

**Jerzy Kołtyś**

Instytut Techniki Ciepłej ·

## **ZASTOSOWANIE METODY NAJMNIEJSZYCH KWADRATÓW DO ROZWIĄZANIA ODWROTNEGO ZAGADNIENIA PRZEWODZENIA CIEPŁA W OBSZARZE WIELOSZKŁADNIKOWYM**

W artykule przedstawiono zastosowanie metody najmniejszych kwadratów [1,2] do rozwiązania zagadnienia odwrotnego przewodzenia ciepła typu współczynnikowego w przypadku układu nieliniowego i wieloskładnikowego. Określono warunki uzyskania jednoznaczności rozwiązania i sposób doboru położenia punktów pomiarowych, w celu dokładnego wyznaczenia poszukiwanych wielkości na podstawie analizy pól wrażliwości.

Podano wyniki obliczeń symulacyjnych wyznaczania trzech wielkości dla trójskładnikowego układu pomiarowego o osiowosymetrycznej geometrii walcowej i przewodności cieplnej jednego ze składników zależnej liniowo od temperatury.

Na przedstawionym przykładzie wykazano poprawność wyznaczenia średniego odchylenia standardowego poszukiwanych wielkości w oparciu o zasadę propagacji błędów.

### **1. WSTĘP**

W badaniach złożonych zjawisk wymiany ciepła coraz większe znaczenie odgrywa rozwiązywanie zagadnień odwrotnych. Dzieje się tak ze względu na znaczny postęp w technice obliczeniowej, która umożliwia wykonywanie coraz bardziej czasochłonnych i złożonych obliczeń. Ma to zwłaszcza duże znaczenie przy opracowywaniu wyników badań eksperymentalnych, gdyż daje możliwości badania bardziej złożonych zjawisk fizycznych, bez konieczności ich opisu zbyt uproszczonym modelem matematycznym. W wielu publikacjach przedstawiono możliwości zastosowania różnych metod do rozwiązywania zagadnień odwrotnych wymiany ciepła [5,6,8,9]. Wydaje się,

że najbardziej efektywną w rozwiązywaniu zagadnień odwrotnych typu współczynnikowego może być metoda najmniejszych kwadratów, stosowana często do wyznaczania współczynników równań empirycznych i przedstawiona w [1, 2]. Metoda ta może okazać się przydatna wtedy, gdy poszukuje się niewielu zmiennych, a funkcja nimi określona wymaga złożonych i czasochłonnych obliczeń. Dotyczy to także pola temperatury wyznaczonego numerycznie w złożonym wieloskładnikowym obszarze. Pole w takim obszarze jest opisane złożoną funkcją analityczną albo wyznaczone metodą numeryczną zależną od właściwości cieplnych układu i warunków brzegowych. Przyjmuje się, że niektóre wielkości służące do wyznaczania wartości temperatury są znane tylko z pewną dokładnością i ich wyznaczanie będzie celem rozwiązania zagadnienia odwrotnego. Celem zadania będzie również wskazanie miejsc pomiaru temperatury w badanym obszarze, aby rozwiązanie zadania było możliwe z największą dokładnością na jaką pozwalają pomiary temperatury. Zakłada się przy tym, że pomiary temperatury są niezależne i mają to samo odchylenie standardowe. W takim przypadku, jak to wykazano w [1], możliwe jest również oszacowanie dokładności wyznaczania poszukiwanych wielkości tą metodą jako funkcji dokładności pomiaru temperatury.

## 2. SFORMUŁOWANIE ZAGADNIENIA ODWROTNEGO

Rozpatruje się układ pomiarowy, dla którego pole temperatury można przybliżyć w pewnym obszarze funkcją

$$T = T(x, p) \quad (1)$$

gdzie  $x$  — jest wektorem przestrzeni, a  $p$  — wektorem wielkości poszukiwanych znanych tylko jako wartości wstępnie oszacowane wektorem  $p^0$ . Wektor  $p$  jest wektorem  $N$ -wymiarowym. Funkcja  $T$  zależy też od pewnego zbioru wartości znanych, które można wyznaczyć na tyle dokładnie, aby nie miało to wpływu na otrzymane wyniki.

Zakłada się, że w  $M$  punktach układu mierzona jest temperatura  $T_i^z$  ( $i = 1, \dots, M$ ) oraz w tych samych punktach można wyznaczyć wartość funkcji (1) jako  $T_i = T(x_i, p)$

Temperatury tworzą  $M$ -wymiarowe wektory kolumnowe:

$T^z$  — temperatur zmierzonych,

$T$  — temperatur obliczonych ze wzoru (1),

przy czym  $M \geq N$ . Funkcja  $T$  może być nieliniowa, ale przyjmuje się, że we wszystkich punktach w pewnym otoczeniu wektora  $\mathbf{p}^0$  daje się ją przybliżyć pierwszym rozwinięciem w szereg Taylora jako:

$$T_i(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}) = T(\mathbf{x}_i, \mathbf{p}^0) + \sum_{j=1}^N \frac{\partial T_i}{\partial p_j} (p_j - p_j^0) \quad (2)$$

Celem zadania jest poszukiwanie takich wartości wektora  $\mathbf{p}$ , aby moduł wektora niezgodności temperatur zmierzonych i obliczonych osiągnął minimum, tzn.

$$|\mathbf{w}| = |\mathbf{T}^z - \mathbf{T}| \Rightarrow \min \quad (3)$$

### 3. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA ODWROTNEGO

Należy założyć, że poszukiwane rozwiązanie znajduje się w na tyle bliskim otoczeniu wektora  $\mathbf{p}^0$ , aby wektor temperatury można było przybliżyć wzorem (2) zapisanym w postaci macierzowej jako

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}^0 + \mathbf{B} \mathbf{v} \quad (4)$$

gdzie:  $\mathbf{v}$  jest wektorem poprawek dla wektora  $\mathbf{p}$ ,  $\mathbf{B}$  – macierzą o składowych:

$$b_{ij} = \frac{\partial T_i}{\partial p_j} \quad (5)$$

Wektor niezgodności temperatur można przedstawić jako

$$\mathbf{w} = \mathbf{T}^z - \mathbf{T} = \mathbf{T}^z - \mathbf{T}^0 - \mathbf{B} \mathbf{v} = \mathbf{w}^0 - \mathbf{B} \mathbf{v}$$

gdzie  $\mathbf{w}^0$  jest początkowym wektorem niezgodności.

Aby wyznaczyć wektor poprawek należy wykonać minimalizację funkcjonau:

$$F = (\mathbf{w}^0 - \mathbf{B} \mathbf{v})^T (\mathbf{w}^0 - \mathbf{B} \mathbf{v}) \quad (6)$$

W tym celu należy rozwiązać równanie

$$\frac{dF}{d\mathbf{v}} = -2 \mathbf{B}^T (\mathbf{w}^0 - \mathbf{B} \mathbf{v}) = 0 \quad (7)$$

skąd otrzymuje się układ równań:

$$(\mathbf{B}^T \mathbf{B}) \mathbf{v} = \mathbf{B}^T \mathbf{w}^0 \quad (8)$$

i rozwiązanie:

$$\mathbf{v} = (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} \mathbf{B}^T \mathbf{w}^0 \quad (9)$$

Podobny sposób postępowania zastosowano w [1, 2, 7] przy wyznaczaniu współczynników wzoru empirycznego. Tutaj założono dodatkowo, że pomiary wszystkich temperatur mają to samo odchylenie standardowe  $\Delta T$ .

Nowy wektor poszukiwanych wielkości  $\mathbf{p}$  będzie wyznaczony jako

$$\mathbf{p} = \mathbf{p}^0 + \mathbf{v} \quad (10)$$

W przypadkach nieliniowych procedurę należy powtarzać w celu znalezienia kolejnych przybliżeń wektora  $\mathbf{p}$ .

#### 4. SZACOWANIE BŁĘDÓW WYZNACZANYCH WIELKOŚCI

Jak przedstawiono w [1], dla poszukiwanego wektora  $\mathbf{p}$  ze względu na przyjęte wyżej założenia macierz kowariancji można przedstawić jako

$$\mathbf{G}_p = \Delta T^2 (\mathbf{B}^T \mathbf{B})^{-1} = \Delta T^2 \mathbf{D}$$

Błędy pomiarowe składowych wektora  $\mathbf{p}$  można szacować następująco:

$$\Delta p_j = \Delta T \sqrt{d_{jj}} \quad (11)$$

gdzie  $d_{jj}$  są elementami diagonalnymi macierzy  $\mathbf{D}$ .

#### 5. PROBLEM JEDNOZNACZNOŚCI ROZWIĄZANIA

Problem ten wiąże się ze spełnianiem przez postawione zadanie warunków Hadamara [8], co, jak wiadomo, w przypadku zagadnień odwrotnych jest bardzo ograniczone.

Problem zbieżności procedury będzie zależał od nieliniowości funkcji temperatury i od tego, czy rozwiązanie zmieści się w obszarze dobrze określonym przybliżeniem (2). Jeżeli tak, to wszystko zależeć będzie od istnienia jednoznacznego rozwiązania układu równań (8).

Aby układ równań (8) miał jedno i tylko jedno rozwiązanie, jego macierz główna  $(\mathbf{B}^T \mathbf{B})$  musi być rzędu  $N$ . Aby tak było, wystarczy aby macierz  $\mathbf{B}^T$  lub macierz  $\mathbf{B}$  była rzędu  $N$ .

Macierz  $\mathbf{B}^T$  jest zbudowana z  $M$  wektorów kolumnowych o wymiarze  $N$ , których składowe są pochodnymi temperatury względem składowych wektora  $\mathbf{p}$ . Aby ta macierz była rzędu  $N$ , wystarczy, aby  $N$  wektorów było liniowo niezależnych. Zagadnienie to wiąże się ściśle z doбором punktów pomiarowych w obszarze temperatury opisanym funkcją (1).

Jeżeli rozkłady funkcji  $\partial T/\partial p_j$  będą w całym badanym obszarze podobne do siebie dla co najmniej dwóch składowych wektora  $\mathbf{p}^0$ , to znalezienie  $N$  wektorów niezależnych w macierzy  $\mathbf{B}^T$  będzie niemożliwe, macierz główna równania (8) będzie miała rząd mniejszy niż  $N$  i rozwiązanie uzyskane z (9) będzie zależne od wartości wektora początkowego  $\mathbf{p}^0$ .

Z prawa propagacji błędów [1] wynika, że odchylenie standardowe wyznaczanych wielkości będzie najmniejsze, gdy składowe wektorów w macierzy głównej ( $\mathbf{B}^T \mathbf{B}$ ) będą największe.

Ponieważ pochodne wielkości mierzonej względem wielkości poszukiwanej zostały przez Becka [5] nazwane współczynnikami wrażliwości, analogicznie połowe rozkłady tych wielkości można nazwać polami wrażliwości.

Z rozważań tych wynika, że należy zbadać rozkłady pól wrażliwości dla wszystkich poszukiwanych wielkości  $p_j$ . Równocześnie można wyznaczać tylko te wielkości  $p_j$ , które różnią się rozkładem przestrzennym pól wrażliwości. Punkty pomiarowe należy dobrać w obszarach, gdzie występują największe wartości współczynników wrażliwości.

Badanie pól wrażliwości pozwala jakościowo ocenić możliwości równoczesnego wyznaczenia poszukiwanych wielkości metodą najmniejszych kwadratów w konkretnym przypadku. Daje również możliwość najlepszego doboru położenia punktów pomiarowych w celu możliwie najdokładniejszego wyznaczenia danego zestawu zmiennych w danym układzie pomiarowym.

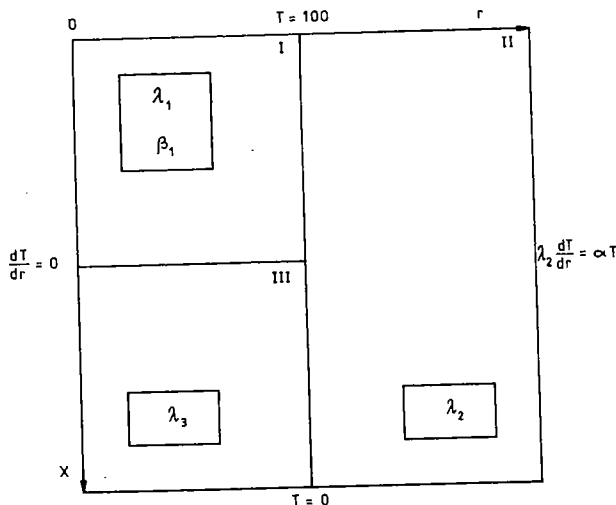
Przedstawiony tu sposób postępowania zostanie zilustrowany w podanym niżej przykładzie.

## 6. PRZYKŁAD OBLICZENIA ZAGADNIENIA ODWROTNEGO

Przedstawione zostaną obliczenia symulacyjne prowadzące do wyznaczenia niektórych wielkości opisujących ustaloną wymianę ciepła w układzie trójskładnikowym o geometrii walcowej, osiowo symetrycznej, podobnej do stosowanej w aparatach do badania przewodności cieplnej metodą porównawczą.

## 6.1. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA PRZEWODZENIA CIEPŁA (ZAGADNIENIE PIERWOTNE)

Przyjęto, że wymianę ciepła w takim układzie można opisać modelem dwuwymiarowym osiowo symetrycznym z warunkami brzegowymi pierwszego i trzeciego rodzaju, którego schemat przedstawiono na rys. 1. Założono zależność przewodności cieplnej w obszarze I od temperatury:  $\lambda = \lambda_1(1 + \beta_1 T)$ , gdzie  $\beta$  jest liniowym



Rys.1. Schemat modelu obliczeniowego badanego układu

współczynnikiem tej zależności. Ułożono podprogram, który pozwala numerycznie wyznaczyć temperaturę w węzłach siatki w obszarze złożonym z trzech składników. Podprogram ten realizował działania pozwalające na wyznaczenie funkcji temperatury w dowolnym węźle jako

$$T_i = T(p_1, p_2, \dots, p_N)$$

gdzie np.  $p_1 = \lambda_1$ ,  $p_2 = \beta_1$ ,  $p_3 = \alpha$ ,  $p_4 = \lambda_2$  mogły być wielkościami zmiennymi, a pozostałe wielkości służące do wyznaczenia temperatury traktowano jako stałe i znane. Podprogram ten zastosowano do wyznaczenia temperatur w niektórych węzłach siatki jako danych wejściowych do zagadnienia odwrotnego, a także służył do rozwiązywania zagadnienia odwrotnego.

## 6.2. ROZWIĄZANIE ZAGADNIENIA ODWROTNEGO

Ułożono program pozwalający na równoczesne wyznaczenie  $N$  zmiennych, zgodnie z przyjętą w punkcie 2 procedurą iteracyjną. Program główny służy do wprowadzenia

danych i obliczenia danych wejściowych dla zadania odwrotnego. Następnie wywoływany jest podprogram sterujący obliczeniami i kontrolujący zbieżność obliczeń.

W obliczeniach wykorzystywane są procedury:

- wyznaczające estymacje pochodnych temperatur,
- obliczające współczynniki równań,
- rozwiązujące układy równań.

Podprogram ten wykonywał też szacowanie błędów zgodnie ze wzorem (11).

Ze względu na przyjęty numeryczny sposób wyznaczania pola temperatury, zdecydowano się na estymacyjne wyznaczanie pochodnych temperatury względem wielkości poszukiwanych. Ułatwia to znacznie modyfikację programu w przypadku zmiany modelu obliczeniowego lub zmiany zbioru wielkości poszukiwanych, inne metody, jak np. rozwiązywanie zadania sprzężonego [8], wymagają większych zmian programu w przypadku modyfikacji zadania i może to być źródłem przypadkowych błędów. Estymacyjne wyznaczanie pochodnej temperatury względem poszukiwanych wielkości odbywało się zgodnie z procedurą przedstawioną w [4] przy wyznaczaniu gradientu. Ze względu na numeryczne wyznaczanie pochodnych i zależność właściwości cieplnych od temperatury, samo wyznaczanie funkcji temperatury wymagało takiej ilości iteracji, aby różnica kolejnych ich wartości w punktach „pomiarowych” nie przekraczała  $10^{-10}$ .

Efektywność działania podprogramu wyznaczającego pole temperatury decyduje o efektywności działania całego programu. W trakcie wykonywania każdego kroku obliczeniowego podprogram ten wywoływany jest  $N+2$  razy. Najpierw wykonywane są obliczenia wstępne obejmujące jeden krok, w wyniku których uzyskuje się dane będące podstawą wykonania wykresów pól wrażliwości oraz wykresów izolinii dla współczynników wrażliwości. Na podstawie tych wykresów można ocenić, które wielkości można równocześnie wyznaczać i gdzie należałoby umieścić punkty pomiarowe, aby uzyskać najmniejszy błąd przy wyznaczaniu tych wielkości.

Obliczenia początkowe wykonywane są dla wstępnie oszacowanych wartości poszukiwanych wielkości, które wystarczy znać np. z dokładnością 50%. Nie ma to zasadniczego wpływu na geometryczny obraz pól wrażliwości, który zależy głównie od geometrii układu, rodzaju warunków brzegowych oraz zasadniczych różnic właściwości cieplnych składników układu.

Dla wybranych punktów można przeprowadzić obliczenia symulacyjne pozwalające określić wymaganą dokładność prowadzenia pomiarów temperatury w celu zapewnienia odpowiedniej dokładności wyznaczania poszukiwanych wielkości. Można też sprawdzać zbieżność i stabilność działania procedury obliczeniowej dla konkretnego przypadku.

## 7. WYNIKI OBLICZEŃ ZAGADNIENIA ODWROTNEGO

Przedstawione zostaną wyniki obliczeń przeprowadzonych dla założonych danych:

– przewodności cieplne:

w obszarze I ( $0 < x < 5$  mm;  $0 < r < 5$  mm):  $\lambda = \lambda_1(1 - \beta_1 T) = 1,0(1 - 0,0015 T)$  W/m·K,

w obszarze II ( $0 < x < 10$  mm;  $5$  mm  $< r < 10$  mm):  $\lambda = \lambda_2 = 0,1$  W/m·K,

w obszarze III ( $5$  mm  $< x < 10$  mm;  $5$  mm  $< r < 10$  mm):  $\lambda = \lambda_3 = 10$  W/m·K;

– warunki brzegowe:

temperatury górna i dolna  $T_g = 100^\circ\text{C}$ ;  $T_d = 0^\circ\text{C}$ ,

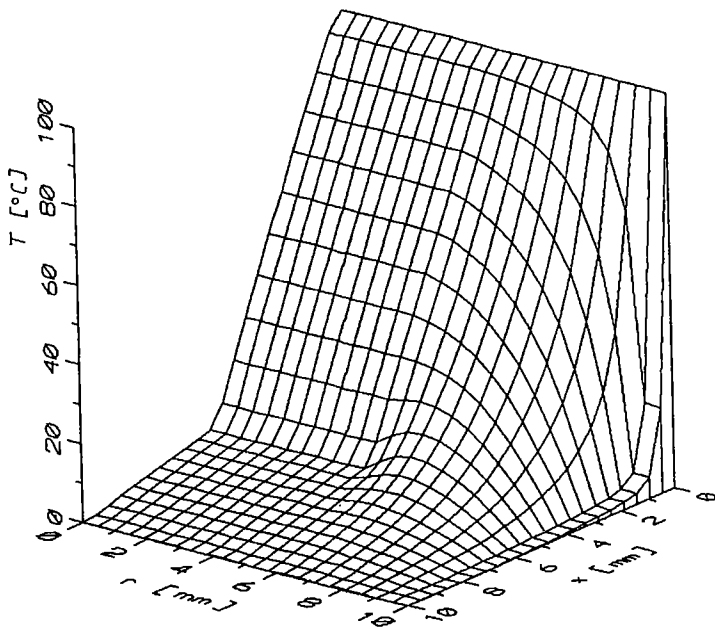
współczynnik przemijania ciepła  $\alpha = 6$  W/m<sup>2</sup>·K

temperatura otoczenia  $T_0 = 0^\circ\text{C}$ .

Powyższe dane dotyczą „eksperymentu” i będą służyć do wyznaczenia temperatur pomiarowych. Wykonane dla tych danych obliczenia temperatury przedstawione są na rys.2.

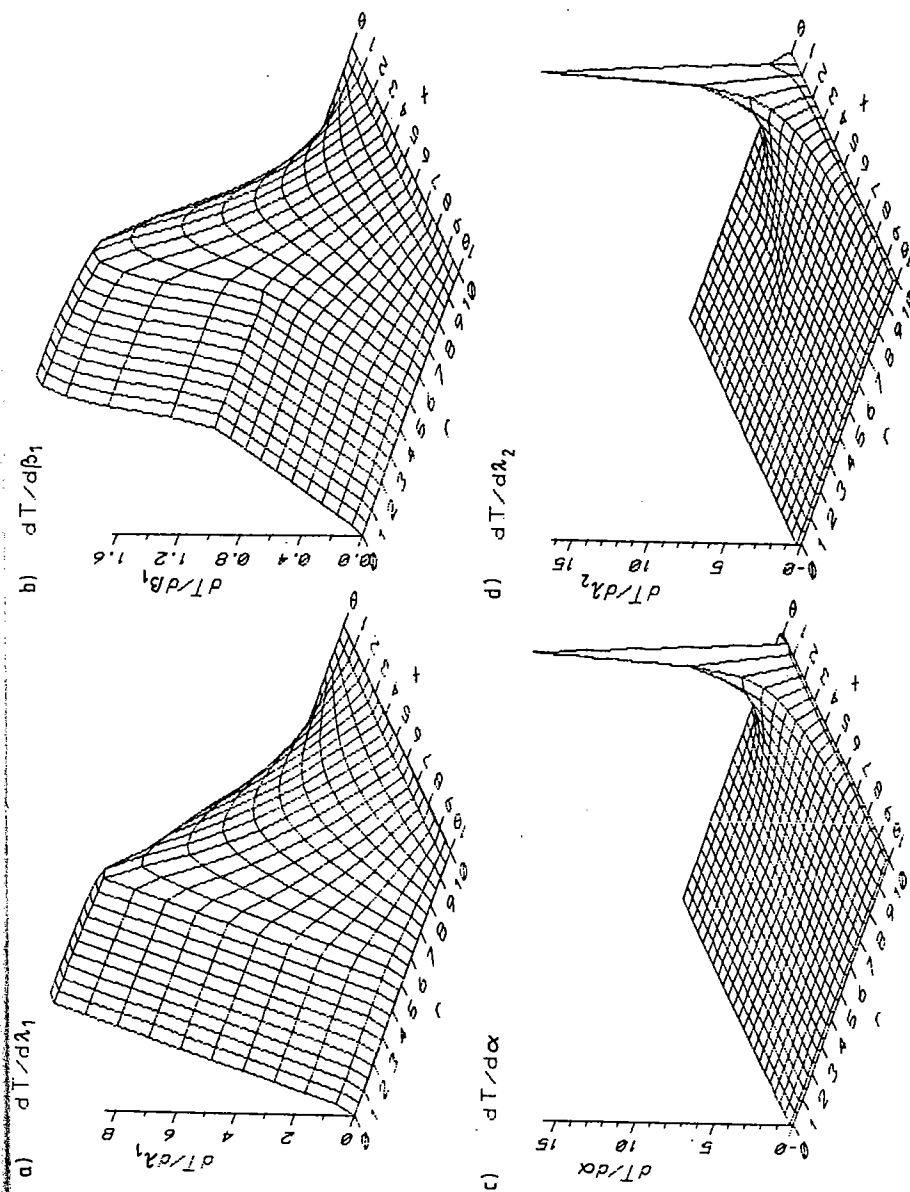
Przyjęto, że będą poszukiwane wielkości  $\lambda_1$ ,  $\beta_1$ ,  $\alpha$  i  $\lambda_2$ .

Dla zadanych wielkości początkowych:  $\lambda_1 = 0,5$  W/m·K,  $\beta_1 = 0,001$  K<sup>-1</sup>,  $\alpha = 3$  W/m<sup>2</sup>·K,  $\lambda_2 = 0,05$  W/m·K przeprowadzono obliczenia pochodnych



Rys.2. Wykres temperatury w badanym obszarze dla:  $\lambda_1 = 1,0(1 + 0,0015 T)$  W/m·K,  $\lambda_2 = 0,1$  W/m·K,  $\lambda_3 = 10$  W/m·K,  $\alpha = 6$  W/m<sup>2</sup>·K



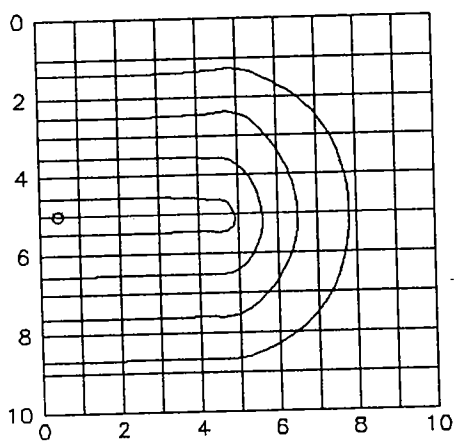


Rys.3. Wykresy pól wrażliwości temperatury dla wybranych wielkości

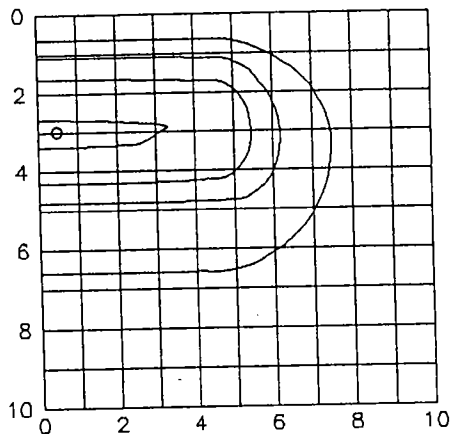
w całym obszarze. Na podstawie obliczeń wykonano wykresy pól wrażliwości dla tych wielkości (rys.3). Z wykresów tych wynika, że wielkości  $\alpha$  i  $\lambda_2$  mają bardzo podobne rozkłady pól wrażliwości, co oznacza, że ich równoczesne wyznaczanie może dać wyniki niejednoznaczne i obciążone znacznym błędem.

Po kilku próbach wykazujących, że nie ma jednoznacznego rozwiązania dla  $N = 4$ , do dalszego testowania wzięto pierwsze trzy z tych wielkości. Jako punkty „pomiarowe” przyjęto dla nich punkty położone w obszarach, gdzie pola wrażliwości mają swe maksima. Położenie tych punktów zaznaczono na wykresie izolinii współczynników wrażliwości (rys.4).

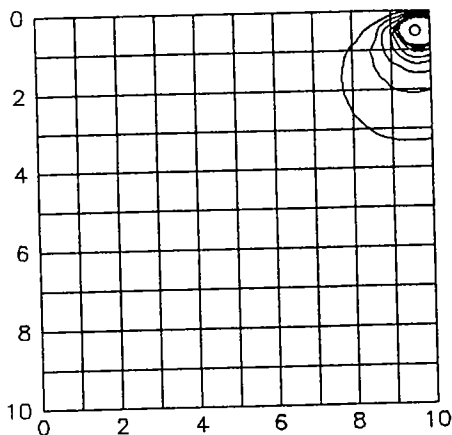
a)  $dT/d\lambda_1 = \text{const}$



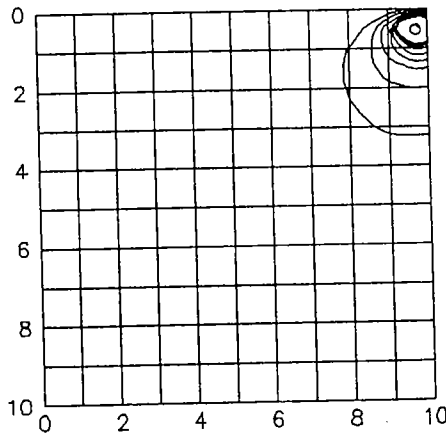
b)  $dT/d\beta_1 = \text{const}$



c)  $dT/d\alpha = \text{const}$



d)  $dT/d\lambda_2 = \text{const}$



Rys.4. Wykresy izolinii współczynników wrażliwości dla przypadku przedstawionego na rys.3;

o – punkty pomiaru temperatury stosowane w dalszych obliczeniach

## Obliczenia metodą najmniejszych kwadratów

a)				
DANE				
$N = 3,$				
$\lambda_1^0 = 0,5 \text{ W/m}\cdot\text{K}, \beta_1^0 = 0,001 \text{ K}^{-1}, \alpha^0 = 3,0 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$				
1	$x = 0,0002500,$	$r = 0,0027500,$	$T = 51,76294^\circ\text{C},$	$\delta T = 0^\circ\text{C}$
2	$x = 0,0002500,$	$r = 0,0047500,$	$T = 14,58587^\circ\text{C},$	$\delta T = 0^\circ\text{C}$
3	$x = 0,0097500,$	$r = 0,0002500,$	$T = 21,96560^\circ\text{C},$	$\Delta T = 0^\circ\text{C}$
WYNIKI OBLICZEŃ				
Lp.	$F$	$\lambda_1$ [W/m·K]	$\beta_1$ [K <sup>-1</sup> ]	$\alpha$ [W/m <sup>2</sup> ·K]
1	0,111710E+03	0,5000000	0,0010000	3,000
2	0,136459E+01	0,9901395	0,0014360	5,562
3	0,553475E-03	1,0000427	0,0014996	5,991
4	0,100998E-09	1,0000000	0,0015000	6,000
5	0,124102E-17	1,0000000	0,0015000	6,000
śr. odch. stand.		$\Delta\lambda_1 = 0$	$\Delta\beta_1 = 0$	$\Delta\alpha = 0$
b)				
DANE				
$N = 3,$				
$\lambda_1^0 = 0,5 \text{ W/m}\cdot\text{K}, \beta_1^0 = 0,001 \text{ K}^{-1}, \alpha^0 = 3,0 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$				
1	$x = 0,0002500,$	$r = 0,0027500,$	$T = 51,86294^\circ\text{C}$	$\delta T = 0,1^\circ\text{C}$
2	$x = 0,0002500,$	$r = 0,0047500,$	$T = 14,68587^\circ\text{C}$	$\delta T = 0,1^\circ\text{C}$
3	$x = 0,0097500,$	$r = 0,0002500,$	$T = 22,06560^\circ\text{C},$	$\delta T = 0,1^\circ\text{C}$
WYNIKI OBLICZEŃ				
Lp.	$F$	$\lambda_1$ [W/m·K]	$\beta_1$ [K <sup>-1</sup> ]	$\alpha$ [W/m <sup>2</sup> ·K]
1	0,115054E+03	0,5000000	0,0010000	3,000
2	0,142074E+01	0,9990133	0,0014859	5,591
3	0,601122E-03	1,0078293	0,0015592	6,029
4	0,119454E-09	1,0077787	0,0015597	6,039
5	0,933278E-18	1,0077786	0,0015597	6,039
śr. odch. st.		$\Delta\lambda_1 = 0,019648$	$\Delta\beta_1 = 0,0001516$	$\Delta\alpha = 0,039$

DANE				
c) $N = 3,$ $\lambda_1^0 = 0,5 \text{ W/m}\cdot\text{K},$ $\beta_1^0 = 0,001 \text{ K}^{-1},$ $\alpha^0 = 3,0 \text{ W/m}^2\cdot\text{K}$				
1	$x = 0,0002500,$	$r = 0,0027500,$	$T = 52,26294^\circ\text{C},$	$\delta T = 0,5^\circ\text{C}$
2	$x = 0,0002500,$	$r = 0,0047500,$	$T = 15,08587^\circ\text{C},$	$\delta T = 0,5^\circ\text{C}$
3	$x = 0,0097500,$	$r = 0,0002500,$	$T = 22,46560^\circ\text{C},$	$\delta T = 0,5^\circ\text{C}$
WYNIKI OBLICZEŃ				
Lp.	$F$	$\lambda_1 \text{ [W/m}\cdot\text{K]}$	$\beta_1 \text{ [K}^{-1}\text{]}$	$\alpha \text{ [W/m}^2\cdot\text{K]}$
1	0,129033E+03	0,5000000	0,0010000	3,000
2	0,259529E+02	0,5534508	0,0016852	5,704
3	0,377049E-01	1,0196208	0,0017904	6,184
4	0,516514E-07	1,0381937	0,0018047	6,195
5	0,135987E-16	1,0382103	0,0018048	6,195
6	0,597188E-19	1,0382103	0,0018048	6,195
śr. odch. stand.		$\Delta\lambda_1 = 0,099779$	$\Delta\beta_1 = 0,0007822$	$\Delta\alpha = 0,196$

Przykładowe obliczenia dla  $N = 3$  przedstawiono w tabl. 1. Tablica ta zawiera obliczenia trzech wielkości w kolejnych krokach dla trzech różnych odchyłek mierzonych temperatur  $\delta T = 0, 0,1$  i  $0,5^\circ\text{C}$ . W tablicy tej przedstawiono niektóre dane wejściowe obejmujące: położenie punktów pomiarowych  $(x, r)$ , wartość przyjętą dla tych punktów błędu  $\delta T$ , wartość względnej dokładności  $\epsilon$  przyjętej w kryterium zbieżności procedury obliczeniowej i temperatury w warunkach brzegowych. W wynikach obliczeń oprócz poszukiwanych wielkości  $\lambda_1, \beta_1$  i  $\alpha$  występują:  $F$  - wartość funkcjonu opisana wzorem (6) oraz średnie odchylenia standardowe oszacowane wg wzoru (11) dla poszukiwanych wielkości w tym wypadku:  $\lambda_1, \beta_1$  i  $\alpha$ . Z przedstawionych tu trzech obliczeń wynika, że już po czterech krokach obliczeń osiągają wystarczającą dokładność, nawet w przypadku gdy wartości początkowe znacznie odbiegały od spodziewanego wyniku a zadane temperatury były obciążone znacznym błędem.

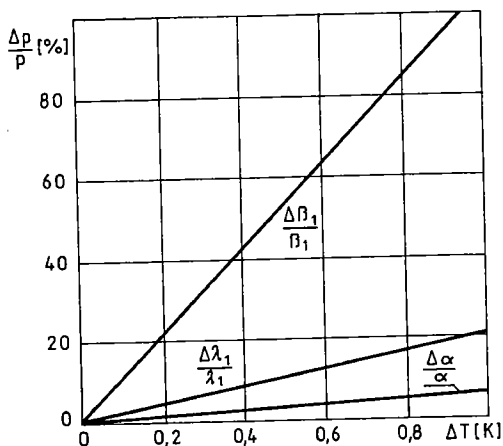
Przyjęta metoda obliczeń jest znacznie bardziej efektywna od metod przedstawionych w [3,4,8,9]. W celu sprawdzenia poprawności jej działania przeprowadzono kilka serii obliczeń sprawdzających. Zestawienie wyników jednej z serii obliczeń przedstawiono w tabl. 2. Seria ta została dobrana tak, aby średnia wartość odchyłek temperatur w całej serii wynosiła zero dla wszystkich punktów pomiarowych, wartość średniego odchylenia standardowego pomiaru temperatury dla tych punktów wynosiła  $\Delta T = 0,1 \text{ K}$ . Uzyskane wartości średnie wyznaczanych wielkości w miarę wielkim stopniu różnią się od znanych w tym przypadku wartości „dokładnych” (różnica spowodowana jest zbyt małą ilością węzłów w obliczeniach numerycznych:  $20 \times 20$ ). Obliczone średnie (dla tej serii) odchylenie standardowe poszukiwanych wartości okazuje się dobrze oszacowane wzorem (11). Podobne wyniki uzyskuje się dla innego zestawu wielkości poszukiwanych:  $\lambda_1, \beta_1$  i  $\lambda_2$ .

Obliczenia błędów dla średniego odchylenia standardowego temperatury  $\Delta T = 0,1^{\circ}\text{C}$  przyjętego w punktach pomiarowych o numerach węzłów (2,7), (2,11), (21,2)

Lp.	$\delta T$ w punktach pomiarowych			Wyniki obliczeń			Odchyłki od wartości średniej		
	(2,7)	(2,11)	(21,2)	$\lambda_1$	$\beta_1$	$\alpha$	$\delta\lambda_1$	$\delta\beta_1$	$\delta\alpha$
1	0,1	0,1	0,1	1,0077790	0,0015597	6,039	0,0076927	0,588E-4	0,039
2	-0,1	0,1	0,1	1,0267589	0,0012971	6,039	0,0266726	-2,038E-4	0,039
3	0,1	-0,1	0,1	0,9736495	0,0017058	6,039	-0,0264368	2,049E-4	0,039
4	0,1	0,1	-0,1	1,0077815	0,0015597	5,961	0,0076952	0,588E-4	-0,039
5	-0,1	-0,1	0,1	0,9921520	0,0014409	6,039	-0,0079342	-0,600E-4	0,039
6	-0,1	0,1	-0,1	1,0267620	0,0012972	5,961	0,0266757	-2,037E-4	-0,039
7	0,1	-0,1	-0,1	0,9736523	0,0017058	5,961	-0,0264340	2,049E-4	-0,039
8	-0,1	-0,1	-0,1	0,9921549	0,0014410	5,961	-0,0079313	-0,599E-4	-0,039
9	0,0	0,0	0,0	1,0000863	0,0015009	6,000	0,0	0,0	0,0
10	0,1	0,1	0,1	średnie odchylenie standardowe			0,0195733	1,5045E-4	0,039
11				śr. odchyl. standardowe wyznaczone ze wzoru (11)			0,0195733	1,5044E-4	0,039

Lp. 9 – zawiera wartości średnie.

Zależności między średnimi odchyleniami standardowymi poszukiwanych wielkości a średnim odchyleniem standardowym mierzonych temperatur przedstawiono na rys.5. Z wykresu tego wynika, że największe błędy związane są z dokładnym wyznaczeniem współczynnika  $\beta_1$ . Aby można go było wyznaczyć z dokładnością większą niż 5%, należałoby pomiar temperatury wykonywać ze średnim odchyleniem standardowym nie przekraczającym 0,04 K, co dla przyjętego tu zakresu temperatury nie jest trudne w praktyce.



Rys.5. Wykresy średniego odchylenia standardowego wyznaczonego dla poszukiwanych wielkości

Przedstawiono tutaj tylko obliczenia prowadzone dla przypadku, gdy  $M = N$ , tzn. gdy ilość punktów pomiarowych jest równa ilości poszukiwanych zmiennych. Wprowadzenie następnich informacji o temperaturze w dodatkowych punktach może niekiedy podwyższyć dokładność wyznaczania niektórych wielkości. Wydaje się jednak, że lepsze wyniki można uzyskać przez zwiększenie ilości pomiarów lub podwyższenie ich dokładności w odpowiednio wybranych punktach.

## 8. WNIOSKI

1. Przyjęty sposób postępowania pozwala ocenić możliwość rozwiązania zagadnienia odwrotnego dla konkretnego układu pomiarowego najdokładniejszą z metod obliczeniowych, tzn. metodą najmniejszych kwadratów.
2. Zaproponowano pewne kryterium doboru położenia punktów pomiarowych w celu dokładnego wyznaczenia poszukiwanych wielkości w oparciu o analizę pól wrażliwości.

3. Nawet w przypadkach nieliniowych możliwe jest oszacowanie dokładności wyznaczanych wielkości w zależności od średniego odchylenia standardowego wielkości mierzonych.
4. Przedstawiona tu metoda obliczeń pozwala na jednoznaczne i efektywne rozwiązywanie zagadnień odwrotnych nawet w przypadku stosowania złożonych modeli matematycznych przy opisie pól temperatur w badanych układach.
5. Opracowane programy dają się łatwo zastosować do rozwiązywania zagadnień odwrotnych typu współczynnikowego dla różnych złożonych układów.

## LITERATURA

- [1] S. Brandt: Metody statystyczne i obliczeniowe analizy danych. PWN, Warszawa 1976.
- [2] B.P. Demidowicz, I.A. Maron, E.Z. Szuwałowa: Metody numeryczne. PWN, Warszawa 1965.
- [3] W. Findeisen, J. Szymanowski, A. Wierzbicki: Teoria i metody obliczeniowe optymalizacji. PWN, Warszawa 1980.
- [4] T. Kreglewski, T. Rogowski, A. Ruszczyński, J. Szymanowski: Metody optymalizacji w języku FORTRAN. PWN, Warszawa 1984.
- [5] K. Kurpisz: Metody numeryczne rozwiązywania zagadnień odwrotnych. Ciepłne maszyny przepływowe. Zeszyty Naukowe Politechniki Łódzkiej z. 97, 1988.
- [6] J. Szargut: Rachunek wyrównawczy w technice cieplnej. Wyd. PAN Komisja Energetyki, Wrocław 1964.
- [7] J. Szargut, Z. Kolenda, E. Majza: Zastosowanie rachunku wyrównawczego do wyznaczania współczynników równań empirycznych. Pomiary Automatyka Kontrola nr 3 1983.
- [8] O.M.Алифанов: Обратные задачи теплообмена. Машиностроение, Moskwa 1988.
- [9] К.Г. Омельченко, М.В. Савелов, В.П. Тимошенко: К исследованию процессов теплообмена в разлагающихся пористых материалах. Теплофизика Высокых Температур. Изд. Наука, No.4 1974.

# THE LEAST SQUARE METHOD FOR THE INVERSE HEAT CONDUCTION PROBLEM IN A MULTICOMPONENT DOMAIN

## Summary

The least square method is applied to solve the inverse coefficient type heat conduction problem in a nonlinear and multicomponent region.

The condition of the identifiability based on analysis of the field of sensitivity is discussed to suggest the best location of sensors with minimization of standard errors of the coefficients.

The results of numerical modeling are given.

## ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ ОБРАТНОЙ ЗАДАЧИ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ КОЭФФИЦИЕНТНОГО ТИПА В НЕЛИНЕЙНОМ МНОГОКОМПОНЕНТНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

### Краткое содержание

В работе представлено применение метода наименьших квадратов обратной задачи теплопроводности коэффициентного типа в нелинейном многокомпонентном пространстве.

Определены условия получения однозначности решения этой задачи и способ подбора положения измерительных датчиков с использованием анализа полей чувствительности.

Математическое моделирование доказало точность вычисления среднего стандартного отклонения для определенных коэффициентов.