

Jerzy Banaszek, Karolina Błogowska

Instytut Techniki Ciepłej

NUMERYCZNA ANALIZA TERMICZNEJ KONWEKCJI NATURALNEJ I KRZEPNIĘCIA BINARNYCH ROZTWORÓW ROZCIENIONYCH

WSTĘP

Procesy zmiany fazy ciec-z-ciało stałe w układach binarnych przebiegają w warunkach złożonej wymiany masy, ciepła i składnika rozpuszczonego. Podczas krzepnięcia dwuskładnikowego roztworu rejonu fazy ciekłej i stałej rozdziela obszar dwufazowy, który w przypadku stopów metali i niektórych wodnych roztworów soli ma strukturę dendrytyczną. Zachodzące w nim zjawiska transportu mają decydujące znaczenie na przebieg solidyfikacji. By efektywnie kontrolować ten proces konieczne jest pełne poznanie lokalnych pól prędkości, temperatury i koncentracji w obszarach ciała stałego, cieczy i rejonie współistnienia obu faz.

Z jednej strony stopień komplikacji zjawisk oraz niedoskonałość i znaczne koszty metod pomiarowych, a z drugiej strony szybki rozwój wiarygodnych metod obliczeniowych uzasadniają podjęcie próby numerycznego badania tych zjawisk. Badania takie są jednak trudne ze względu na sprzężenia pól prędkości, ciśnienia, temperatury i koncentracji, złożone wielowymiarowe geometrie rzeczywistych obiektów oraz nieliniowe powiązania koncentracji, temperatury i entalpii w dodatkowych związkach konstytutywnych. Zastosowanie w takim przypadku komercyjnych, powszechnie dziś dostępnych, kodów komputerowych jest ograniczone i nieefektywne, ze względu na ich ogólność, czasochłonność i często brak możliwości poszerzenia użytych w nich modeli. Dlatego w symulacji komputerowej złożonych, wciąż nie do końca poznanych, procesów transportu w układach binarnych ze zmianą fazy zasadne jest tworzenie oprogramowania zorientowanego tematycznie, elastycznego, w którym implementacja nowych modeli nie stanowi problemu, a wyniki uzyskuje się w rozsądnym czasie. Jest to szczególnie istotne, gdy narzędzie obliczeniowe służyć ma poznaniu zjawisk przez uzupełnienie, często kosztownych i żmudnych, badań doświadczalnych.

W pracy omówiono opracowany w ITC PW program symulacji komputerowej nieustalanej termicznej konwekcji naturalnej podczas chłodzenia i krzepnięcia układów dwuskładnikowych w dwuwymiarowych obszarach geometrycznych i jego wykorzystanie w analizie procesów transportu masy, pędu i energii w rozcieńczonych wodnych roztworach soli.

Obliczeniowo-efektywny algorytm opracowanego kodu oparto na modelu pojedynczego kontinuum, bilansach wielkości polowych na przesuniętych siatkach różnicowych objętości kontrolnych oraz procedurze sekwencyjnego i iteracyjnego rozwiązania sprzężonych układów równań zachowania masy, pędu i energii (algorytm SIMPLE [1] lub SIMPLEC [2]).

Wykorzystując dalej prezentowany model symulacji komputerowej, przeanalizowano rolę anomalii gęstości wodnych roztworów soli oraz termicznych warunków brzegowych na kształtujące się wewnątrz kuwety przepływy i pola temperatury. Zbadano również wpływ geometrii obszaru na proces konwekcji. Przeprowadzono także obliczenia procesu krzepnięcia rozcieńczonych wodnych roztworów soli w warunkach transportu ciepła na drodze przewodzenia i termicznej konwekcji naturalnej.

1. OPIS MATEMATYCZNY

W zapisie równań zachowania masy, pędu, energii i składnika układu binarnego, podlegającego przemianie fazowej ciec-ciało stałe, wykorzystano model pojedynczego kontinuum (nazywany też modelem mieszaniny lub jednofazowym) Bennona i Incropera [3], w którym wszystkie zmienne polowe odnoszą się do roztworu, a równania zachowania dla mieszaniny otrzymuje się przez sumowanie odpowiednich równań opisujących prawa zachowania dla każdej z dwóch faz. Przyjęto też następujące założenia podstawowe:

- dwuwymiarowość obszaru geometrycznego, powszechnie przyjmowana na etapie tworzenia i testowania nowych modeli obliczeniowych, w celu ograniczenia kosztów tych obliczeń,
- model nieściśliwego płynu newtonowskiego; założenie to prowadzi do wymogu stałej gęstości mieszaniny, co dla dowolnych udziałów objętościowych fazy ciekłej (i w konsekwencji też stałej) implikuje równość gęstości obu faz,
- laminarny charakter ruchów konwekcyjnych,
- model medium porowatego dla obszaru dwufazowego i warunki nasycenia dla roztworu wypełniającego ten obszar (brak porów, suma udziałów fazy stałej i ciekłej równa jedności),
- zerowa prędkość fazy stałej,
- wobec niewielkiego udziału soli w roztworze pominięto konwekcję naturalną wywołaną gradientem koncentracji [4].

Wprowadzenie tych założeń do modelu Bennona i Incropera [3] prowadzi do następującego układu równań zachowania

$$\left. \begin{aligned} \frac{\partial v_i}{\partial x_i} &= 0 \\ \rho \frac{\partial v_i}{\partial t} + \rho v_j \frac{\partial v_i}{\partial x_j} &= -\frac{\partial p}{\partial x_i} + \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\mu_l \frac{\partial v_i}{\partial x_j} \right) + \rho g B_i + S_{v_i} \\ \frac{\partial(\rho H)}{\partial t} + v_j \frac{\partial(\rho H)}{\partial x_j} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\lambda \frac{\partial T}{\partial x_j} \right) \end{aligned} \right\} \quad (1a, b, c)$$

gdzie x_i , v_i , T , p , t , μ_l i g oznaczają odpowiednio: i -tą współrzędną globalnego układu kartezjańskiego i wektora prędkości ($i = 1, 2$ dla przypadku dwuwymiarowego), temperaturę, ciśnienie, czas, dynamiczną lepkość płynu i przyspieszenie ziemskie.

W powyższym wzorze i wszystkich dalszych zastosowano skrócony zapis sumacyjny (konwencję Einsteina), gdzie powtarzające się indeksy oznaczają sumowanie w całym zakresie ich zmienności.

Gęstość mieszaniny

$$\rho = r_s \rho_s + r_l \rho_l = \text{const}$$

gdzie r_α jest udziałem objętościowym jednej z faz ($\alpha = l$ lub $\alpha = s$), zaś indeksy „s” i „l” oznaczają odpowiednio fazę stałą i ciekłą, jest stała zgodnie z założeniem nieściśliwości płynu, co prowadzi do $\rho_s = \rho_l$ dla dowolnego udziału objętościowego r_l .

Udziały masowe i objętościowe obu faz spełniają relacje

$$\left. \begin{aligned} f_s + f_l &= 1 \\ r_s + r_l &= 1 \end{aligned} \right\} \quad (2)$$

oraz

$$\left. \begin{aligned} f_s &= r_s (\rho_s / \rho) \\ f_l &= r_l (\rho_l / \rho) \end{aligned} \right\} \text{co wobec } \rho_s = \rho_l = \rho \text{ daje } \left. \begin{aligned} f_s &= r_s \\ f_l &= r_l \end{aligned} \right\} \quad (3)$$

Przewodność cieplną λ w obszarze dwufazowym ciec-ciało stałe definiuje się jako średnią ważoną z wartości dla obu faz, gdzie wagami są udziały objętościowe r_α

$$\lambda = r_s \lambda_s + r_l \lambda_l \quad (4)$$

Składowe sił wyporu, będące wynikiem gradientów gęstości, przy pominięciu udziału gradientu koncentracji wobec małego udziału substancji rozpuszczonej [6], definiuje się, względem pewnego stanu odniesienia, danego przez T_{ref} , ρ_{ref}

$$\rho g B_i = \rho_{ref} g \cos \theta_i \beta_T (T - T_{ref}) \quad (5)$$

gdzie β_T jest współczynnikiem termicznej rozszerzalności objętościowej, zaś g i $\cos \theta_i$ – odpowiednio przyspieszeniem ziemskim i kosinusem kierunkowym nachylenia wektora sił wyporu. Równanie (5) jest zgodne z modelem Boussinesq dla konwekcji naturalnej, gdzie zakłada się stałą gęstość płynu ($\rho \approx \rho_{ref}$) i liniową zależność sił wyporu od temperatury.

Model Boussinesq nie może być przyjęty w obliczeniach konwekcji swobodnej wody i rozcieńczonych wodnych roztworów soli w niskich temperaturach, obejmujących punkt anomalii gęstości czynnika, gdzie następuje zmiana znaku pochodnej gęstości z temperaturą. W tym przypadku termiczne siły wyporu definiuje się jako [5]:

$$(\rho g B_i)_T = g \cos \theta_i (\rho_{ref} - \rho) \quad (6)$$

Dodatkowy człon źródłowy S_{v_i} w równaniach ruchu (1b) wynika z przyjętego modelu przepływu w obszarze dwufazowym traktowanym jako porowate medium Darcy'ego, w którym spadek ciśnienia jest proporcjonalny do prędkości płynu i jego gęstości oraz odwrotnie proporcjonalny do przepuszczalności ośrodka – fizycznej własności porowatego medium określającej jego opór przepływu

$$S_{v_j} = \mu_l v_j / K \quad (7)$$

gdzie μ_l jest dynamiczną lepkością płynu.

Współczynnik przepuszczalności ośrodka porowatego K , zgodnie z równaniem Carmana-Kozenego [3], jest następującą funkcją udziału objętościowego fazy ciekłej

$$K = K_0 r_s^3 / (1 - r_l)^2 \quad (8)$$

Dla substancji jednoskładnikowych o izotermicznej zmianie fazy oraz roztworów o nie-dendrytycznej strukturze obszaru dwufazowego współczynnik K_0 dobiera się w sposób arbitralny (najczęściej rzędu 10^6). Występująca we wzorze (7) pozorna prędkość w obszarze współistnienia cieczy i fazy stałej ma postać

$$v_i = f_s (v_s)_i + f_l (v_l)_i = f_l (v_l)_i \quad (9)$$

wobec założenia $(v_s)_i = 0$, gdzie f_α jest udziałem masowym fazy stałej lub ciekłej, związanym z odpowiednim udziałem objętościowym przez (3).

W zapisie równania zachowania energii (1c) wykorzystano pojęcie całkowitej entalpii mieszaniny obu faz. Entalpia całkowita jest ważoną sumą entalpii fazy stałej i ciekłej

$$(\rho H) = \rho (f_s H_s + f_l H_l) = \rho (r_s H_s + r_l H_l) \quad (10)$$

gdzie H jest całkowitą entalpią właściwą mieszaniny (tj. na 1 kg roztworu), H_s – entalpią właściwą fazy stałej, a H_l – całkowitą (z efektem ciepła utajonego) entalpią właściwą fazy ciekłej w temperaturze T roztworu. Ogólnie, w układach binarnych entalpia roztworu jest funkcją temperatury i koncentracji substancji rozpuszczonej. W analizowanych roztworach rozcieńczonych pominięto wpływ koncentracji, zatem $H = H(T)$. Postać zależności funkcyjnej może być wyznaczona eksperymentalnie lub na podstawie analiz teoretycznych, w których wykorzystuje się założenie lokalnej równowagi termodynamicznej na granicy fazowej.

2. MODEL NUMERYCZNY I JEGO ALGORYTM OBLICZENIOWY

Model numeryczny oparto na bilansach wielkości polowych w objętościach kontrolnych i różnicowym przybliżeniu gradientów tych wielkości. Metoda znana jest w literaturze światowej pod nazwą CVFDM (*Control Volume Finite Difference Method*) [7].

Dyskretyzacji przestrzennej dokonano przez wyróżnienie w rozważanym obszarze skończonej liczby podobszarów bilansowych. Zbiór wartości poszukiwanych wielkości polowych we wszystkich węzłach dyskretyzacji opisuje w sposób przybliżony (dyskretny) zachowanie się układu w danej chwili czasu. W celu uniknięcia nie-fizykalnych pól ciśnienia w obliczeniach numerycznych zastosowano technikę siatek przesuniętych [1], gdzie bilanse masy, energii i składowych pędu przeprowadza się na różnych, przesuniętych względem siebie siatkach objętości kontrolnych. Pokazano je na rys. 1. Różne są też położenia węzłów, w których poszukuje się składowych prędkości, ciśnienia i temperatury (rys. 1).

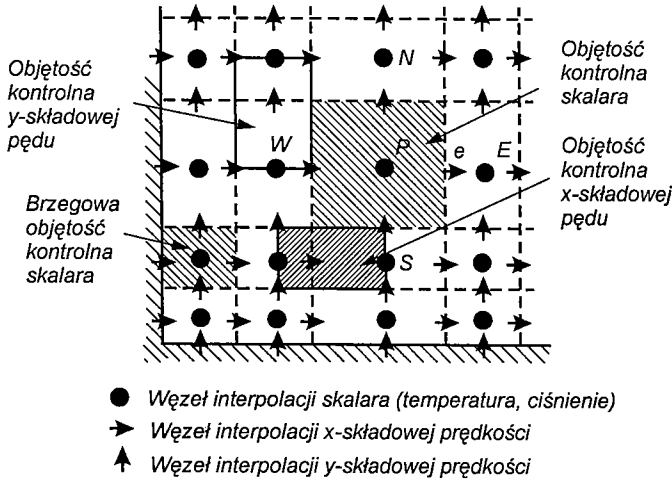
Całkowa forma każdego z równań zachowania (1) może być zapisana, w obszarze Ω_p objętości kontrolnej ograniczonej brzegiem Γ_p , w ogólnej postaci

$$\int_{\Omega_p} \frac{\partial \phi}{\partial t} d\Omega + \oint \left(v_j \phi - \chi \frac{\partial \phi}{\partial x_j} \right) n_j d\Gamma = \int_{\Omega_p} Q_v d\Omega \quad (11)$$

gdzie skalar $\phi = 1$ dla równania zachowania masy, $\phi = \rho v_i$ dla równania bilansu składowej pędu oraz $\phi = \rho H$ dla równania zachowania energii. W rozważanym modelu nie ma dyfuzji masy ($\chi = 0$ w (1a)), zaś dla równania zachowania pędu $\chi = \mu_l$ oraz χ jest przewodnością cieplną w równaniu energii. Ponadto n_j oznacza składową normalnej zewnętrznej do brzegu objętości

kontrolnej, objętościowe źródło $Q_v = 0$ w (1a) i (1c), zaś w (1b) przyjmuje postać:

$$Q_v = \int_{\Omega_p} \left(-\frac{\partial p}{\partial x_i} + \rho g B_i + S_{v_i} \right) d\Omega = -\oint_{\Gamma_p} p n_i + \int_{\Omega_p} (\rho g B_i + S_{v_i}) d\Omega \quad (12)$$



Rys. 1. Siatka przesuniętych objętości kontrolnych

Wykorzystując różnicowe przybliżenie gradientu wielkości polowej φ oraz uśrednienia objętościowe [6] członów akumulacji i źródłowego w obszarze komórki bilansowej i uśrednienie polowe strumienia normalnego na fragmencie brzegu tej komórki bilans wielkości polowej φ w typowej objętości kontrolnej (pokazanej na rys. 2) można zapisać jako

$$\begin{aligned} \Delta x_P \Delta y_P \frac{d\varphi_P}{dt} + \left\{ (v_1 \varphi)_e - \chi_e \frac{\varphi_E - \varphi_P}{l_{PE}} \right\} \Delta y_P(l) + \\ + \left\{ (v_1 \varphi)_w - \chi_w \frac{\varphi_P - \varphi_W}{L_{WP}} \right\} \Delta y_P(-l) + \left\{ (v_2 \varphi)_n - \chi_n \frac{\varphi_N - \varphi_P}{l_{PN}} \right\} \Delta x_P(l) + \\ + \left\{ (v_2 \varphi)_s - \chi_s \frac{\varphi_P - \varphi_S}{l_{SP}} \right\} \Delta x_P(-l) = \Delta x_P \Delta y_P Q_P \end{aligned} \quad (13)$$

Aby zapewnić ciągłość strumienia dyfuzyjnego na wspólnej granicy dwóch sąsiednich objętości kontrolnych, w których dyfuzyjności cieplne mogą być różne (np. różne materiały lub różne fazy), wykorzystano model średniej harmonicznej dyfuzyjności [1].

W celu uniknięcia niepożądanych efektów przestrzennych oscylacji (tak zwanych *wiggles*) i numerycznej dyfuzji, w przypadkach, gdy transport konwekcyjny dominuje nad dyfuzyjnym, szczególnej uwagi wymaga interpolacja strumienia konwekcyjnego przez granice komórki bilansowej. Musi ona uwzględniać fakt, że transport konwekcyjny zachodzi tylko w kierunku i wzdłuż wektora lokalnej prędkości. Stosuje się tu specjalne formy interpolacyjne znane pod nazwą technik **pod prąd** (*upwind techniques*). W opracowanym modelu i programie zastosowano interpolację hybrydową i wykładniczą [6] – opcjonalnie wybiera się jedną z nich.

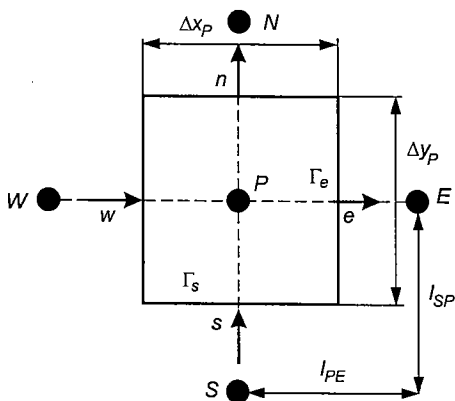
Warunki brzegowe na powierzchniach ograniczających rozważany obszar mogą być trzech typów – zadana wielkość (w ogólnym przypadku w postaci funkcji położenia i czasu) poszukiwanej funkcji polowej φ (warunek Dirichleta) lub znany strumień normalny tej wielkości w postaci zadanej stałej wartości lub funkcji położenia i czasu (warunek Neumanna) lub w postaci związku między wielkością φ i jej gradientem na powierzchni brzegowej (warunek konwekcyjny Robina). W celu realizacji tych warunków w modelu numerycznym, wyróżniono na siatce dyskretyzacji dodatkowe węzły brzegowe dla skalarów i składowych wektora prędkości, którym przypisuje się zerową objętość kontrolną (rys. 3a).

Dla równania pędu warunek (14) wyraża związek naprężeń lepkich na ścianie ze składową gradientu prędkości normalną do powierzchni brzegowej, zaś dyfuzyjność χ jest lepkością dynamiczną płynu. Powyższy związek zawiera w sobie wszystkie trzy typy warunków brzegowych i pozwala je modelować w jednolity sposób w kodzie numerycznym. Wszystkie traktowane są jako przypadki szczególne warunku trzeciego rodzaju.

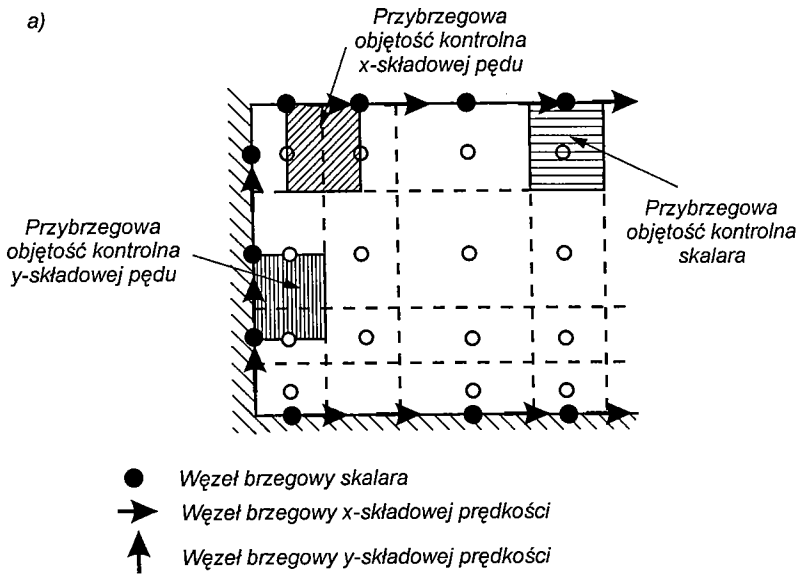
W bilansie wielkości φ (wzór (13)) w objętości kontrolnej przylegającej do fragmentu brzegu obszaru zastępuje się strumień $\partial\varphi/\partial n$ wartościami wynikającymi z zadanych warunków brzegowych, tj.:

$$-\left(\chi \frac{\partial \varphi}{\partial n}\right)_B = (\alpha_\varphi)_B (\varphi_B - \varphi_{zew}) + (q_\varphi)_B \quad (14)$$

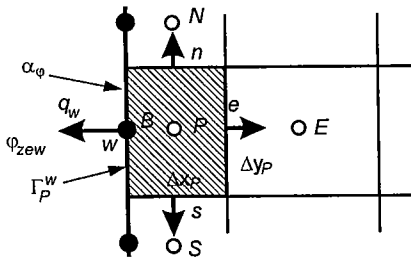
gdzie φ_{zew} , α_φ i q_φ oznaczają odpowiednio wartości φ na zewnątrz obszaru, współczynnik „konwekcyjnej” wymiany i wartość znanego strumienia na granicy B . W przypadku równania energii wielkości te oznaczają odpowiednio temperaturę ośrodka otaczającego, współczynnik przejmowania ciepła i zadany strumień ciepła, zaś χ jest przewodnością cieplną.



Rys. 2. Bilansowa objętość kontrolna



b)



$$\chi_w \left(\frac{\partial \varphi}{\partial n} \right)_w \Gamma_P^w = (\alpha_\varphi (\varphi_B - \varphi_{zew}) + q_b)_w \Delta y_P$$

Rys. 3. Warunki brzegowe: a) węzły brzegowe dla skalara i składowych prędkości, b) strumień przez zachodnią granicę przybrzegowej objętości kontrolnej skalara

Gdy $(q_\varphi)_B = 0$ i $(\alpha_\varphi)_B \rightarrow \infty$ to $\varphi_B \rightarrow \varphi_{zew}$, tzn. do zadanej wartości brzegowej funkcji φ (warunek Dirichleta). Jeśli $(\alpha_\varphi)_B = 0$, to znany jest strumień $(q_\varphi)_B$ (w szczególnym przypadku, gdy jest on równy zero sztywna ścianka ograniczająca obszar jest adiabatyczna). Wreszcie, gdy $(q_\varphi)_B = 0$ i $(\alpha_\varphi)_B \neq 0$ występuje „konwekcyjny” warunek Robina.

Równanie (13) można zapisać dla każdej objętości kontrolnej (wewnętrznej i brzegowej) dla skalara (temperatury lub entalpii) oraz każdej objętości kontrolnej dla bilansu składowych pędu (rys. 1). Otrzymuje się w ten sposób układ równań różniczkowych zwyczajnych (ze względu na czas) modelu półdyskretnego, tj. takiego w którym zastosowano jedynie dyskretyzację i interpolację po zmiennych przestrzennych. W celu scałkowania tych równań w czasie wykorzystano całkowanie niejawni, bezwarunkowo stabilny schemat Eulera [6]. Uzyskano w ten sposób układy równań algebraicznych o niesymetrycznych macierzach

(ze względu na obecność transportu konwekcyjnego) będące dyskretnym odpowiednikiem równań zachowania (1). Rozwiązano je algorytmem Thomasa z iteracyjnym obieganiem kolejno poziomych i pionowych linii siatki dyskretyzacji – metoda LTDMA [1].

Zapisanie bilansów masy pędu i energii dla wszystkich objętości kontrolnych na siatce przesuniętej prowadzi do sprzężonych dużych nieliniowych układów równań algebraicznych. Te sprzężenia wynikają z obecności sił wyporu w równaniach ruchu, temperaturowej zależności własności płynu oraz konwekcyjnego przenoszenia energii w obszarze. W modelu płynu nieściśliwego występuje też niejawne sprzężenie pól ciśnienia i prędkości. Wobec braku równania stanu, nie ma równania opisującego zmiany ciśnienia. Wielkość ta dopasowuje się niejawnie do pola prędkości w każdej chwili czasu poprzez warunek nieściśliwości. Nieliniowości w wynikowym układzie równań są wynikiem sił bezwładności działających na płyn, temperaturowych zmian własności termofizycznych cieczy i ciała stałego oraz przemiany fazowej, w której entalpia jest nieliniową funkcją temperatury.

Ta złożoność modelu numerycznego powoduje, że bezpośrednio, jednoczesne rozwiązanie całego sprzężonego układu równań ciągłości, pędu i energii jest czasochłonne i wymaga dużych pamięci operacyjnych komputera, zwłaszcza w zagadnieniach wielowymiarowych. By tego uniknąć stosuje się różne techniki rozprzęgania wspomnianego układu równań, ich linearyzacji i poprawiania rozwiązywania w kolejnych iteracjach.

W opracowanym kodzie obliczeniowym wykorzystano techniki poprawiania pól ciśnienia i prędkości w sekwencyjnych i iteracyjnych algorytmach SIMPLE [1] i SIMPLEC [2]. Zaadoptowano do nich model ośrodka porowatego [3] dla obszaru współistnienia faz ciekłej i stałej oraz entalpową metodę [7] opisu procesu przemiany fazowej ciec-z-ciało stałe.

W każdym kolejnym kroku czasowym obliczenia realizuje się je następująco:

- Dla początkowego pola ciśnienia rozwiązuje się zlinearyzowane równania pędu uzyskując wstępne pole prędkości, które na ogół nie spełnia równania ciągłości (1a).
- Wprowadza się poprawki dla węzłowych wartości ciśnienia i składowych prędkości. Wstawiając je do dyskretnych równań pędu otrzymuje się związek między poprawką prędkości w rozważanym węźle oraz poprawkami prędkości i ciśnienia w węzłach sąsiadujących. Upraszcza się ten związek przez pominięcie udziału poprawek prędkości w punktach siatki różnych od rozważanego. Zabieg ten, stosowany w algorytmie SIMPLE [104] nie wpływa na dokładność uzyskiwanego zbieżnego rozwiązania na końcu procesu iteracyjnego, wpływa jednak na szybkość zbieżności procedury kolejnych przybliżeń oraz technikę podrelaksacji kolejnych zmian pól prędkości i ciśnienia [1], konieczną dla uzyskania zbieżności. Dlatego w algorytmie SIMPLEC [2] w celu przyspieszenia zbieżności pomija się nie poprawki, lecz różnice między poprawkami prędkości w punktach sąsiadujących a po-

prawką w analizowanym węźle. Wstawiając poprawki prędkości, powiązane wyżej omówionym uproszczonym związkiem z poprawkami ciśnienia, do dyskretnej formy równania ciągłości otrzymuje się równanie Poissona dla tych ostatnich. Jego rozwiązanie, metodą gradientów sprzężonych, daje zbiór węzłowych wartości dla poprawki ciśnienia.

- Dodając je do początkowego pola ciśnień otrzymuje się poprawione ciśnienia. Korzystając ze związku między poprawkami ciśnienia i prędkości oblicza się te ostatnie i wyznacza się nowe składowe wektora prędkości, które spełniają równanie ciągłości.
- Tak wyznaczone dyskretne pole prędkości wykorzystuje się do rozwiązania równania energii zlinearyzowanego przy wykorzystaniu algorytmu zaproponowanego w [7]. Kolejne przybliżenie entalpii całkowitej H i entalpii cieczy H_l rozwija się w szereg Taylora, wykorzystując znaną zależność $H(T)$. Wstawia się je do dyskretnej formy równania energii (1c), danej równaniem typu (13), i oblicza nową iterację pola temperatury. Na jej podstawie wyznacza się nowe wartości entalpii i proces kontynuuje aż do osiągnięcia zgodności kolejnych przybliżeń pól temperatury i entalpii całkowitej z krzywą $H(T)$.
- W każdym kroku zewnętrznej iteracji kontroluje się poprawność bilansu masy. Gdy błąd jej zbilansowania, sprawdzany w każdej objętości kontrolnej, jest większy od założonej tolerancji (zwykle 10^{-6} – 10^{-8}) wówczas wraca się do pierwszego kroku i powtarza kolejne, przedstawione wyżej, etapy aż do osiągnięcia zbieżności. Gdy jest ona zadawalająca, przechodzi się do kolejnego kroku czasowego.

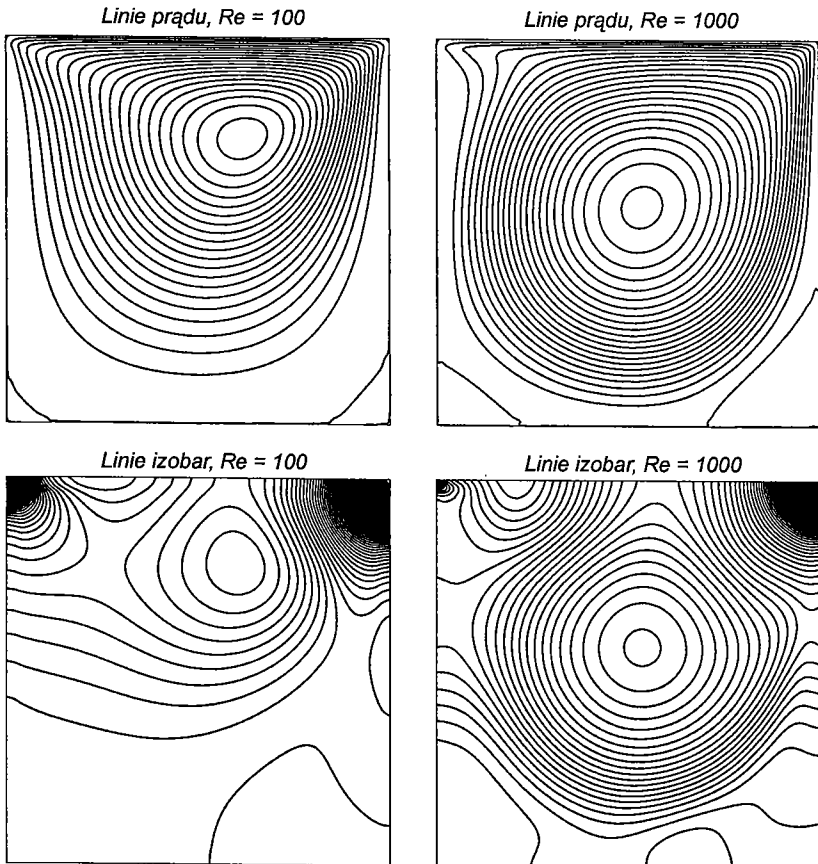
3. WERYFIKACJA DOKŁADNOŚCI MODELU NUMERYCZNEGO

W celu weryfikacji dokładności opisanego wyżej modelu numerycznego i jego algorytmu dokonano porównania uzyskanych rozwiązań z innymi, dostępnymi w literaturze, rozwiązaniami numerycznymi dla wybranych wzorcowych problemów, powszechnie uznawanych za wymagające testy dokładności modeli przybliżeń.

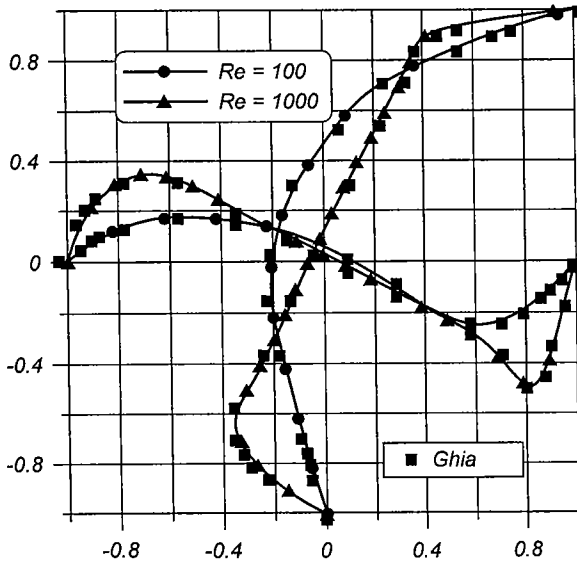
Pierwszym analizowanym problemem wzorcowym był przepływ recyrkulacyjny w kanale o przekroju kwadratowym, wypełnionym lepkiem, nieściśliwym płynem, wywołany ruchem górnej powierzchni kanału przesuwającej się poziomo ze stałą prędkością U . Obliczenia przeprowadzono na regularnej siatce 40×40 objętości kontrolnych dla dwóch różnych wartości liczby Reynoldsa, $Re = 10^2$ i $Re = 10^3$, zdefiniowanej jako $Re = U \rho L_c / \mu_l$, gdzie L_c jest wysokością kanału.

Uzyskane pola linii prądu i konturów stałego ciśnienia w stanie ustalonym przedstawiono na rys. 4. Obliczone pola prędkości i ciśnień są w bardzo dobrej zgodności z wynikami prezentowanymi w [6]. Potwierdza to przedstawione na rys. 5 porównanie ustalonych profili prędkości wzdłuż poziomej i pionowej linii centralnej przekroju kanału.

W celu weryfikacji modelu numerycznego i jego algorytmu obliczeniowego w przypadku wzajemnie powiązanych ruchu płynu i wymiany ciepła, rozwiązano klasyczny problem wzorcowy, jakim jest ustalona laminarna konwekcja Boussinesqa w kanale o kwadratowym przekroju. Równania (1) i ich odpowiedniki dyskretne zapisano w zmiennych bezwymiarowych. Ścianki poziome kufy przyjęto jako adiabatyczne, zaś powierzchnie pionowe miały stałe, ale różne temperatury. Bezwymiarowa temperatura ścianki lewej była równa jedności, a prawej zero. Uzyskane struktury przepływu (linie prądu) i pola izoterm, pokazane na rys. 6 dla trzech różnych liczb Rayleigha, Ra , są bardzo bliskie wynikom prezentowanym przez innych, np. [5].



Rys. 4. Linie prądu i linie stałego ciśnienia dla ustalonej konwekcji wymuszonej w kanale



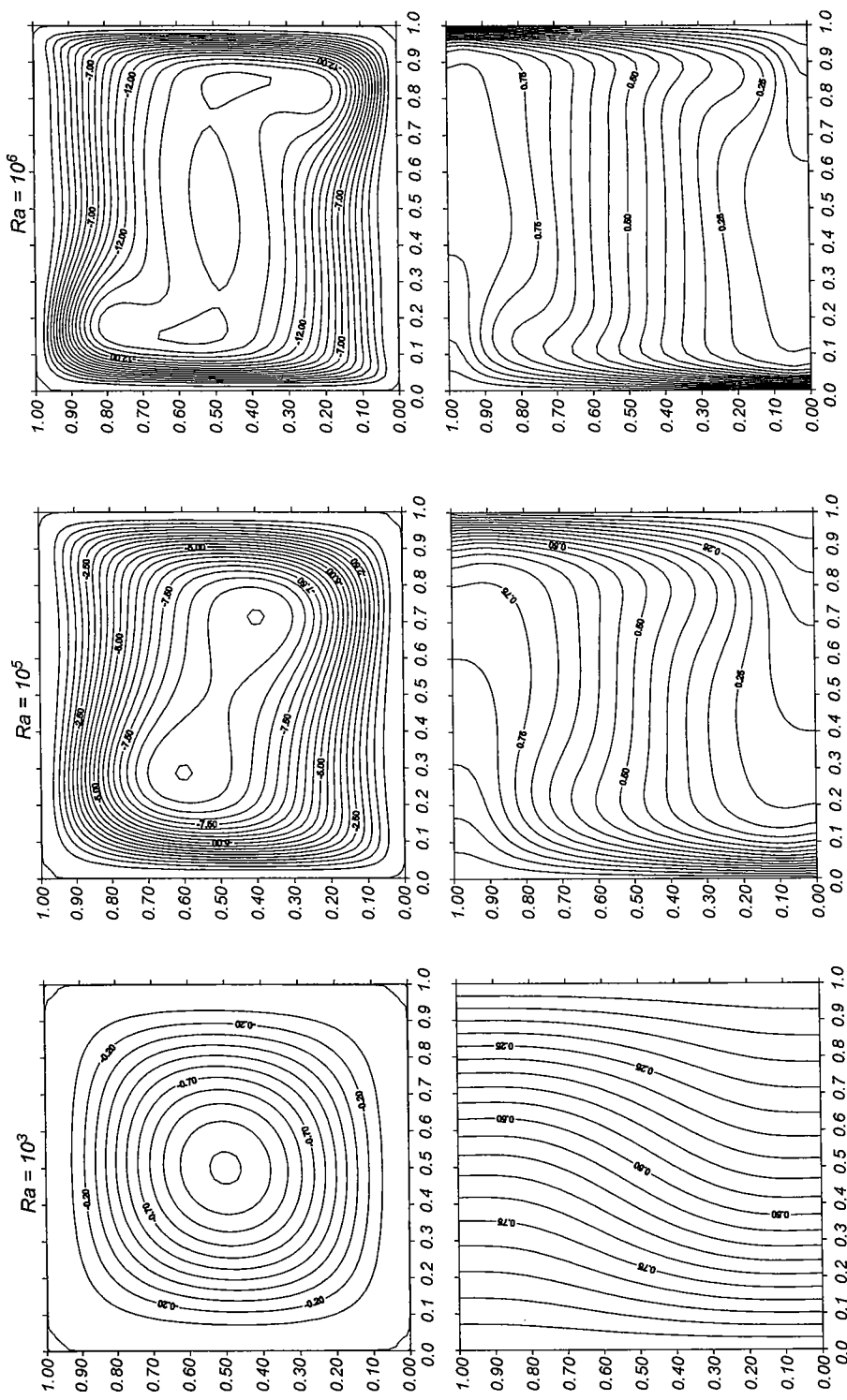
Rys. 5. Profile prędkości wzdłuż pionowej i poziomej linii centralnej przekroju kanału

Woda i analizowane w pracy rozcieńczone wodne roztwory soli wykazują anomalię gęstości w niskich temperaturach (od 0°C do 4°C). Jeśli zakres temperatury konwekcji naturalnej w tych roztworach obejmuje ten przedział, wówczas w przestrzeni zamkniętej (kanał) powstaje skomplikowana struktura przepływu, charakteryzująca się obecnością dwóch wirów cyrkulujących w przeciwnych kierunkach. Takie obrazy przepływu obserwowano w badaniach eksperymentalnych [10, 11, 12].

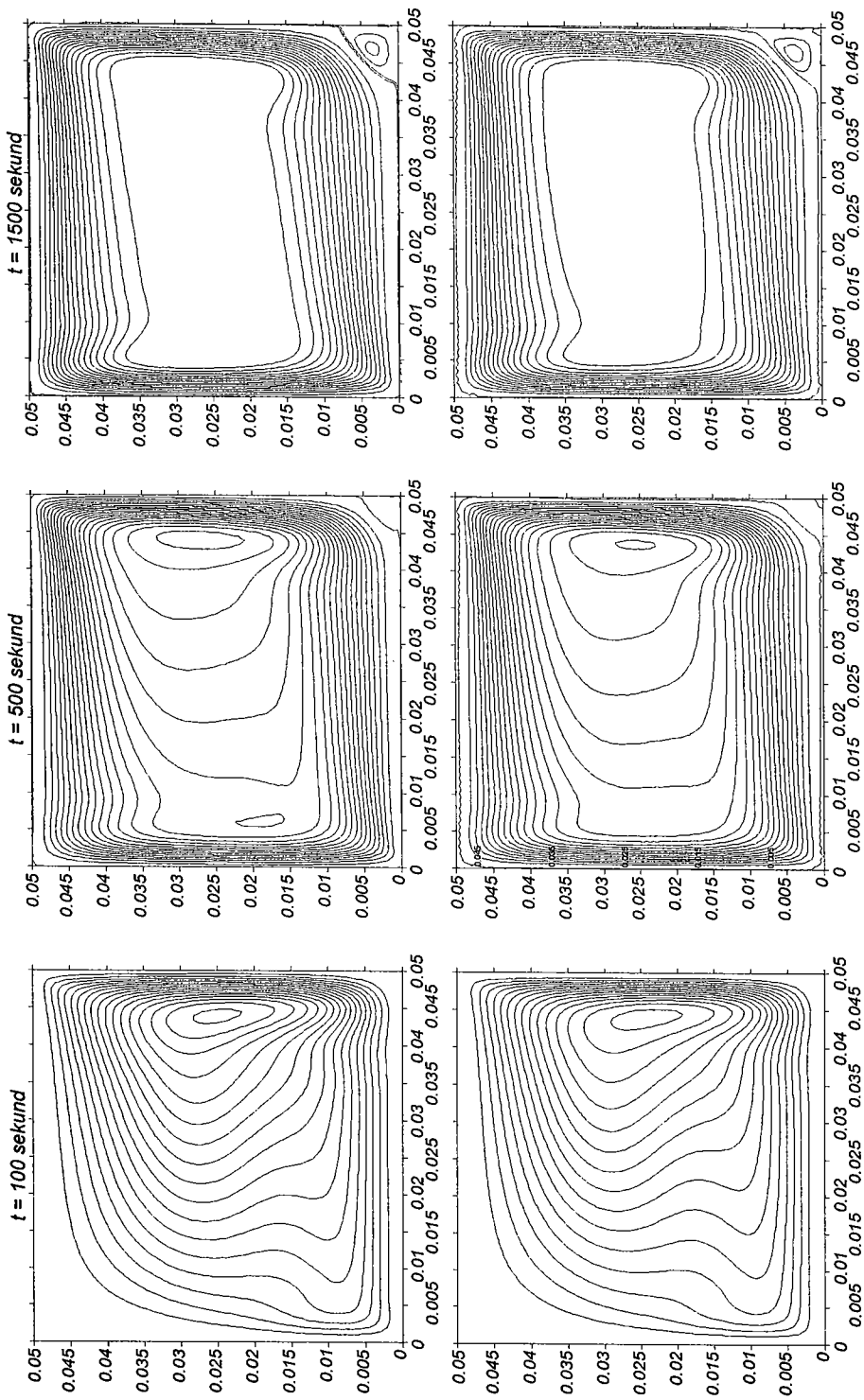
W opisie matematycznym nie jest spełnione pierwsze z założeń modelu Boussinesq – o liniowej zmianie gęstości i sił wyporu z temperaturą. W tym przypadku człon sił objętościowych w równaniu pędu przyjmuje postać (6), a problem jest wymagającym testem dla modelu numerycznego.

W celu sprawdzenia działania opracowanego kodu w tej sytuacji przeprowadzono obliczenia termicznej konwekcji naturalnej w dwóch rozcieńczonych wodnych roztworach chlorku sodu o stężeniach wyjściowych 0,6% i 1% zamkniętych w kuwecie o przekroju kwadratowym $0,05 \times 0,05$ m. Uzyskane wyniki porównano z rezultatami obliczeń otrzymanych przy użyciu programu metody elementów skończonych (MES) opisanego w pracy [5].

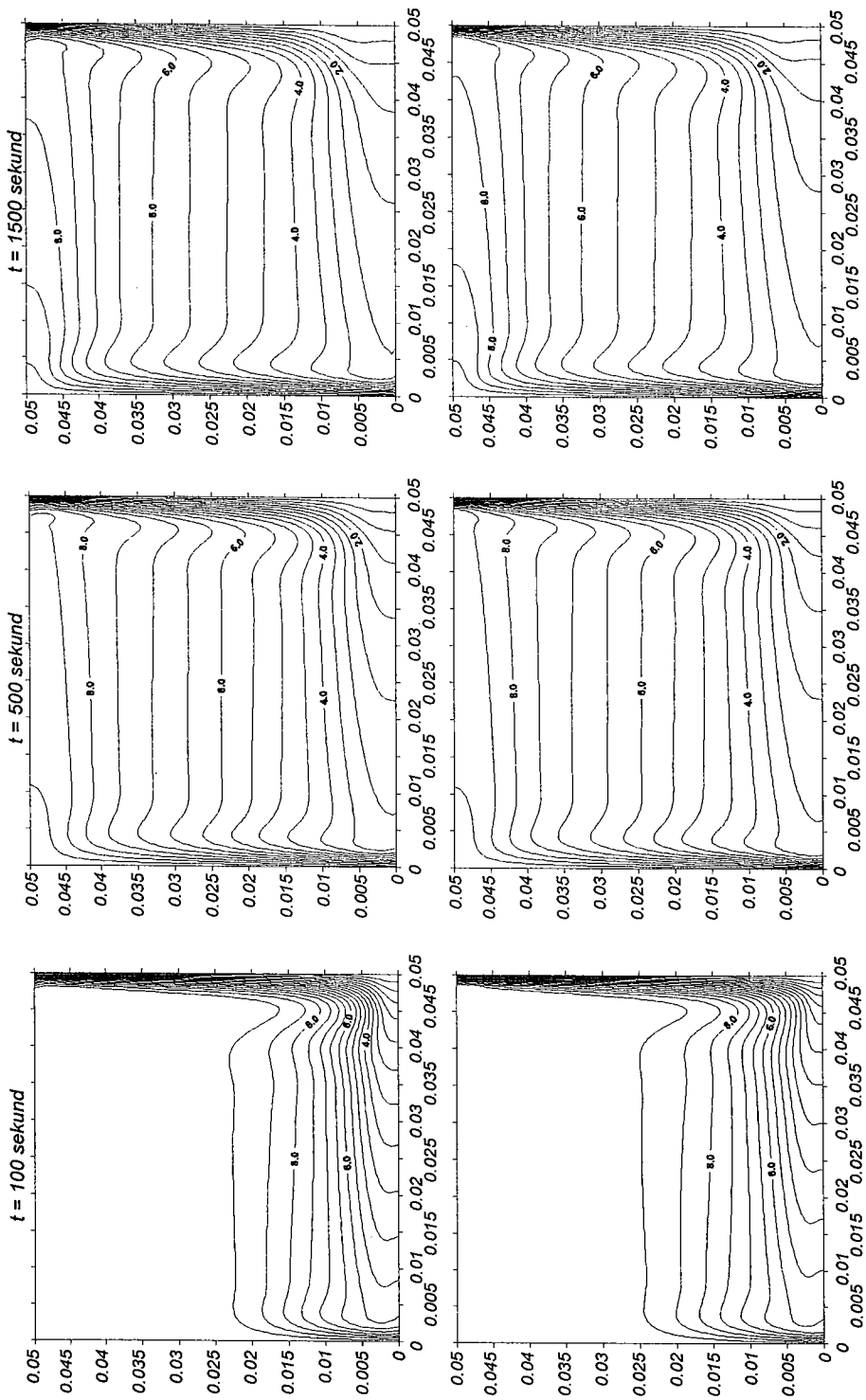
W pracy [5] wykazano, na drodze porównań z wynikami eksperymentu, że model MES jest wiarygodnym narzędziem obliczeniowym konwekcji naturalnej wody w zakresie temperatur obejmującym anomalię jej gęstości. Ponieważ analizowane w pracy rozcieńczone wodne roztwory NaCl zachowują się podobnie, rozwiązanie MES przyjęto za wzorzec do porównań. W obliczeniach kodem elementów skończonych zastosowano siatkę 25×25 elementów dwuparabolicznych. Pionowe ścianki kanału miały stałą temperaturę: „gorąca” lewa ścianka – temperaturę $9,5^{\circ}\text{C}$, a „zimna” prawa – 0°C . Początkowa temperatura



Rys. 6. Linie prądu (górny wiersz) i pola izoterm dla ustalonej konwekcji w kanale o przekroju kwadratowym



Rys. 7. Linie prądu dla konwekcji naturalnej w 1% wodnym roztworze NaCl: górny wiersz – rozwiązanie MES, dolny wiersz – rozwiązanie MRS



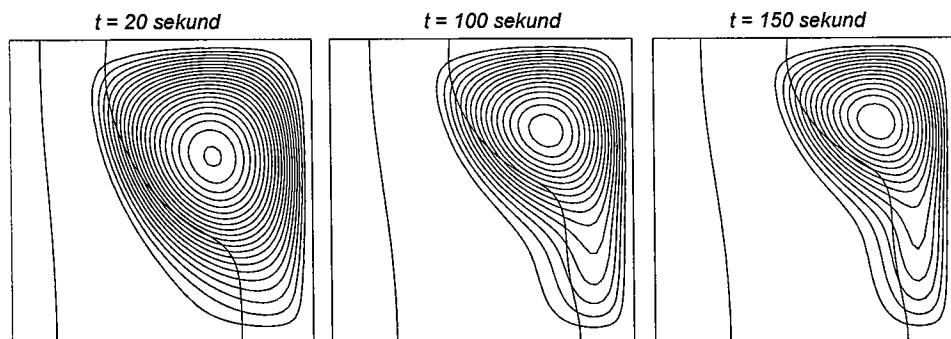
Rys. 8. Pola izoterm dla konwekcji naturalnej w 1% wodnym roztworze NaCl: górny wiersz – rozwiązanie MES, dolny wiersz – rozwiązanie MRS

w kuwecie była równa temperaturze ścianki gorącej. Wyniki MES porównano na kolejnych rysunkach z rozwiązaniem różnicowym, oznaczanym dalej MRS, dla trzech różnych czasów procesu (100, 500 i 1500 sekund) i stężenia soli 1%.

Oba rozwiązania są bardzo bliskie zarówno w przebiegach linii prądu, jak i linii stałej temperatury. Niewielkie różnice widoczne są w środkowym obszarze kuwety, gdzie występuje stagnacja przepływu dla stężenia 1% (rys. 7). W konsekwencji pojawiają się nieznaczne różnice w przebiegach izoterm i wartościach temperatury w pobliżu ścianek adiabatycznych i środkowej części kuwety (rys. 8). Rozbieżności obu rozwiązań, które wynikają z odmiennych technik interpolacyjnych, są jednak tak małe, iż można wnioskować, że opracowany model MRS jest wiarygodnym narzędziem obliczeniowym procesów konwekcji naturalnej w której siły wyporu są nieliniową funkcją temperatury.

W celu weryfikacji entalpowego opisu efektu ciepła utajonego w przemianie fazowej i modelu ośrodka porowatego dla obszaru dwufazowego ciec-z-ciało stałe, tworzącego się między zakrzepłym materiałem a cieczą przy krzepnięciu roztworu binarnego, rozwiązano przypadek solidyfikacji stopu metali Al-Cu w formie odlewniczej o kwadratowym przekroju ($0,05 \times 0,05$ m). Stop aluminium i miedzi o udziale wagowym drugiego z metali równym 4,5% miał następujące własności termofizyczne (takie same w obu fazach): ciepło właściwe $c = 1$ kJ/(kg·K), przewodność cieplną 100 W/(m·K), gęstość 2500 kg/m³, lepkość dynamiczną $2,5 \cdot 10^{-3}$ kg/(m·s), współczynnik rozszerzalności objętościowej $4 \cdot 10^{-5}$. Ponadto, temperatura eutektyki i *likwidusa* wynosiła odpowiednio 550°C i 650°C , zaś ciepło krzepnięcia 400 kJ/kg. W obliczeniach przyjęto model Boussinesq'a dla konwekcji swobodnej i liniowe zmiany entalpii całkowitej z temperaturą.

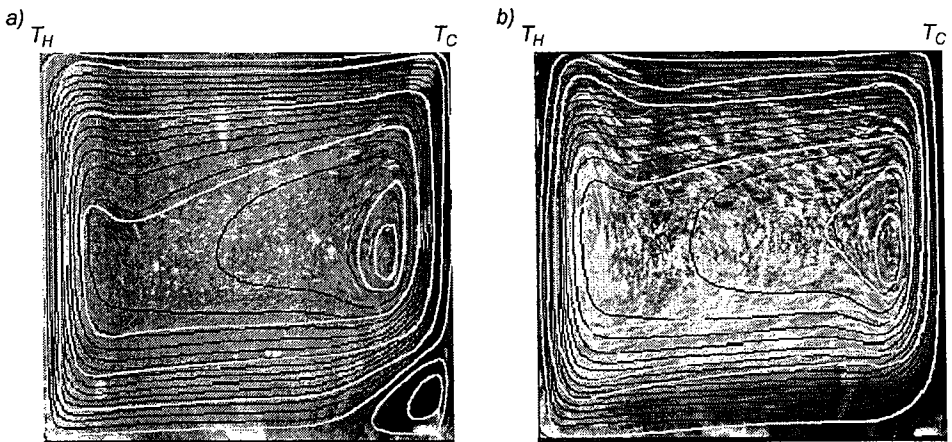
Początkowa temperatura wynosiła 700°C . Izotermiczne ścianki pionowe miały temperaturę: 500°C (lewa) i 700°C (prawa), zaś ścianki poziome były adiabatyczne. Otrzymane wyniki, w postaci linii prądu i kształtu obszaru dwufazowego dla trzech wybranych czasów zamrażania przedstawiono na rys. 9. Są one zgodne z wynikami prezentowanymi w pracy [7].



Rys. 9. Struktura przepływu w obszarze cieczy i dwufazowym oraz kształt obszaru dwufazowego (między liniami stałych temperatur solidusai i likwidusa) w procesie solidyfikacji stopu Al-4,5%Cu

4. ANALIZA POPRAWNOŚCI FIZYCZNEJ MODELU NUMERYCZNEGO

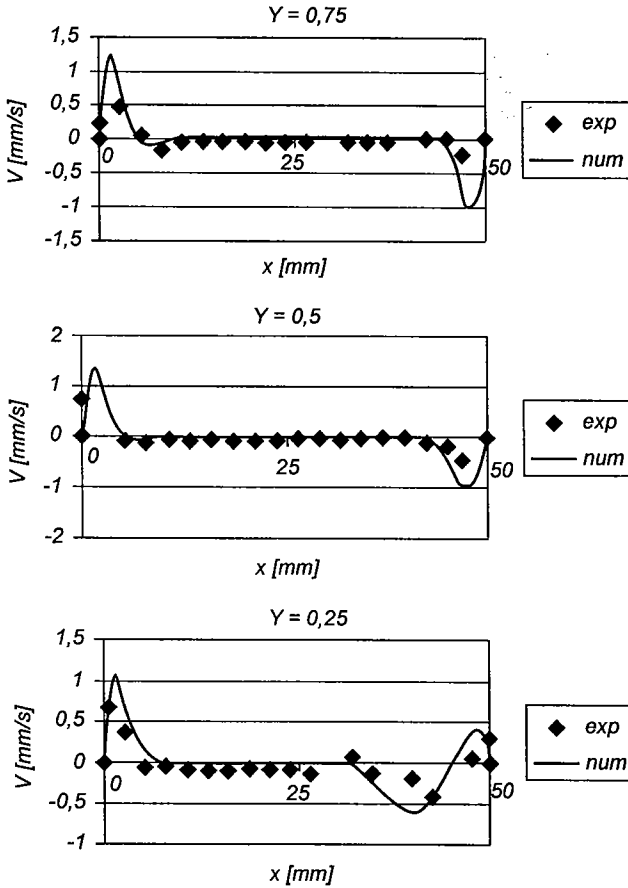
Analiza poprawności fizycznej modelu obliczeniowego ma dać odpowiedź na pytanie, jaki jest stopień jego zgodności z rzeczywistym badanym procesem. Uzyskać ją można jedynie przez porównanie obliczeń z wynikami precyzyjnych eksperymentów. W rozważanym problemie konwekcji naturalnej w wodnych roztworach soli wykorzystano do tego celu jedynie pola prędkości w rozcieńczonej mieszaninie NaCl i H₂O. Uzyskano je techniką Particle Image Velocimetry, czyli techniką anemometrii obrazu, wykorzystującą szybkie transformaty Fouriera w celu obliczenia korelacji odpowiednich fragmentów kolejnych zdjęć przepływu, robionych w znanych odstępach czasu [10]. W pracy korzystano z obrazów wykonanych w odstępnie 1 s. Nie porównywano pól temperatury ze względu na fakt, że wobec sprężenia koloru (Hue), rezystancji roztworu, koncentracji soli i temperatury, pole tej ostatniej nie ma do końca sprecyzowanej dokładności na obecnym etapie rozwoju techniki rezystancyjnego wyznaczania pola stężeń [9].



Rys. 10. Nałożenie torów cząstek uzyskanych eksperymentalnie (szare linie) i numerycznie (czarne linie); konwekcja w wodnych roztworach NaCl, $t = 500$ s: a) $s = 0,6\%$, b) $s = 1\%$;
 $T_C = 0^\circ\text{C}$, $T_H = 10^\circ\text{C}$

Wyniki porównań przedstawiono na rys. 10, w postaci nałożonych obrazów torów cząstek otrzymanych w eksperymentach i obliczonych linii prądu po 500 sekundach procesu konwekcji naturalnej dwóch różnych rozcieńczonych wodnych roztworów chlorku sodu. Widać z nich dobrą zgodność linii prądu, szczególnie w przypadku roztworu o stężeniu 0,6% NaCl w H₂O (rys. 10a). Potwierdzają to porównania pionowej składowej prędkości na trzech wybranych poziomych przekrojach środkowej pionowej płaszczyzny kuwety, tj. w $\frac{1}{4}$, $\frac{1}{2}$

i $\frac{3}{4}$ wysokości. Istotnie, przedstawione na rys. 11 wykresy, potwierdzają dobrą zgodność wyników eksperymentu i obliczeń, również dla stężenia roztworu 1% z wyjątkiem obszaru środkowego kuwety, gdzie mimo oczekiwanej stagnacji zostały zarejestrowane szczątkowe ruchy płynu.



Rys. 11. Porównanie prędkości uzyskanych eksperymentalnie i numerycznie; konwekcja w wodnym roztworze NaCl, $s = 1\%$ na różnych wysokościach bezwymiarowych Y ; $t = 1500$ s, $T_C = -2^\circ\text{C}$, $T_H = 10^\circ\text{C}$

Na rysunku 11 przedstawiono porównanie pionowej składowej prędkości dla termicznej konwekcji naturalnej w 1% roztworze wodnym NaCl, dla przypadku $T_H = 10^\circ\text{C}$ i $T_C = -2^\circ\text{C}$, gdzie nie występuje krzepnięcie.

Obliczenia zostały wykonane dla czasu 1500 s, co odpowiada stanowi ustalonemu. Również i w tym przypadku prędkości wyznaczone techniką PIV są bliskie obliczonym. Wyjątkiem jest dolne prawe naroże (bezwymiarowa wysokość $Y = 0,25$), gdzie występuje bardzo niewielki wir anomalny. W tych okolicach wyniki rozbieżności między eksperymentem i obliczeniami są nieco większe.

Zaprezentowane porównania potwierdzają, że zastosowany model symulacji komputerowej jest wiarygodnym narzędziem obliczeniowym konwekcji naturalnej rozcieńczonych wodnych roztworów soli, gdy siły wyporu wywołane lokalnym gradientem koncentracji można pominąć. Wykorzystano więc go do dalszej analizy teoretycznej, w której poszukiwano odpowiedzi na pytanie co do wpływu anomalii gęstości roztworu, jego stężenia początkowego oraz kształtów obszaru geometrycznego na pola prędkości i temperatury.

5. OBLICZENIA TERMICZNEJ KONWEKCJI NATURALNEJ W ROZCIEŃCZONYCH WODNYCH ROZTWORACH CHLORKU SODU

Analizę wpływu początkowego jednorodnego stężenia roztworu na tworzące się struktury przepływu i pola temperatur w procesie termicznej konwekcji naturalnej przeprowadzono na przykładzie rozcieńczonych roztworów wodnych NaCl.

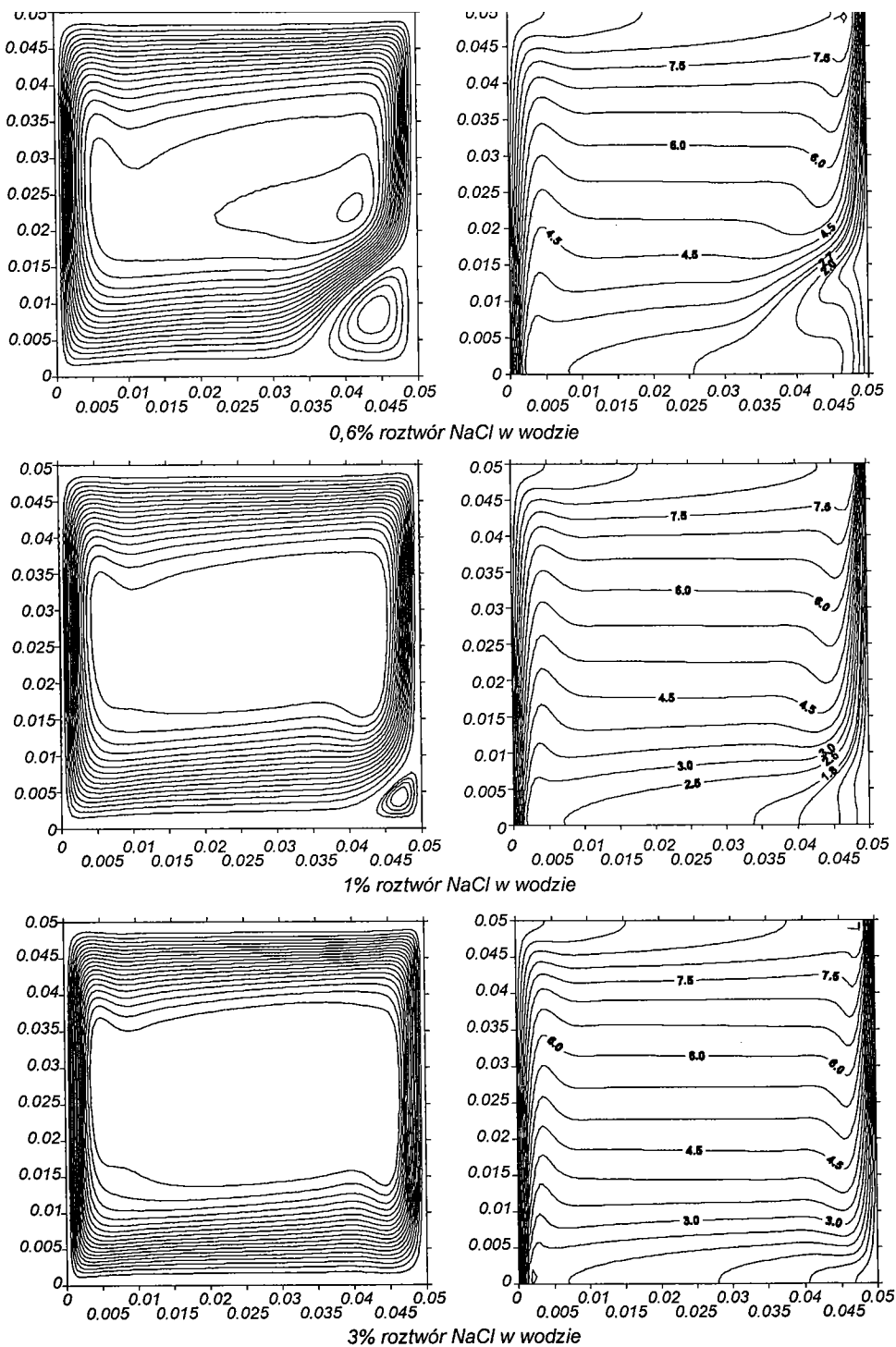
Na rysunku 12 pokazano ustalone linie prądu i pole temperatury dla trzech różnych stężeń roztworu, tj. 0,6%, 1% i 3%. W obliczeniach przyjęto kwadratowy przekrój kuwety $0,05 \times 0,05$ m, a temperatury jej pionowych ścianek lewej i prawej wynosiły odpowiednio: $T_H = 10^\circ\text{C}$ i $T_C = 0^\circ\text{C}$. We wszystkich rozważanych przypadkach poziome ścianki środkowego przekroju kuwety założono jako adiabatyczne. Własności termofizyczne analizowanych mieszanin były funkcją stężenia i temperatury. Postacie tych funkcji przyjęto zgodnie z pracą [8]

Zwiększanie udziału wagowego soli powoduje przesuwanie temperatury anomalii gęstości roztworu w kierunku coraz niższych wartości ($3,9^\circ\text{C}$ dla czystej wody, $1,8^\circ\text{C}$ dla 0,6% roztworu i poniżej zera dla 1% roztworu). Powoduje to zmniejszanie, a w końcu zanikanie wiru anomalnego tworzącego się w dolnym narożu kuwety w pobliżu zimnej ścianki. Dla roztworów o udziale wagowym soli powyżej 2% przebieg linii prądu i izoterm zbliża się do postaci klasycznej konwekcji Boussinesqa.

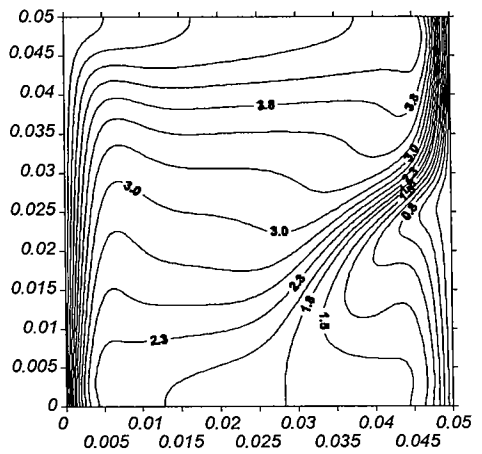
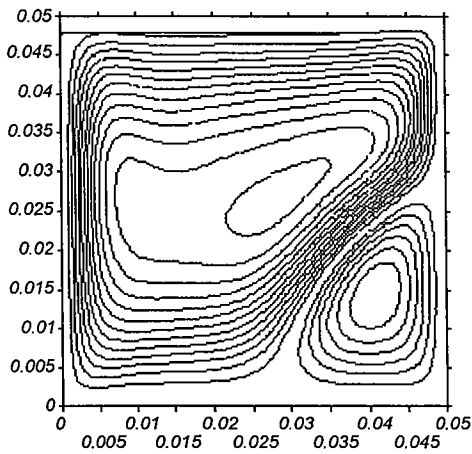
W celu oceny wpływu kształtu obszaru na tworzące się obrazy pól prędkości i temperatury przeprowadzono obliczenia konwekcji naturalnej 1% roztworu NaCl i wody w trzech różnych kuwetach o stosunku wysokości do szerokości $A = 1$, $A = 1/2$ i $A = 2$. Uzyskane wyniki przedstawiono na rys. 13.

Wymiary kuwet dobrano tak, aby utrzymać tę samą objętość, a zatem tę samą ilość chłodzonego roztworu.

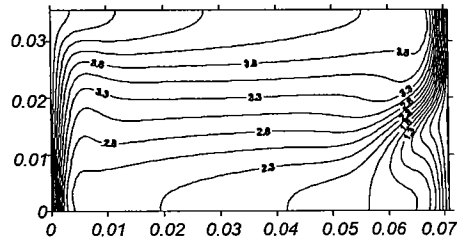
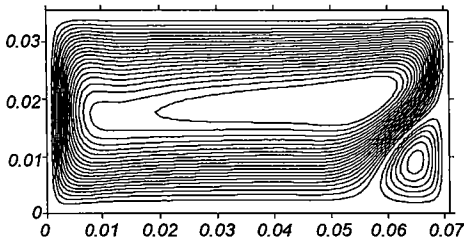
Dla przypadku $A = 2$ obserwuje się największy wpływ anomalii gęstości roztworu na obraz przepływu i pole temperatury. Obecność zimnego wiru zmienia też wielkość i kształt obszaru lodu w procesie krzepnięcia roztworu.



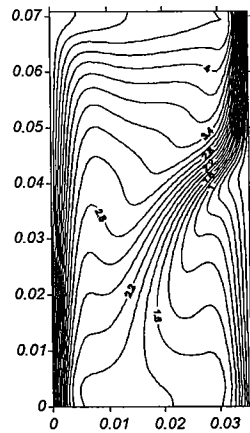
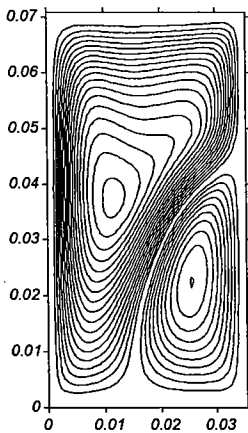
Rys. 12. Linie prądu i izotermy dla trzech różnych roztworów NaCl i H_2O w kuwecie 5×5 cm po czasie 1500 s (stan ustalony)



$A = 1$; kuweta 5×5 cm



$A = 1/2$; kuweta 7,08×3,54 cm

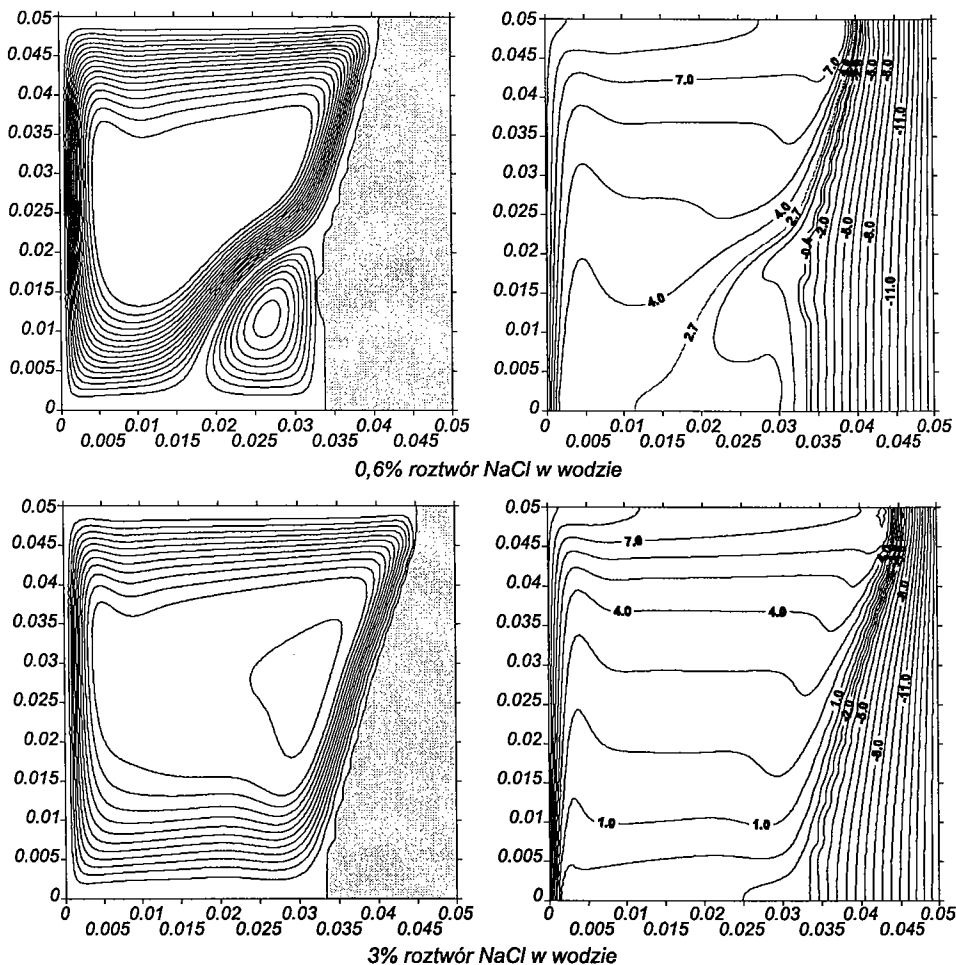


$A = 2$; kuweta 3,54×7,08 cm

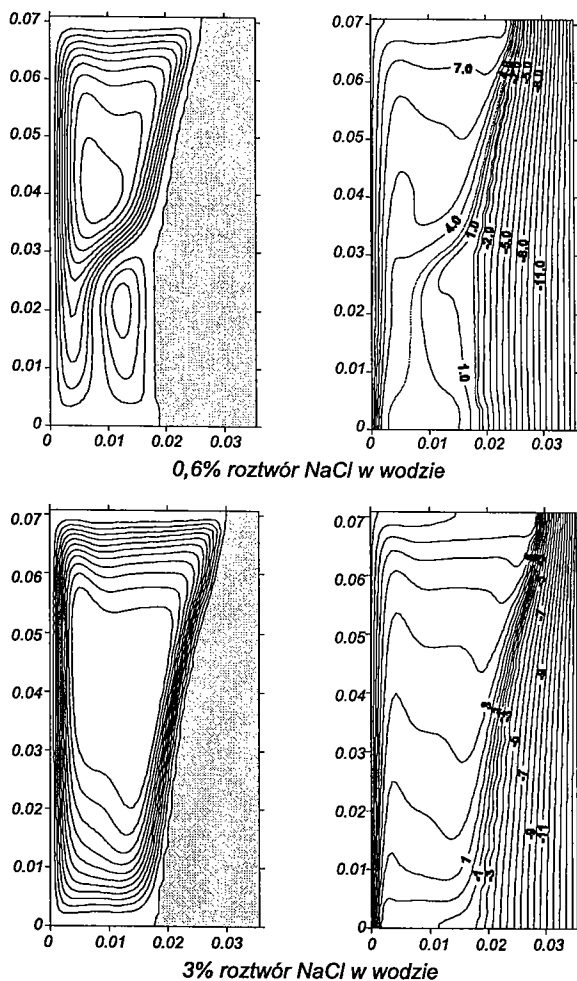
Rys. 13. Linie prądu i izotermy po 1500 s (stan ustalony) konwekcji naturalnej 1% roztworu NaCl i H₂O w kuwetach o różnych kształtach

6. OBLICZENIA PROCESU KRZEPNIĘCIA Z TERMICZNĄ KONWEKcją NATURALNĄ W ROZTWORACH WODNYCH CHLORKU SODU

Obliczenia numeryczne procesu krzepnięcia rozcieńczonych wodnych roztworów NaCl przeprowadzono w celu zbadania wpływu początkowego stężenia soli, kształtu kuwety i związanej z nimi wielkości wiru anomального na tworzące się pola temperatury i prędkości oraz na chwilowe położenie i kształt granicy rozdziału cieczy i zakrzepłej fazy. Tę granicę określa się dalej mianem *frontu*. Zastosowano tu metodę entalpową [6] opisu efektu ciepła utajonego oraz model ośrodka porowatego [3]. Wobec braku dostępnych danych, przyjęto,



Rys. 14. Linie prądu, pole izoterm oraz kształt obszaru zestalonego po 1500 s procesu krzepnięcia w kuwecie 5×5 cm



Rys. 15. Linie prądu, pole izoterm oraz kształt obszaru zestalonego po 1500 s procesu krzepnięcia w kuwecie $3,54 \times 7,08$ cm

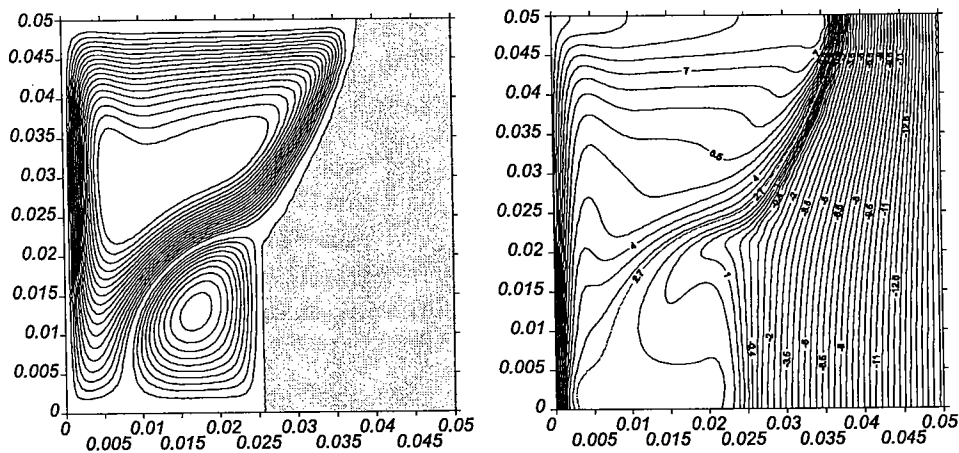
że powstająca w wyniku solidyfikacji struktura (w rzeczywistości dwufazowa) ma własności termofizyczne czystego lodu. Z tych samych powodów założono, że proces krzepnięcia jest bliski izotermicznemu i odbywa się w temperaturze *likwidusa*. Takie uproszczenia są zasadne tylko w przypadku analizy porównawczej, w której zgodnie z tym, co napisano wyżej poszukuje się jakościowej odpowiedzi na pytanie, jaki jest wpływ anomalii gęstości roztworu na przebieg procesu krzepnięcia. Pełna, rzetelna analiza ilościowa wymaga wiarygodnych danych dotyczących ciepła właściwego, przewodności cieplnej i zmian entalpii całkowitej. Wszystkie te wielkości są funkcjami temperatury i stężeń powiązanych przez wykres fazowy.

Rozważono dwa różne roztwory NaCl w wodzie o wagowych stężeniach odpowiednio 0,6% i 3%. W pierwszym przypadku temperatura anomalii gęstości

ci wynosiła $2,7^{\circ}\text{C}$, a temperatura *likwidusa* – $-0,4^{\circ}\text{C}$. W drugim roztworze nie wystąpiła anomalia gęstości, a temperatura krzepnięcia miała wartość -2°C .

Obliczenia przeprowadzono dla dwóch różnych kształtów i wymiarów kuwet: jednej o przekroju kwadratowym $0,05 \times 0,05$ m oraz drugiej prostokątnej o stosunku wysokości do szerokości $A = 2$ ($0,0354 \times 0,0708$ m). We wszystkich przypadkach ścianki poziome kuwety były adiabatyczne, a pionowe miały stałą temperaturę, odpowiednio: $T_H = 9,4^{\circ}\text{C}$ i $T_C = -16,8^{\circ}\text{C}$. Temperatura ścianek dobrana została ze względu na wykonane badania eksperymentalne. Początkowe pole temperatury było jednorodne i miało wartość T_H .

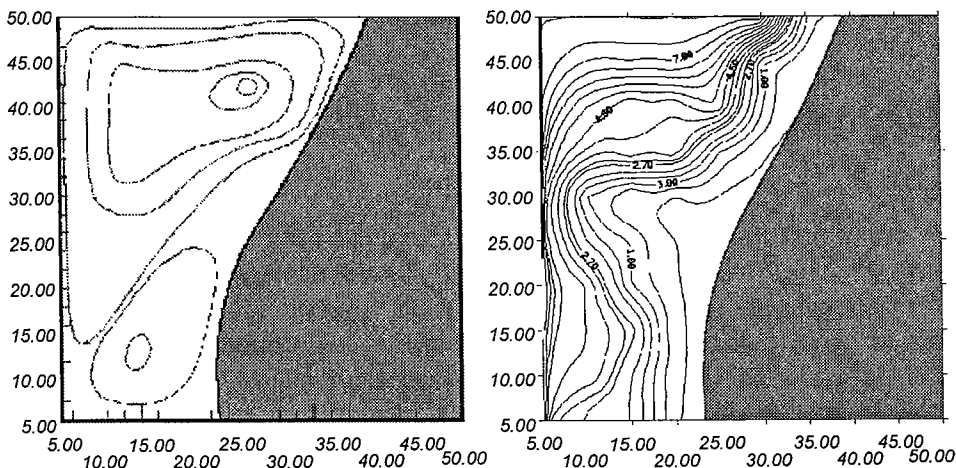
Uzyskane wyniki po 1500 sekundach procesu przedstawiono na rys. 14 i 15 w postaci obrazu przepływu wraz z kształtem zakrzepłej fazy oraz pola izoterm. Widać wyraźnie, że kształt i położenie granicy rozdziału faz zależy od efektu anomalii gęstości roztworu. Obecność dodatkowego wiru (o cyrkulacji przeciwnej do wiru głównego), który powoduje ruch zimnego roztworu w kierunku do góry kuwety, wywołuje powstawanie dodatkowej masy lodu w dolnej środkowej części przekroju kuwety. Efekt ten jest jeszcze wyraźniejszy w kuwecie prostokątnej, w której powierzchnia chłodząca jest większa, a tym samym wir anomalny jest silniejszy i większy.



Rys. 16. Ustalane rozwiązanie dla procesu krzepnięcia 0,6% roztworu $\text{NaCl} + \text{H}_2\text{O}$ z konwekcją naturalną w kuwecie 5×5 cm – linie prądu i pole temperatury $T_C = -16,8^{\circ}\text{C}$, $T_H = 9,4^{\circ}\text{C}$

Na rysunku 16 zilustrowano rozwiązanie dla 0,6% roztworu po upływie 3600 s, to jest po osiągnięciu stanu ustalonego. Porównanie położenia i kształtu frontu ze zdjęciem uzyskanym z eksperymentu [9] pokazuje stosunkowo niewielkie różnice w przebiegu tej granicy w górnej części kuwety i nieco większe w dolnej. Istotne rozbieżności widoczne są natomiast w obrazie pola przepływu. W rozwiązaniu numerycznym występują dwa wiry. Znaczne różnice są widoczne w przebiegu linii izoterm w ciekłym roztworze (rys. 16 i 17). Nie można ich

jednak porównywać, ze względu na fakt, że zastosowane w badaniach eksperymentalnych metody są w początkowym etapie rozwoju i dają bardzo przybliżone wartości temperatury.



Rys. 17. Eksperymentalne wyniki procesu krzepnięcia 0,6% roztworu NaCl + H₂O z konwekcją naturalną w kuwecie 5 × 5 cm – linie prądu i temperatury $T_C = -16,8^\circ\text{C}$, $T_H = 9,4^\circ\text{C}$

Jest kilka możliwych przyczyn potencjalnych rozbieżności między wynikami obliczeń a eksperymentem:

- W modelu numerycznym pominięto konwekcję naturalną wywołaną gradientem koncentracji soli. Jest to założenie akceptowalne, gdy rozcieńczony roztwór nie krzepnie. Potwierdza to analiza porównawcza przedstawiona w rozdziale 4 artykułu. W przypadku krzepnięcia następuje wydzielanie soli na froncie, pojawia się dyfuzja masy i sedymentacja. Pominięcie tych zjawisk, a zwłaszcza stężeniowej konwekcji, może, przy większych udziałach soli w roztworze, prowadzić do istotnych rozbieżności modelu symulacyjnego i rzeczywistości.
- Obliczenia wymagają wiarygodnych danych termofizycznych materiałów. Dotyczy to w szczególności przewodności cieplnej powstającej fazy stałej – kształtujący się front w istotny sposób zależy od wielkości strumieni ciepła odbieranych przez zakrzepłą fazę i zimną ściankę. Wobec braku takich danych w obliczeniach przyjęto stałe wartości termofizyczne czystego lodu.
- W metodzie entalpowej modelowania zjawiska przemiany fazowej konieczna jest znajomość zmian całkowitej entalpii z temperaturą i koncentracją w obszarach cieczy, ciała stałego i dwufazowym. Nie dysponowano takimi danymi. Dlatego w obliczeniach przyjęto, że proces krzepnięcia przebiegał w stałej temperaturze *likwidusa* (zależnej od początkowej jednorodnej koncentracji składnika).

- Nieco odmienny kształt frontu w pobliżu poziomych ścianek kuwety może być efektem założenia adiabatyczności tych powierzchni w modelu obliczeniowym. W pracy [7] pokazano, że nawet niewielki strumień przez ten brzeg zakrzywia front w jego pobliżu.

7. PODSUMOWANIE

W pracy przedstawiono model symulacji komputerowej oparty na różnicowej metodzie objętości kontrolnych, opracowany w celu numerycznego wyznaczenia rozkładu temperatur i linii prądu, w przypadku konwekcji naturalnej i krzepnięcia roztworu dwuskładnikowego w przestrzeni dwuwymiarowej. Sprawdzona została jego dokładność i zgodność obliczeń z istniejącymi wzorcami. Na tej podstawie potwierdzono jego wiarygodność w przypadku termicznej konwekcji naturalnej bez przemiany fazowej, gdy wobec nieprzepuszczalnych ścianek kuwety oraz pomijalnego efektu krzyżowego Soreta, nie występuje zróżnicowanie pola koncentracji. W przypadku sprzężonych procesów konwekcji naturalnej i krzepnięcia wodnych roztworów soli stwierdzono istnienie zauważalnych, choć akceptowalnych różnic, spowodowanych przez:

- brak precyzyjnych danych dotyczących własności i skomplikowanej struktury lodu (w modelu przyjętej jak dla czystego H_2O),
- pominięcie konwekcji kompozycyjnej i sedymentacji,
- brak precyzyjnych danych doświadczalnych pola temperatury w roztworach ze względu na zawężony zakres pomiarowy ciekłych kryształów i zależność koloru od lokalnych stężeń będących funkcją lokalnych temperatur,
- założenie adiabatyczności ścianek i przepływu dwuwymiarowego.

Następne wersje przedstawionego programu będą wzbogacone o modele konwekcji kompozycyjnej i przewodzenie w ściankach nieizotermicznych, a dla bardziej skomplikowanych geometrii – również o efekt trójwymiarowości przepływu. W połączeniu z wykorzystaniem bardziej precyzyjnych danych termofizycznych roztworu powinno to doprowadzić do wyników obliczeń bliższych wynikom eksperymentu.

Podziękowanie

Pracę wykonano w ramach grantu KBN nr 8T10B07220.

BIBLIOGRAFIA

- [1] Patankar S.V.: Numerical heat transfer and fluid flow. Hemisphere, Washington D.C. 1980.
- [2] Van Doormal J.P., Raithby G.D.: Enhancements of the SIMPLE method for predicting incompressible fluid flows. Numerical Heat Transfer, vol. 7, 1984.
- [3] Bennon W.D., Incropera F.P.: A continuum model for momentum, heat and species transport in binary solid-liquid phase change system – I and II. Int. J. Heat Mass Transfer, part B, 1987.
- [4] Sinha S.K., Sundarajan T.: A Variable property analysis of alloy solidification using the anisotropic porous medium approach. J. Heat Mass Transfer, vol. 35, 1992.
- [5] Banaszek J., Jaluria Y., Kowalewski T.A., Rebow M.: Semi-implicit FEM analysis of natural convection in freezing water. Numerical Heat Transfer, Taylor & Francis, 1999.
- [6] Ghia U., Ghia K., Shin C.: High-Re solutions for incompressible flow using the Navier-Stokes equations and multi-grid method. J. Comput. Physics, 48, 1982.
- [7] Swaminathan C.R., Voller V.R.: General enthalpy method for modelling solidification processes. Metallurgical Transactions B, vol. 23B, 1992.
- [8] Kukulka D.J., Gebhart B., Mollendorf J.C.: Thermodynamics and transport properties of pure and saline water. Advances in Heat Transfer, vol. 18, 1987.
- [9] Błogowska K.: Badanie wpływu konwekcji swobodnej na przebieg procesu zmiany fazy w skondensowanych układach binarnych. Rozprawa doktorska, Politechnika Warszawska, 2003.
- [10] Kowalewski T.A., Cybulski A.: Experimental and numerical investigations of natural convection in freezing water. Int. Conf. on Heat Transf. with Change of Phase, Zeszyty Naukowe Politechniki Świętokrzyskiej – Mechanika, nr 61, Kielce 1996.
- [11] Kowalewski T.A., Błogowska K., Rebow M., Banaszek J.: Badanie przepływów z konwekcją swobodną w ośrodkach jednorodnych i binarnych. Prace Naukowe Instytutu Techniki Ciepłej i Mechaniki Płynów Politechniki Wrocławskiej 53/9, tom I, Wrocław 1998.
- [12] Kowalewski T.A., Banaszek J., Rebow M., Furmański P., Wiśniewski T.S.: Study of free convection in binary systems with phase change. Heat Transfer 1998, Proceedings of 11th IHTC, Kyongju, Korea, vol. 7, Taylor & Francis Inc. 1998.