambda = \left| \frac{\partial q \text{ (grad } t)}{\partial \text{ grad } t} \right|_{\text{grad } t = 0} . \tag{3}$$

Jeżeli przewodność cieplna jest funkcją temperatury $\lambda = \lambda(t)$, to można w układzie jednowymiarowym w stanie ustalonym posługiwać się pojęciem średniej (efektywnej) przewodności cieplnej:

$$q = \frac{\bar{\lambda}}{\delta} (t_1 - t_2) \quad ; \qquad \bar{\lambda} = \frac{\int_{t_1}^{t_2} \lambda(t)dt}{t_2 - t_1} . \tag{4}$$

Postać funkcji $\lambda(t)$ dla różnych ciał może być różna i ilość postaci tej funkcji jest teoretycznie nieograniczona.

Rozważany ośrodek jest ośrodkiem statystycznie niejednorodnym $\lambda = \lambda(x)$ (niejednorodność makroskopowa); przy czym na ogół $\lambda(x = 0) \neq \lambda(x = \delta)$ i funkcja $\lambda(x)$ nie jest symetryczna względem płaszczyzny $x = \frac{\delta}{2}$, w związku z czym można wyróżnić stronę L i stronę P (rys. 2).

Dla ośrodka niejednorodnego można również posługiwać się efektywną przewodnością:

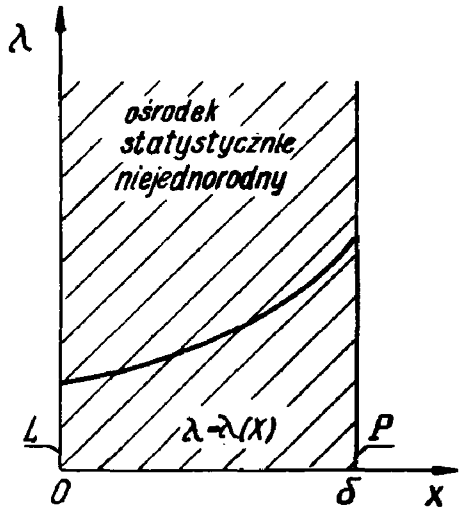
$$q = \frac{\bar{\lambda}}{\delta}(t_1 - t_2); \qquad \bar{\lambda} = \frac{1}{\frac{1}{\delta}\int_0^{\delta}\frac{dx}{\lambda(x)}}. \tag{5}$$

Ilość postaci funkcji $\lambda(x)$ jest teoretycznie nieograniczona.

W układzie przedstawionym na rys. 1 przewodność cieplna może ogólnie zależeć i od współrzędnej przestrzennej i od temperatury

$$\lambda = \lambda(x,t).$$

Ze względu na bardzo dużą ilość możliwości postaci funkcji $\lambda(x)$ i $\lambda(t)$, zagadnienie należy uprościć. W niniejszych rozważaniach będą brane pod uwagę tylko liniowe funkcje $\lambda(x)$ i $\lambda(t)$.



Rys. 2

Linearyzacja uzasadniona jest przez:

- znaczne uproszczenie opisu matematycznego procesu przewodzenia ciepła, umożliwiające jasne przedstawienie istoty rozważanego tu efektu;
- możliwość przyjęcia dla wielu ciał w dość szerokim zakresie temperatur ze względnie małym błędem zależności liniowych;
- możliwość sprowadzenia układu rzeczywistego o zależnościach nieliniowych do rozważanego tutaj modelu o zależnościach liniowych, jako pierwszego przybliżenia otrzymywanego przez zawężenie granic temperatur i długości.

Przewodność cieplna może zmieniać się w rozważanym układzie również w sposób skokowy (ciała wieloskładnikowe).

W dalszym ciągu omówiony zostanie kolejno proces przewodzenia ciepła w ciałach ciągłych i najprostszy przypadek układu ciał wieloskładnikowych, a mianowicie ciała dwuskładnikowe.

2. Przewodzenie ciepła w ciałach ciągłych

Przy założeniu liniowości funkcji $\lambda(x)$ i $\lambda(t)$ pozostaje jeszcze pewna ilość możliwości wynikająca z kombinacji tych funkcji.

Rozważana tutaj będzie postać funkcji $\lambda(x,t)$, która wydawała się najbardziej logiczna i pozwalająca w najbardziej prosty sposób przechodzić w granicy do ciał tylko niejednorodnych albo jednorodnych lub ciał o przewodności zależnej od temperatury albo $\lambda = \text{const}$.

Rozważana jest funkcja

$$\lambda(x,t) = \lambda_L (1+ax) \left[1 + b_L (1 + \beta x)t\right], \tag{6}$$

przy czym λ_L i b_L odnoszą się do granicy L ośrodka.

Przypadki szczególne tej ogólnej zależności są:

A. $a = 0$, $b_L = 0$, $\beta = 0$,
$\beta \neq 0$;

$$\lambda(x,t) = \lambda_L = \text{const}. \tag{7}$$

B. $a = 0$, $b_L \neq 0$, $\beta = 0$;

$$\lambda(x,t) = \lambda_L (1 + b_L t) = \lambda(t). \tag{8}$$

C. $a \neq 0$, $b_L = 0$, $\beta = 0$,
$\beta \neq 0$;

$$\lambda(x,t) = \lambda_L (1 + ax) = \lambda(x). \tag{9}$$

D. $a \neq 0$, $b_L \neq 0$, $\beta = 0$;

$$\lambda(x,t) = \lambda_L (1 + ax)(1 + b_L t). \tag{10}$$

E. $a = 0$, $b_L \neq 0$, $\beta \neq 0$;

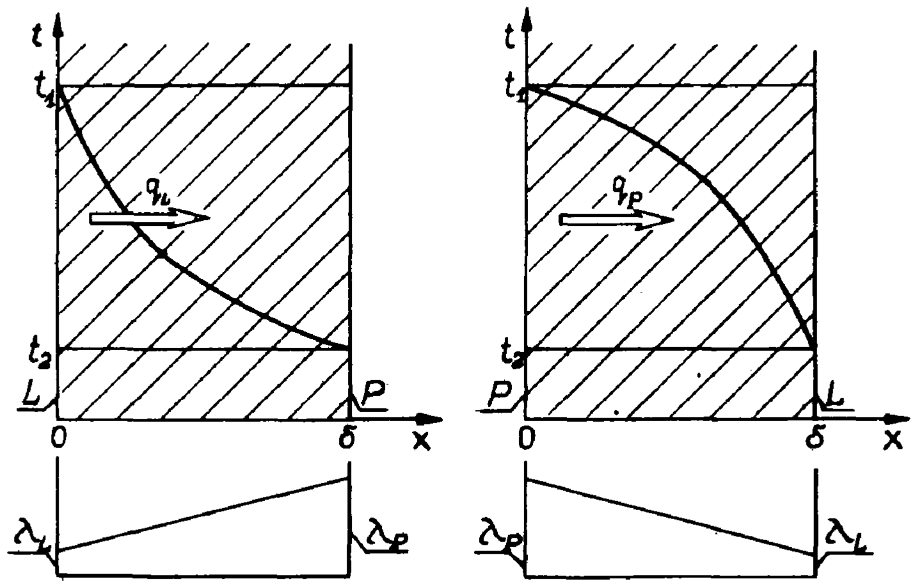
$$\lambda(x,t) = \lambda_L \left[1 + b_L (1 + \beta x) t\right]. \tag{11}$$

Przypadki A i B przedstawiające przewodzenie ciepła w ośrodkach jednorodnych o stałej przewodności cieplnej lub o $\lambda = \lambda(t)$, jako dobrze znane, nie będą dalej szczegółowo omawiane.

Porównywane będą w zasadzie tylko bezwzględne wartości strumieni ciepła.

2.1. Ośrodek niejednorodny o własnościach niezależnych od temperatury

(9a) $$\lambda = \lambda_L\ (1 + ax)$$



Rys. 3

Strumień cieplny skierowany od strony L do P oznaczono przez q_L, a skierowany od strony P do L przez q_p.

A. Strumień cieplny q_L

Rozwiązywane jest równanie przewodzenia ciepła

$$\frac{d}{dx}\left[\lambda_L\ (1 + ax)\ \frac{dt}{dx}\right] = 0, \qquad (12$$

przy warunkach brzegowych

$$x = 0 , \qquad t = t_1 ;$$
$$x = \delta , \qquad t = t_2 . \tag{13}$$

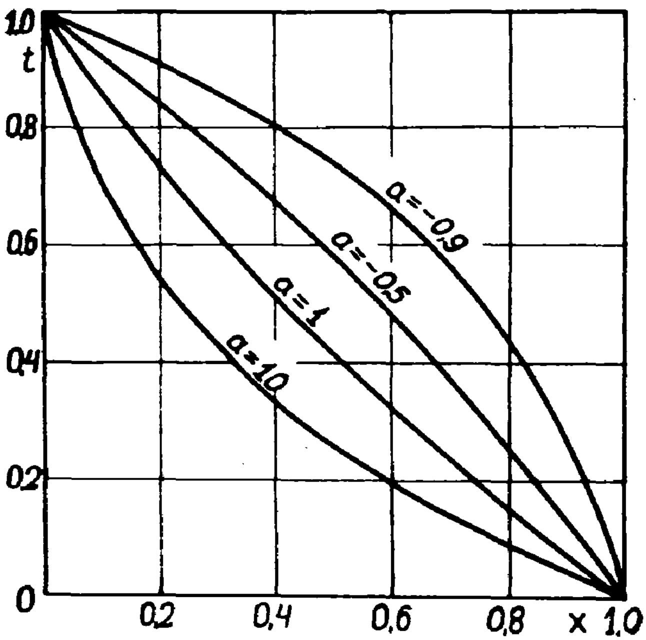
Pole temperatury

$$\frac{t_1 - t}{t_1 - t_2} = \frac{\ln (1 + ax)}{\ln (1 + a\delta)} . \tag{14}$$

Strumień cieplny

$$q_L = \lambda_L \frac{a}{\ln (1 + a\delta)} (t_1 - t_2) . \tag{15}$$

Przy przejściu od ośrodka niejednorodnego do jednorodnego otrzymuje się - zakładając $a \to 0$ i stosując regułę de l'Hospitala - zamiast równań (14) i (15) znane zależności określające t i q w ośrodku jednorodnym.



Rys. 4. Pole temperatury w ośrodku niejednorodnym o przewodności cieplnej niezależnej od temperatury
$\lambda = \lambda_L (1 + ax)$; $t_1 = 1$, $t_2 = 0$, $\delta = 1$

B. Strumień cieplny q_p

Równanie przewodzenia ciepła

$$\frac{d}{dx}\left[\lambda_L\,(1 + a\delta)\left(1 - \frac{a}{1 + a\delta}\,x\right)\frac{dt}{dx}\right] = 0, \qquad (16)$$

przy warunkach brzegowych

$$\begin{aligned} x &= 0, \quad t = t_1; \\ x &= \delta, \quad t = t_2. \end{aligned} \qquad (17)$$

Pole temperatury

$$\frac{t_1 - t}{t_1 - t_2} = \frac{\ln\left(1 - \frac{a}{1 + a\delta}\,x\right)}{\ln\left(1 - \frac{a}{1 + a\delta}\,\delta\right)}. \qquad (18)$$

Strumień cieplny

$$q_p = \lambda_L\,\frac{a}{\ln(1 + a\delta)}\,(t_1 - t_2). \qquad (19)$$

Zatem dla takiego ośrodka niejednorodnego

$$\left|\frac{q_L}{q_p}\right| = 1\,. \qquad (20)$$

2.2. Ośrodek jednorodny o przewodności cieplnej zmiennej liniowo z temperaturą

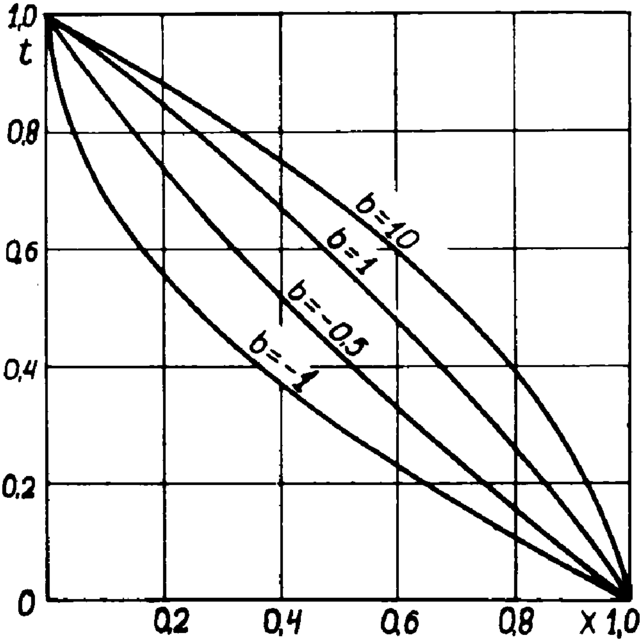
Równania odnoszące się do takiego ośrodka są dobrze znane i nie będą tutaj wyprowadzane; można je otrzymać również jako przypadek graniczny z równań (28) i (29), przy założeniu $a \to 0$

$$\lambda = \lambda_L\,(1 + bt)\,. \qquad (21)$$

Przewodność cieplna λ_L jest taka sama w całym obszarze ośrodka i odnosi się do $t = 0$ (najniższa temperatura zakresu linearyzacji).

Pole temperatury

$$\frac{(t_1 - t)\left[1 + \frac{b}{2}(t_1 + t)\right]}{(t_1 - t_2)\left[1 + \frac{b}{2}(t_1 + t_2)\right]} = \frac{x}{\delta} \cdot \tag{22}$$



Rys. 5. Pole temperatury w ośrodku jednorodnym o przewodności cieplnej zmiennej liniowo z temperaturą

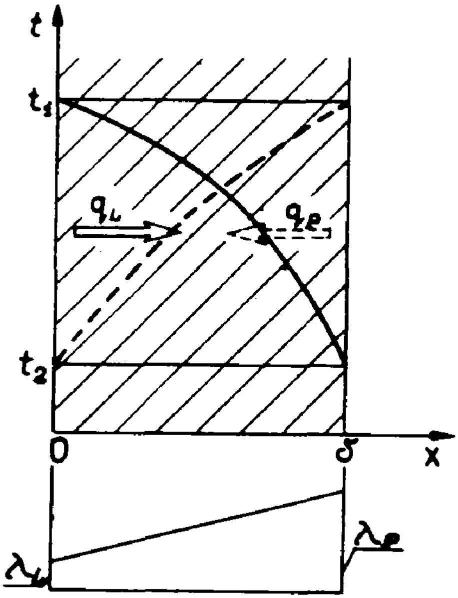
$\lambda = \lambda_L\ (1 + bt);\quad t_1 = 1,\quad t_2 = 0,\quad \delta = 1$

Strumień cieplny

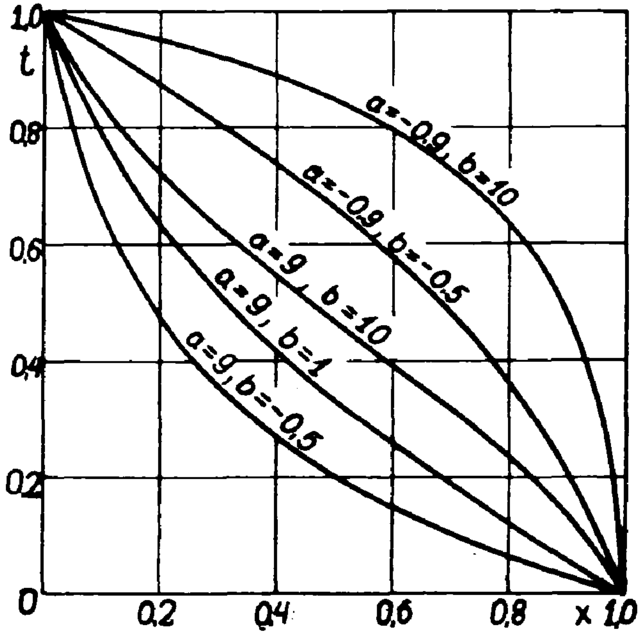
$$q_L = \lambda_L \left[1 + \frac{b}{2}\ (t_1 + t_2)\right]\ (t_1 - t_2), \tag{23}$$

przy czym

$$\left|\frac{q_L}{q_P}\right| = 1 . \tag{24}$$



Rys. 6



Rys. 7. Pole temperatury w ośrodku niejednorodnym o przewodności cieplnej zmiennej z temperaturą (współczynnik temperaturowy b_L = b = const); $t_1 = 1$, $t_2 = 0$, $\delta = 1$

2.3. Ośrodek niejednorodny o przewodności cieplnej ze stałym współczynnikiem temperaturowym

$$\lambda(x,t) = \lambda_L\ (1 + ax)\ (1 + bt)\ , \tag{25}$$

$$b_L = b = \text{const.}$$

A. Strumień cieplny q_L

Równanie przewodzenia ciepła

$$q_L = -\lambda_L\ (1 + ax)\ (1 + bt)\ \frac{dt}{dx}\ , \tag{26}$$

przy warunkach brzegowych

$$\begin{aligned} x &= 0\ , \quad t = t_1\ ; \\ x &= \delta\ , \quad t = t_2\ . \end{aligned} \tag{27}$$

Pole temperatury

$$\frac{(t_1 - t)\left[1 + \frac{b}{2}(t_1 + t)\right]}{(t_1 - t_2)\left[1 + \frac{b}{2}(t_1 + t_2)\right]} = \frac{\ln(1 + ax)}{\ln(1 + a\delta)}\ . \tag{28}$$

Strumień cieplny

$$q_L = \lambda_L\left[1 + \frac{b}{2}(t_1 + t_2)\right]\frac{a}{\ln(1 + a\delta)}(t_1 - t_2). \tag{29}$$

B. Strumień cieplny q_p

Rozwiązywane jest równanie przewodzenia ciepła (26) przy warunkach brzegowych

$$\begin{aligned} x &= 0\ , \quad t = t_2\ ; \\ x &= \delta\ , \quad t = t_1\ . \end{aligned} \tag{30}$$

Pole temperatury

$$\frac{(t - t_2)\left[1 + \frac{b}{2}(t + t_2)\right]}{(t_1 - t_2)\left[1 + \frac{b}{2}(t_1 + t_2)\right]} = \frac{\ln(1 + ax)}{\ln(1 + a\delta)}\ . \tag{31}$$

Strumień cieplny

$$q_P = -\lambda_L \left[1 + \frac{b}{2}(t_1 + t_2)\right] \frac{a}{\ln(1 + a\delta)} (t_1 - t_2) \ . \qquad (32)$$

W ośrodku niejednorodnym, o stałym współczynniku temperaturowym, nie występuje zatem efekt asymetrii strumieni w procesie przewodzenia ciepła

$$\left|\frac{q_L}{q_P}\right| = 1 \ . \qquad (33)$$

2.4. Ośrodek ciągły wykazujący efekt asymetrii strumieni cieplnych

Rozważany jest ośrodek niejednorodny o zmiennym współczynniku temperaturowym b

$$\lambda(x,t) = \lambda_L \left[1 + b_L (1 + \beta x) \ t\right] \ . \qquad (34)$$

A. Strumień cieplny g_L

Równanie przewodzenia ciepła

$$\frac{d}{dx}\left[\lambda(x,t)\frac{dt}{dx}\right] = 0 \ , \qquad (35)$$

$$-\lambda_L \left[1 + b_L (1 + \beta x)t\right]\frac{dt}{dx} = q_L \ , \qquad (36)$$

przy warunkach brzegowych

$$x = 0 \ , \quad t = t_1 \ ;$$
$$x = \delta \ , \quad t = t_2 \ . \qquad (37)$$

Równanie rozwiązano względem funkcji odwrotnej x(t) przez wprowadzenie nowej zmiennej.

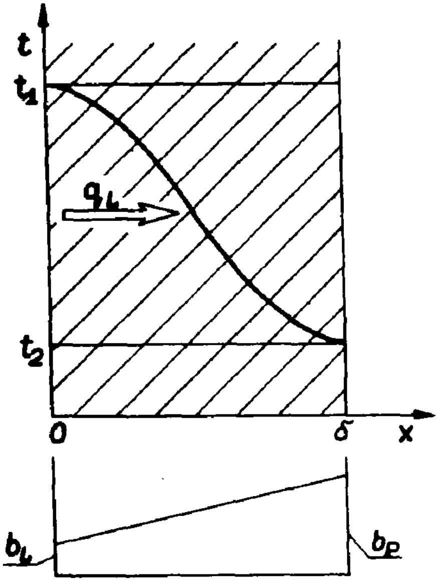
Pole temperatury

$$1 + \beta x = e^{\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_L}(t_1^2 - t^2)}\left[1 - \frac{\lambda_L \beta}{q_L} \quad e^{-\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_L} t_1^2}\int_{t_1}^{t} e^{\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_L} t^2} dt\right] . \qquad (38)$$

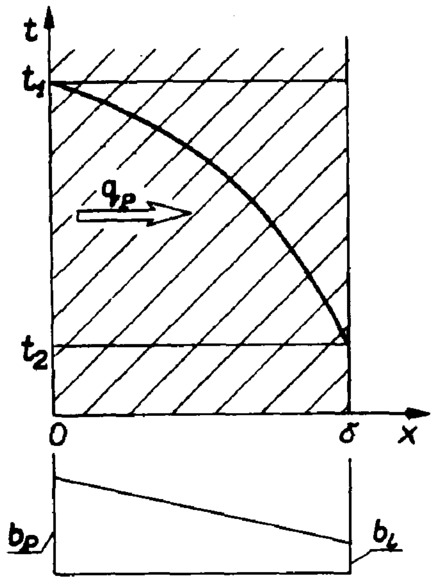
Strumień cieplny

$$1 + \beta\delta = e^{\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_L}(t_1^2 - t_2^2)}\left[1 - \frac{\lambda_L \beta}{q_L} \quad e^{-\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_L} t_1^2}\int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_L} t^2} dt\right] . \qquad (39)$$

Wartość strumienia q_L występuje tu w postaci uwikłanej.



Rys. 8



Rys. 9

B. Strumień cieplny q_P

Przewodność cieplna opisywana jest w tym układzie następująco

$$\lambda(x,t) = \lambda_L \left[1 + b_L\, (1 + \beta\delta)\, \left(1 - \frac{\beta}{1+\delta\beta}\, x\right) t\right] . \qquad (40)$$

Równanie przewodzenia ciepła

$$-\lambda_L \left[1 + b_L\, (1 + \beta\delta)\, \left(1 - \frac{\beta}{1+\beta\delta}\, x\right) t\right] \frac{dt}{dx} = q_P \,, \qquad (41)$$

przy warunkach brzegowych

$$x = 0 \,, \quad t = t_1 \,; \qquad x = \delta \,, \quad t = t_2 \,. \qquad (42)$$

Pole temperatury

$$1 - \frac{\beta}{1+\beta\delta}\, x = e^{-\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_p}(t_1^2 - t^2)} \left[1 + \frac{\lambda_L}{q_P}\, \frac{\beta}{1+\beta\delta}\, e^{\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_p} t_1^2} \int_{t_1}^{t} e^{-\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_p} t^2}\, dt\right] . \qquad (43)$$

Strumień cieplny

$$\frac{1}{1+\beta\delta} = e^{-\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_p}(t_1^2 - t_2^2)} \left[1 + \frac{\lambda_L}{q_P}\, \frac{\beta}{1+\beta\delta}\, e^{\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_p} t_1^2} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{\lambda_L b_L \beta}{2q_p} t^2}\, dt\right] . \qquad (44)$$

Wzory (39) i (44) podają wartości strumieni q_L i q_P w postaci dość trudnej do ich bezpośredniego porównania (np. występują tu całki $\int e^{t^2} dt$). Poniżej wykazano, że strumienie te nie są równe.

Oznaczając

$$m = \frac{\lambda_L b_L \beta}{2} \tag{45}$$

z równań (39) i (44) można otrzymać zależność wiążącą strumienie q_L i q_P

$$e^{\frac{m}{q_P}(t_1^2 - t_2^2)} - e^{\frac{m}{q_L}(t_1^2 - t_2^2)} =$$

$$= - \frac{\lambda_L \beta}{q_L} e^{-\frac{m}{q_L} t_2^2} \int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{m}{q_L} t^2} dt + \frac{\lambda_L \beta}{q_P} e^{\frac{m}{q_P} t_1^2} \int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{m}{q_P} t^2} dt . \tag{46}$$

Jeśli strumienie byłyby równe

$$q_L = q_P = q ,$$

to musiałaby być spełniona zależność

$$\frac{\int_{t_1}^{t_2} e^{\frac{m}{q} t^2} dt}{\int_{t_1}^{t_2} e^{-\frac{m}{q} t^2} dt} = e^{\frac{m}{q}(t_1^2 + t_2^2)} \tag{47}$$

W przypadku temperatur zredukowanych $t_1 = 0$ i $t_2 = 1$ (lub $t_1 = 1$ i $t_2 = 0$) równanie (47) przyjmuje postać

$$\frac{\int_0^1 e^{\frac{m}{q} t^2} dt}{\int_0^1 e^{-\frac{m}{q} t^2} dt} = \exp\left(\frac{m}{q}\right) , \tag{48}$$

co jest możliwe tylko (jeśli $q \neq \infty$) przy warunku

$$m = 0 . \tag{49}$$

Ze względu na sens fizykalny przewodności cieplnej λ_L nie może być równe 0, natomiast dla $b_L = 0$ dowiedziono już, że strumienie q_L i q_P są jednakowe.

Zatem jeśli

$$\beta \neq 0 \,, \tag{50}$$

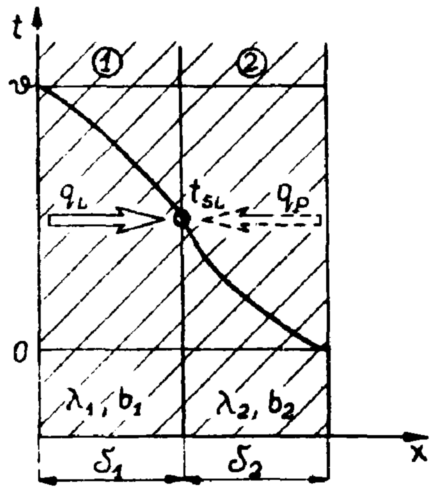
to

$$\left| \frac{q_L}{q_P} \right| \neq 1 \,, \tag{51}$$

Niejednorodność ośrodka polegająca na zmianie w przestrzeni współczynnika temperaturowego b występującego w zależności λ od t wywołuje efekt asymetrii strumieni cieplnych.

3. Przewodzenie ciepła w ciałach dwuskładnikowych

Przedmiotem rozważań jest proces przewodzenia ciepła w stanie ustalonym w układzie jednowymiarowym dwuskładnikowym.



Rys. 10

Przewodności cieplne obu ciał zależą od temperatury. Kontaktowy opór termiczny między ciałami ciągłymi jednorodnymi 1 i 2 nie istnieje. Różnica temperatur między zewnętrznymi powierzchniami układu dwuskładnikowego wynosi zawsze ϑ. Strumień cieplny skierowany od ciała 1 do ciała 2 oznaczono przez q_L, a strumień skierowany od ciała 2 do ciała 1 przez q_P. Podobnie temperaturę styku t_s oznaczono odpowiednio przez t_{SL} i t_{SP}. Wartość przewodności cieplnej przy $t = 0$ (najniższa temperatura zakresu linearyzacji) oznaczono przez λ_0. Przewodności średnie (efektywne) w pewnym przedziale temperatur oznaczono, zgodnie z równaniem (4), przez λ. W rozpatrywanym układzie powinna, zgodnie z poprzednimi rozważaniami, wystąpić asymetria strumieni cieplnych:

$$\lambda_1 = \lambda_{01} \, (1 + b_1 \, t) \,, \tag{52}$$

$$\lambda_2 = \lambda_{02} \, (1 + b_2 \, t) \,. \tag{53}$$

Strumień cieplny q_L

$$q_L = \frac{\bar{\lambda}_{1L}}{\delta_1} (\vartheta - t_{SL}) = \frac{\bar{\lambda}_{2L}}{\delta_2} t_{SL} . \tag{54}$$

Strumień cieplny q_P

$$q_P = \frac{\bar{\lambda}_{2P}}{\delta_2} (\vartheta - t_{SP}) = \frac{\bar{\lambda}_{1P}}{\delta_1} t_{SP} . \tag{55}$$

Średnie wartości $\bar{\lambda}$ będą:

$$\bar{\lambda}_{1L} = \lambda_{01} \left[1 + \frac{b_1}{2} (\vartheta + t_{SL})\right] , \tag{56}$$

$$\bar{\lambda}_{2L} = \lambda_{02} (1 + \frac{b_2}{2} t_{SL}) , \tag{57}$$

$$\bar{\lambda}_{2P} = \lambda_{02} \left[1 + \frac{b_2}{2} (\vartheta + t_{SP})\right] , \tag{58}$$

$$\bar{\lambda}_{1P} = \lambda_{01} (1 + \frac{b_1}{2} t_{SP}) . \tag{59}$$

Wprowadzono oznaczenie

$$K = \frac{\delta_1}{\delta_2} \frac{\lambda_{02}}{\lambda_{01}} , \tag{60}$$

przy czym K może zmieniać się w granicach od 0 do ∞.

Z powyższych równań można otrzymać równania na temperatury styku:

$$t_{SL} = \frac{- (K + 1) + \sqrt{(K + 1)^2 + 2 (b_1 + Kb_2) (\vartheta + \frac{b_1}{2}\vartheta^2)}}{b_1 + Kb_2} , \tag{61}$$

$$t_{SP} = \frac{- (K + 1) + \sqrt{(K + 1)^2 + 2(b_1 + Kb_2) (\vartheta + \frac{b_2}{2}\vartheta^2)K}}{b_1 + Kb_2} \tag{62}$$

oraz stosunek strumieni cieplnych

$$\frac{q_L}{q_P} = K\frac{t_{SL}}{t_{SP}} \frac{1 + \frac{b_2}{2} t_{SL}}{1 + \frac{b_1}{2} t_{SP}} . \tag{63}$$

Z równań (61), (62) i (63) otrzymano zależność wiążącą strumienie q_L i q_P

$$\frac{q_L}{q_P} = \frac{-(K+1)+b_2 \frac{b_1+Kb_2}{b_1-b_2} (\vartheta+\frac{b_1}{2}\vartheta^2)+\sqrt{(K+1)^2+2(b_1+Kb_2)(\vartheta+\frac{b_1}{2}\vartheta^2)}}{(K+1)+b_1 \frac{b_1+Kb_2}{b_1-b_2} (\vartheta+\frac{b_2}{2}\vartheta^2)-\sqrt{(K+1)^2+2(b_1+Kb_2)(\vartheta+\frac{b_2}{2}\vartheta^2)K}} . \tag{64}$$

Równanie powyższe jest najbardziej prostą formą związku między q_L i q_P (przy rozważaniu przewodzenia ciepła w przedziale $t_1 - t_2$ zapis komplikuje się).

Z powyższych równań wynika, że jeśli

$$b_1 \neq b_2 , \tag{65}$$

to

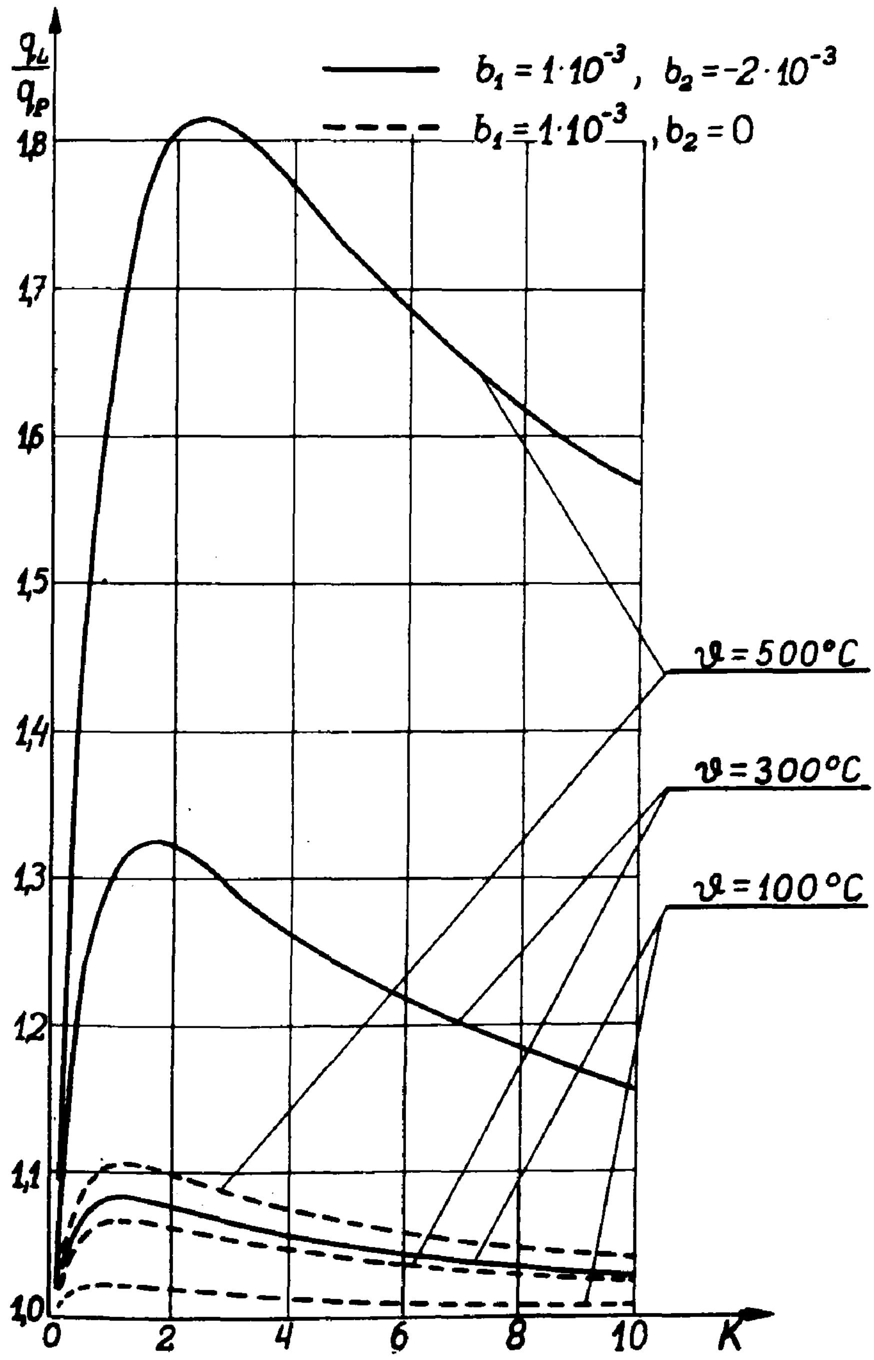
$$\left|\frac{q_L}{q_P}\right| \neq 1 , \tag{66}$$

oraz

$$t_{SL} \neq t_{SP} . \tag{67}$$

Zatem układ złożony z dwu płyt nieograniczonych o przewodnościach posiadających różny współczynnik temperaturowy będzie przewodził ciepło w różny sposób, zależnie od kierunku strumienia cieplnego.

Na rys. 11 pokazano wartości $\frac{q_L}{q_P}$ w zależności od K, ϑ, b_1 i b_2.



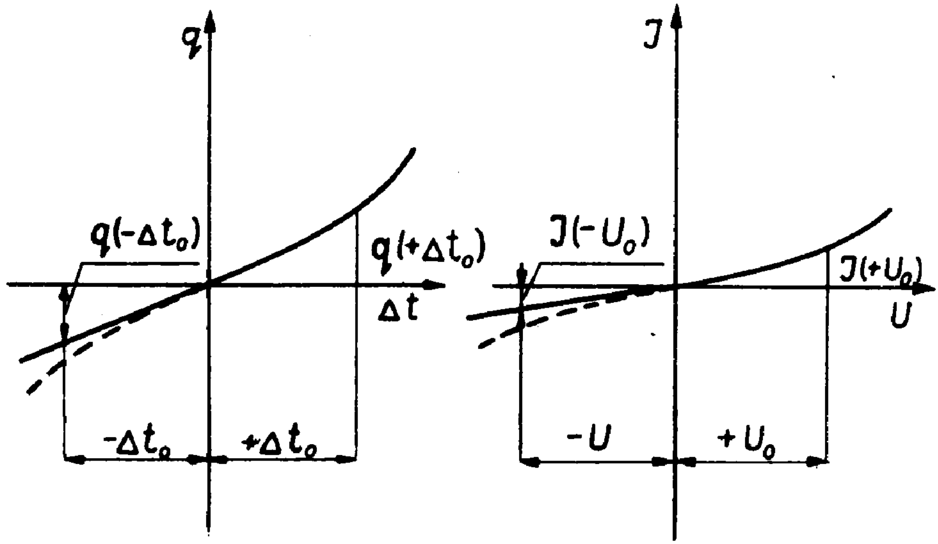
$\frac{q_L}{q_p}$
$b_1 = 1 \cdot 10^{-3}$, $b_2 = -2 \cdot 10^{-3}$
$b_1 = 1 \cdot 10^{-3}$, $b_2 = 0$
1,8
1,7
1,6
1,5
1,4
1,3
1,2
1,1
1,0
0
2
4
6
8
10
K
$\vartheta = 500°C$
$\vartheta = 300°C$
$\vartheta = 100°C$

Rys. 11

4. Wnioski

W powyższych rozważaniach wykazano, że w procesie przewodzenia ciepła w ciałach niejednorodnych o przewodności cieplnej zmiennej z temperaturą może występować asymetria strumieni cieplnych. Efekt ten występuje wtedy, gdy przewodność cieplna zmienia się w inny sposób w każdym punkcie ciała z temperaturą.

Układ taki zachowuje się jak "prostownik strumienia ciepła" (analogicznie do prostownika prądu). Efekt prostowania strumienia ciepła jest na ogół o wiele słabszy od efektu prostowania prądu.



Rys. 12. Analogia między ciałem asymetrycznotropowym i prostownikiem prądu

Efektywna przewodność cieplna jest różna w zależności od kierunku przewodzenia ciepła

$$\frac{q_L}{q_P} = \frac{(\lambda_{ef})_L}{(\lambda_{ef})_P} \neq 1 \, . \tag{52}$$

Dla takiego ciała lub układu ciał proponowana jest nazwa ciała asymetryczno-tropowego lub ciała posiadającego przewodność asymetrycznotropową.

Wszystkie ciała rzeczywiste (stałe) są w pewnym stopniu niejednorodne i mają przewodność cieplną zmienną z temperaturą; są zatem w mniejszym lub większym stopniu ciałami asymetrycznotropowymi. Jednakże efekt asymetrii strumieni jest na ogół bardzo słaby i tylko w szczególnych przypadkach może posiadać praktyczne znaczenie. Natomiast istotny wydaje się aspekt poznawczy wynikający z istnienia opisywanego efektu.

W zakończeniu należy podkreślić, że otrzymane rozwiązanie i wyniki mają znaczenie nie tylko w zagadnieniach przewodzenia ciepła ale i w tych działach fizyki, w których obowiązują prawa analogiczne do prawa Fouriera (np. dyfuzja).

Р е з ю м е

Теплопроводность неоднородных тел которых коэффициент теплопроводности зависит от температуры

Рассматривается стационарная теплопроводность плоской неограниченной стенки которой коэффициент теплопроводности зависит от температуры.

Доказано теоретически существования асиммери (в противоположных направлениях) тепловых потоков и эффективных коэффициентов теплопроводности.

S u m m a r y

Heat conduction in non-homogeneous media considering variation of thermal conductivity with temperature

Heat conduction in steady state through an infinitely wide non-homogeneous plane plate (one-dimensional) considering variation of thermal conductivity with temperature is discussed.

An effect of asymmetry of the rate of heat flow and asymmetry of the effective thermal conductivity in two opposite directions is theoretically obtained.

Wyk. ZGPW, z.314, n.100+25