

Krzysztof Badyda

Instytut Techniki Ciepłej

SKORYGOWANY WZÓR SUTHERLANDA DO OBLICZEŃ PRZEWODNOŚCI CIEPLNEJ GAZÓW

W artykule przedstawiono wzory do obliczeń przewodności cieplnej dla gazów o umiarkowanych ciśnieniach oparte na zmodyfikowanej formule Sutherlanda. Zaproponowano zmiany postaci i wartości współczynników opartych na tej formule. Wyniki obliczeń i ich porównanie z wartościami tablicowymi podano na rysunkach.

WSTĘP

Współczynnik przewodności cieplnej dla gazów λ jest parametrem szeroko używanym w obliczeniach technicznych związanych z procesami przewodzenia, ale również naturalnej i wymuszonej konwekcyjnej wymiany ciepła. Znajomość tej wielkości ma duże znaczenie w obliczeniach cieplnych urządzeń energetycznych, na przykład kotłów wodnych i parowych. W prowadzonych rachunkach istotne jest odwzorowanie zmienności poszukiwanej wielkości – zależności od parametrów stanu gazu. Charakterystyczną cechą obliczeń jest tu szeroki zakres zmian temperatur i raczej niewielki (w odniesieniu do powietrza i spalin) zakres zmian ciśnień czynników gazowych. Dane tablicowe dla poszczególnych gazów [2], [4], [5], [6] zawierają luki i niespójności w zakresie wyższych (powyżej 1000 K) temperatur. Rachunki prowadzone są z reguły wielowariantowo, najczęściej przy użyciu komputera.

W obliczeniach wspomaganym komputerem stosowane są dwa typowe sposoby opisu zmienności parametrów gazów. Można korzystać ze stabilizowanych wartości danej wielkości lub ze wzorów opisujących zmiany tych wartości. Wzory mogą być oparte na rozważaniach teoretycznych lub (oraz) na aproksymacji wartości stabilizowanych funkcjami o wybranej postaci.

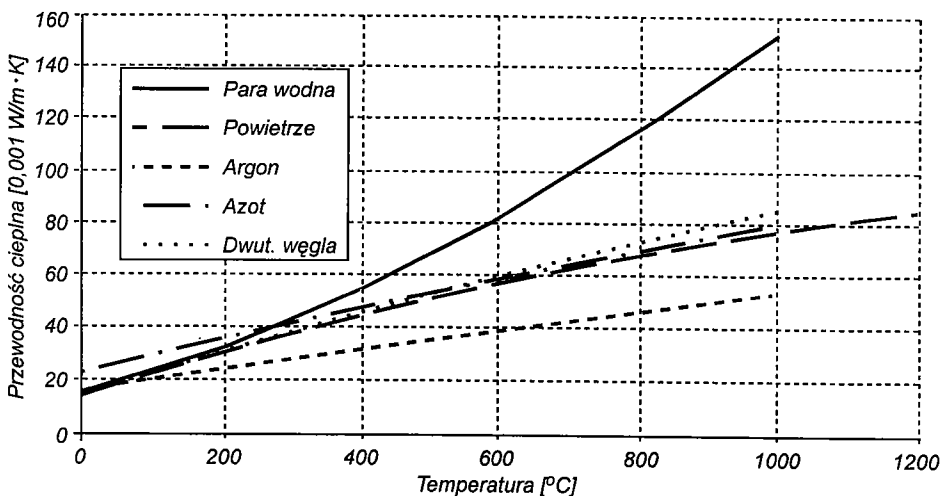
W artykule przedstawiono, jako jedną z możliwości, próbę wykorzystania do obliczania (w funkcji temperatury) przewodności cieplnej gazów i ich

mieszanin odpowiednio zmodyfikowanego w postępowaniu aproksymacyjnym wzoru Sutherlanda cechującego się prostą budową i możliwością zastosowania dla dowolnego gazu.

1. PODSTAWY OBLICZEŃ

Współczynnik λ może być traktowany w obliczeniach prowadzonych dla wspomnianych wyżej celów jako funkcja jednego parametru gazu – jego temperatury – w zakresie umiarkowanych (od bliskich atmosferycznemu do około 2 MPa) ciśnień. Zależność przewodności cieplnej gazów od ciśnienia jest w tym jego przedziale niewielka, dla większości gazów będących typowymi składnikami powietrza oraz spalin kotłowych współczynnik λ waha się od mniej więcej 3% w temperaturach bliskich otoczeniu do poniżej 1% w temperaturach podwyższonych (od około 500°C wzwyż).

Związek rozpatrywanego współczynnika z temperaturą można uznać za silny – w przedziale 0 ÷ 1000°C przewodność cieplna typowych składników powietrza oraz spalin rośnie od 2,5 (Argon) do kilkunastu razy (woda) [1, 3, 5], ilustrację tych zmian stanowi rys. 1. Z przybliżonej stałości stosunku współczynnika λ do



Rys. 1. Współczynnik przewodzenia ciepła w funkcji temperatury dla niektórych gazów

współczynnika lepkości dynamicznej μ wynika możliwość uwzględnienia zależności przewodności od temperatury według wzoru Sutherlanda:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{273 + C_s}{T + C_s} \left(\frac{T}{273} \right)^{1,5}, \quad (1)$$

uznawanego za „niezbyt dokładny” w odniesieniu do przewodności cieplnej [2], a odwzorowującego stosunkowo dokładnie związek lepkości dynamicznej gazów z temperaturą w zakresie ciśnień do około 2 MPa

$$\mu = \mu_0 \frac{273 + C_s}{T + C_s} \left(\frac{T}{273} \right)^{1,5}, \quad (2)$$

C_s oznacza tu stałą Sutherlanda, charakterystyczną dla danego gazu wielkość proporcjonalną do potencjału E_p wzajemnego przyciągania się cząsteczek:

$$C_s = \frac{2}{3} \frac{E_p}{k}, \quad (3)$$

gdzie: k – stała Boltzmann, a

λ_0, μ_0 – są zaś odpowiednio wartościami przewodności cieplnej, bądź lepkości dynamicznej w temperaturze 0°C (273 K). Przy niskich temperaturach C_s staje się funkcją temperatury gazu.

W dalszej części pracy przedstawiona została próba opisu zależności współczynnika λ od temperatury dla gazów będących typowymi składnikami powietrza oraz spalin kotłowych za pomocą zależności opartych budową na wzorze (1).

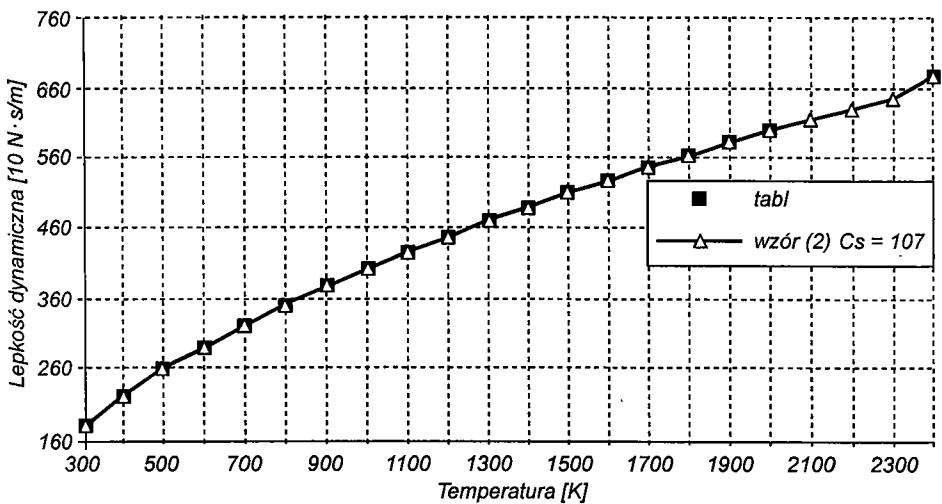
2. OBLICZENIA

Wartości stałej Sutherlanda oraz λ_0 i μ_0 dla niektórych gazów zestawione zostały w tabl. 1. Na rys. 2 przedstawiono dane tablicowe [5] na tle wyników obliczeń ze wzoru Sutherlanda dla lepkości dynamicznej na przykładzie azotu potwierdzające dokładność odwzorowania tej wielkości przez wzór (2).

Tablica 1

Wartości współczynników przewodności cieplnej w temperaturze 273 K oraz stałej Sutherlanda dla wybranych gazów

Gaz	Powietrze	Azot	Tlen	Dwutl. węgla	Tlenek węgla	Para wodna	Argon
$\lambda_0 \cdot 10^3$ [W/m · K]	24,4	24,3	24,7	14,7	23,26	16,2	16,3
$\mu_0 \cdot 10^6$ [Pa · s]	17,21	16,75	19,24	13,75	16,54	8,53	21,02
C_s	122	107	138	250	102	673	



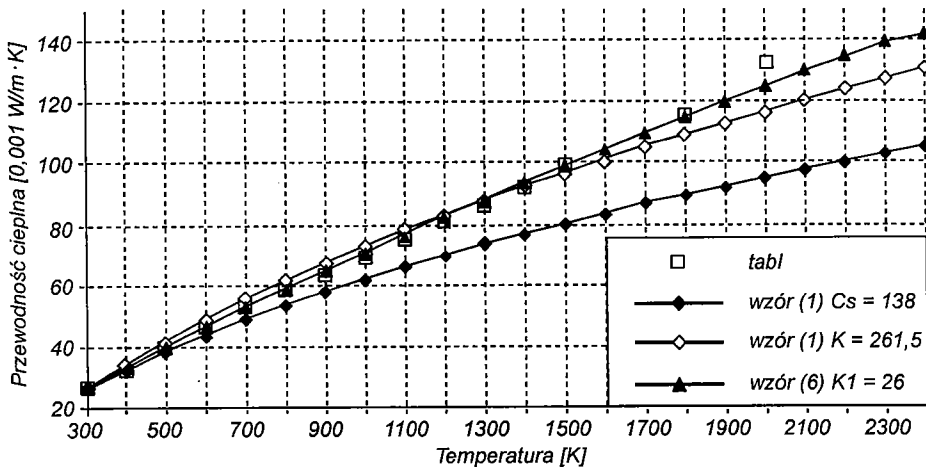
Rys. 2. Porównanie wartości współczynnika lepkości dynamicznej azotu z wynikami obliczeń wg wzoru (2)

W interesującym z uwagi na rozważany zakres zastosowań w obliczeniach ciepło-przepływowych maszyn i urządzeń energetycznych przedziale temperatur od około 300 K do co najmniej 1500 K odwzorowanie zmienności współczynnika λ zgodne ze wzorem (1) jest z pewnością zgrubne, a w zakresie temperatur wyższych niż około 600 K błąd obliczeń jest znaczny i przekracza wartości dopuszczalne nawet w obliczeniach szacunkowych. W tabl. 2 podano wartości błędów względnych obliczeń współczynnika przewodności cieplnej otrzymane ze wzoru (1) dla kilku gazów przy temperaturach 873 i 1473 K (600 i 1200°C). Ilustracja graficzna wyników obliczeń dla tlenu, azotu, dwutlenku węgla oraz pary wodnej została przedstawiona kolejno na rys. 3, 4, 5 oraz 8.

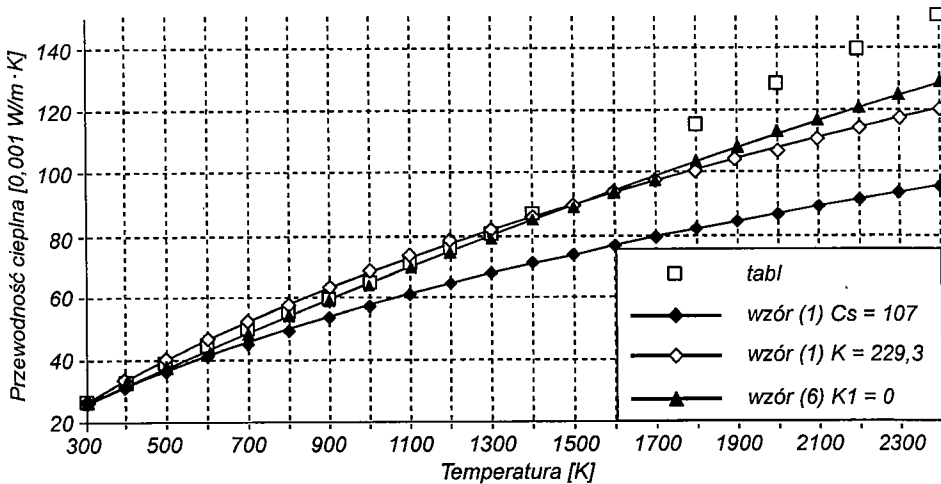
Tablica 2

Przykładowe wartości błędów względnego określenia przewodności cieplnej za pomocą wzoru (1)

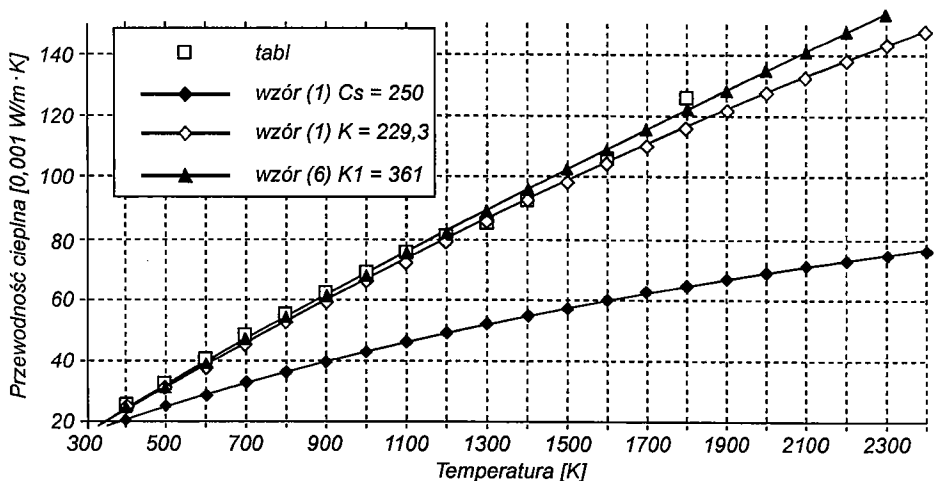
Substancja	873 K	1473 K
azot	8%	20%
tlen	9%	19%
dwutl. węgla	35%	43%
para wodna	31%	55%



Rys. 3. Przewodność cieplna tlenu w funkcji temperatury – porównanie wyników obliczeń z wartościami tablicowymi



Rys. 4. Przewodność cieplna azotu w funkcji temperatury – porównanie wyników obliczeń z wartościami tablicowymi



Rys. 5. Przewodność cieplna dwutlenku węgla w funkcji temperatury – porównanie wyników obliczeń z wartościami tablicowymi

Z uwagi na fakt, że postać równania (1) jest bardzo prosta i umożliwia szybki szacunek wyniku, a dodatkowo wymaga jedynie znajomości stałych materiałowych λ_0 i C_s , początkowo w pracy podjęto próbę jej korekty podnoszącej dokładność do poziomu przydatnego dla obliczeń technicznych (błąd maksymalny w granicach 2÷4%). Próby uzyskania dokładności wyższych można uznać za niecelowe wobec rozbieżności danych tablicowych odnośnie wartości współczynnika λ mieszczących się w podobnym zakresie.

Wartości współczynnika λ w zakresie temperatur 300÷2400 K zostały zaczerpnięte z tabl. termodynamicznych [2] i [5], tam gdzie było to możliwe – z krokiem temperaturowym 100 K. Luki w danych tablicowych nie pozwoliły w pełni dotrzymać tego warunku, odpowiednie ich braki widoczne są na rysunkach 2÷8.

Pierwszą próbę korekty zależności (1) podjęto na drodze zastąpienia stałej C_s nową wielkością K spełniającą warunek:

$$\delta = \sum_{i=1}^{13} (\lambda_{\text{obl}} - \lambda_{\text{tabl}})^2 = \min. \quad (4)$$

W wyniku takiego działania okazało się możliwe znaczne poprawienie dokładności wzoru (1) dla każdego z rozpatrywanych gazów, choć wyniki w przedziale 273 K÷1473 K (0÷1200°C) nie spełniały warunku:

$$\frac{(\lambda_{\text{obl}} - \lambda_{\text{tabl}})}{\lambda_{\text{tabl}}} \leq 0,04. \quad (5)$$

Krzywe ilustrujące zmiany współczynnika przewodności cieplnej liczonego w tak skorygowany sposób na tle danych tablicowych zamieszczono na rys. 3÷8. Oznaczono je symbolem K z podanymi wartościami tego współczynnika.

W dalszym postępowaniu podjęto próbę korekty wzoru (1) do postaci:

$$\lambda = \lambda_0 \frac{273 + K_1}{T + K_1} \left(\frac{T}{273} \right)^W. \quad (6)$$

W wyniku doboru współczynników K_1 i wykładnika W dla rozpatrywanych gazów, z wyjątkiem pary wodnej, uzyskano w tym przypadku odwzorowanie zmian współczynnika λ spełniające warunek (5) dla stałej wartości współczynnika $W = 1,77$. Współczynniki K_1 pozwalające na dotrzymanie warunków (4) i (5) były równe odpowiednio:

– dla CO_2 – 361, – dla N_2 – 0, – dla O_2 – 26.

W dodatkowej analizie przeprowadzonej później dla tlenku węgla i powietrza stwierdzono, że wzór (6) daje poprawne odwzorowanie zależności przewodności cieplnej od temperatury także dla tych, innych niż wykorzystane do jej utworzenia, gazów. Wykorzystując dla nowych gazów tę samą co poprzednio wartość wykładnika $W = 1,77$ należało jedynie dobrać właściwy dla danego gazu współczynnik K_1 . Otrzymane tu wartości współczynnika K_1 były równe:

– dla powietrza – 14, – dla CO – 21.

Ilustrację otrzymanych wyników stanowią odpowiednio rys. 6 i rys. 7.

Zmiany przewodności cieplnej pary wodnej w funkcji temperatury w rozpatrywanym jej przedziale mają przebieg nieco odmienny w stosunku do pozostałych gazów. Zależność (6) może być stosowana w zakresie temperatur $0 \div 900^\circ\text{C}$ ($273 \text{ K} \div 1173 \text{ K}$) z błędem do 6%, ale przy innej niż dla pozostałych gazów wartości $W = 1,39$ i możliwie wysokiej (praktycznie – nieskończonej) wartości K_1 – tutaj przyjętej $K_1 = 9 \cdot 10^6$. Dokładniejsze odwzorowanie zależności współczynnika λ od temperatury umożliwił uziemiennienie wykładnika W . Dla $K_1 = 660$ oraz

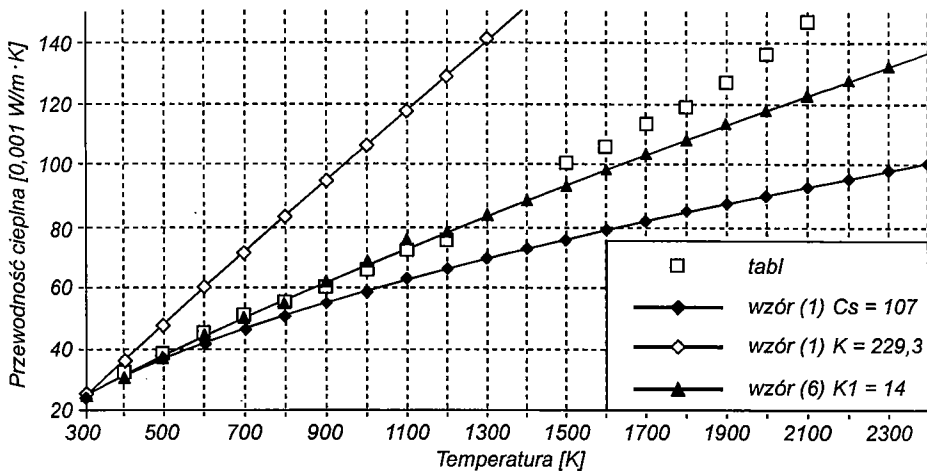
$$W = 1,44 + \frac{T}{9,1 \cdot 273}, \quad (7)$$

w przedziale temperatur do 1400 K uzyskana dokładność zapewnia dotrzymanie warunku (5).

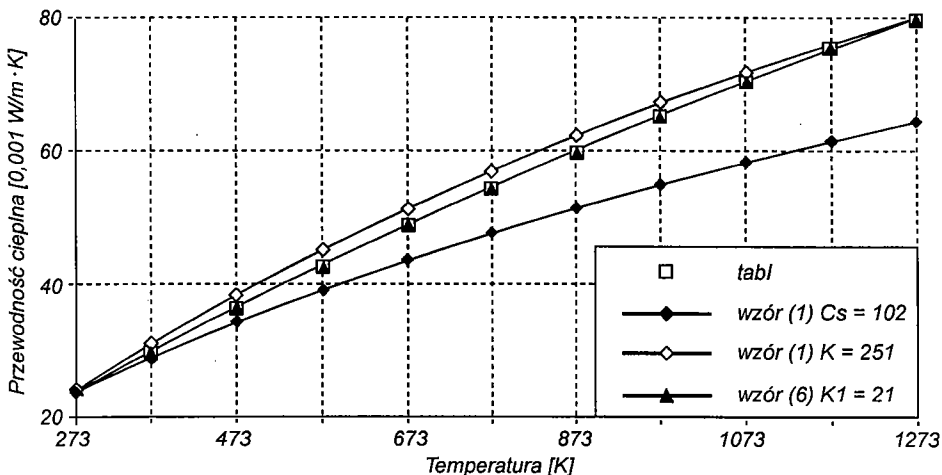
Przebiegi zmian współczynnika λ dla wszystkich rozważanych gazów zgodne z zależnością (6) podano na rys. 3÷8. Krzywe odpowiadające na tych rysunkach zależności (6) oznaczono symbolem i wartością współczynnika K .

Błąd maksymalny w zakresie temperatur 273 K ÷ 1473 K (0 ÷ 1200°C) mieści się w granicach:

- dla azotu 2%,
- dla tlenu 3%,
- dla dwutlenku węgla 2%,
- dla pary wodnej 4%,
- dla powietrza 4%,
- dla tlenku węgla 1%.



Rys. 6. Przewodność cieplna powietrza w funkcji temperatury – porównanie wyników obliczeń z wartościami tablicowymi



Rys. 7. Przewodność cieplna tlenku węgla w funkcji temperatury – porównanie wyników obliczeń z wartościami tablicowymi

3. PODSUMOWANIE

Proponuje się stosowanie do przybliżonych obliczeń współczynnika przewodności cieplnej λ dla gazów skorygowanego wzoru Sutherlanda (6). Dla rozważanych w pracy gazów wartości λ_0 podano w tabl. 1, zaś K_1 w końcowej części rozdz. 2. Zależności obowiązują dla umiarkowanych ciśnień (do około 2 MPa). Przewodność cieplną mieszanin gazów w funkcji temperatury można liczyć korzystając dodatkowo z półempirycznego wzoru Wilkego [2].

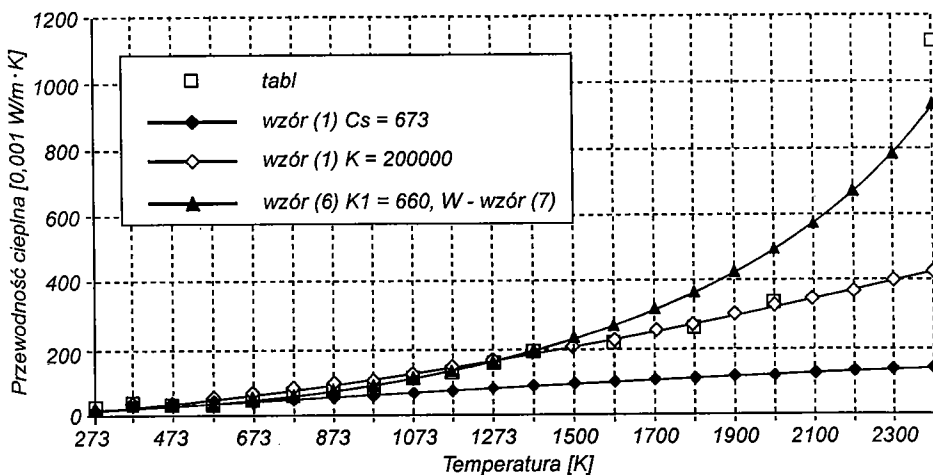
Wartości wykładnika W oraz stałych K_1 poszukiwano jedynie na drodze dopasowania przebiegu równania (6) do przyjętych wartości tablicowych, bez próby określania ich sensu fizycznego. Uzyskana wartość $W = 1,77$, jak to wcześniej wskazano na przykładzie powietrza i tlenku węgla może być, jak się wydaje, stosowana w zależności (6) dla innych, niż rozważane w niniejszej pracy gazów. Konieczne jest natomiast każdorazowe określanie dla nowych gazów współczynnika K_1 .

Jedną z alternatyw dla podanych wzorów stanowi możliwość wykorzystania związku pomiędzy lepkością a przewodnością cieplną [1]:

$$\lambda = \varepsilon c_v \mu \quad (8)$$

przy czym: c_v jest ciepłem właściwym gazu przy stałej objętości, zaś ε jest współczynnikiem zależnym od budowy cząsteczki gazu.

Wiąże się to jednak z koniecznością znajomości innych parametrów gazów (ciepła właściwe c_p i c_v) jako funkcji temperatury. W niniejszej pracy nie sprawdzono dokładności możliwych do uzyskania tą drogą wyników w porównaniu z równaniem (6).



Rys. 8. Przewodność cieplna pary wodnej w funkcji temperatury – porównanie wyników obliczeń

Zmiany współczynnika lepkości dla pary wodnej w rozważanym przedziale temperatur nie umożliwiają korzystania z identycznej, jak dla pozostałych gazów wartości wykładnika W . Dokładne odwzorowanie zmian współczynnika przewodności dla pary wodnej w szerokim zakresie ciśnień i dość szerokim (do 1000°C) temperatur możliwe jest z użyciem złożonych wzorów np. formuł Yaty i Minimayamy lub Basu, Watsona i Sengersa [3].

Jak wynika z rys. 3 ÷ 8 istnieje możliwość ekstrapolacji zależności (6) poza rozważany zakres temperatur w odniesieniu do niektórych gazów, jednak trzeba się tu liczyć ze wzrostem błędu poza granice narzucone warunkiem (5).

BIBLIOGRAFIA

- [1] Bejan A.: Heat transfer. J. Wiley & Sons, New York 1994.
- [2] Ražnjević K.: Thermodynamische Tabellen VDI Verlag, Düsseldorf 1977.
- [3] Scheffner K., Straub J., Grigull U.: Die Wärmeleitfähigkeit von Wasser und Wasserdampf. Brennstoff Wärme Kraft V. 31 nr 8.
- [4] Staniszewski B.: Wymiana ciepła. Podstawy teoretyczne. PWN, Warszawa 1980.
- [5] Wargafik N. B.: Sprawocznik po ciepłofizycznym swojstwam wieszczestw. Izdatielstwo Nauka, Moskwa 1972.
- [6] Wiśniewski S., Wiśniewski T.S.: Wymiana ciepła. PWN, Warszawa 1994.

CORRECTED SUTHERLAND'S FORMULA FOR CALCULATING GAS THERMAL CONDUCTIVITY

Summary

Formulas for calculating gas thermal conductivity in lowmid pressures (up to 2,0 MPa), based on modified Sutherland's formula, are presented. Basing on this formula, changes in the form and values of the coefficients are proposed. Calculation results and their comparison with table values are set in figures.