

doc. dr hab. inż. Michał Podowski

Instytut Techniki Ciepłej  
Politechniki Warszawskiej

## ANALIZA RÓWNANIA OPERATOROWEGO Z OPERATOREM RÓŻNICZKOWALNYM W PRZESTRZENI BANACHA I JEJ ZASTOSOWANIE DO BADANIA MODELU DYNAMIKI REAKTORA

Przeprowadzono analizę równania operatorowego o postaci

$$\dot{x} = z + F(x),$$

gdzie  $z$  - element przestrzeni Banacha  $X$ , natomiast  $F(x) \in X$  dla  $x \in D \subset X$ . W przypadku, gdy operator  $F$  jest  $m$ -krotnie różniczkowalny ( $m \geq 3$ ), sformułowano warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązania rozważanego równania a także podano oszacowanie normy tego rozwiązania w zależności od normy elementu  $z$ .

Wyniki analizy teoretycznej zastosowano do badania punktowego modelu kinetyki reaktora z nieliniowym sprzężeniem zwrotnym typu temperaturowego. Otrzymano kryteria stabilności asymptotycznej rozwiązania stacjonarnego (tak dla układu autonomicznego, jak i z uwzględnieniem reaktywnościowego wymuszenia zewnętrznego).

### 1. WSTĘP

Wykorzystując do badania układów dynamicznych pojęcia analizy funkcjonalnej, można szeroką klasę tych układów opisać następującym równaniem operatorowym

$$\lambda x - F(x) = z, \quad (1.1)$$

gdzie:  $x, z$  - elementy przestrzeni Banacha,

$X, F$  - operator określony na przestrzeni  $X$  i o wartościach z tej samej przestrzeni,

$\lambda$  - parametr liczbowy.

Analizując własności rozwiązań równania (1.1) wykorzystuje się najczęściej przypadek, gdy operator  $F$  przekształca kulę  $\bar{K}(0, r) \stackrel{\text{df}}{=} \{x: \|x\| \leq r\} \subset X$  w siebie oraz spełnia w tej kuli warunek Lipschitza

$$\|F(x_2) - F(x_1)\| \leq L \|x_2 - x_1\|. \quad (1.2)$$

Jeżeli  $F(0) = 0$ , to dla każdego  $\lambda$  takiego, że  $|\lambda| > L$  i dla każdego  $z$  spełniającego nierówność

$$\|z\| \leq (|\lambda| - L)r$$

równanie (1.1) posiada w kuli  $\bar{K}(0, r)$  dokładnie jedno rozwiązanie  $x^*$ . Dowód wynika bezpośrednio z twierdzenia Banacha o punkcie niezmienniczym operatora. Wprowadzając bowiem operator  $G$  zdefiniowany następująco

$$G(x) = \frac{1}{\lambda} (F(x) + z), \quad (1.3)$$

otrzymuje się na podstawie przyjętych założeń następujące nierówności:

$$\|G(x)\| \leq \frac{L}{|\lambda|} r + (1 - \frac{L}{|\lambda|})r = r \quad \text{dla } x \in \bar{K}(0, r),$$

$$\|G(x_2) - G(x_1)\| = \frac{1}{|\lambda|} \|F(x_2) - F(x_1)\| \leq \frac{L}{|\lambda|} \|x_2 - x_1\|$$

dla  $x_1, x_2 \in \bar{K}(0, r)$ ,

które dowodzą, że operator  $G$  przekształca kulę  $\bar{K}(0, r)$  w siebie oraz spełnia w niej warunek Lipschitza ze stałą  $L_1 = \frac{L}{|\lambda|} < 1$ .

Opisana powyżej metoda, jakkolwiek pozwala sformułować warunki istnienia i jednoznaczności rozwiązań równania (1.1), to jednak nie daje możliwości (z wyjątkiem przypadku, gdy

$\sup_{x \in X} \frac{\|F(x)\|}{\|x\|} < |\lambda|$ ) bezpośredniego oszacowania normy rozwiązania  $x^*$  w zależności od normy  $z$ . Oszacowanie takie można otrzymać nakładając na operator  $F$  nieco mocniejsze warunki, a mianowicie zakładając, że jest on  $m$ -krotnie ( $m \geq 3$ ) różniczkowalny w zbiorze  $D \subset X$ .

Część pierwsza niniejszej pracy poświęcona jest właśnie analizie równania (1.1) z operatorem różniczkowalnym. Otrzymane wyniki zostały następnie wykorzystane do badania stabilności nieliniowego modelu dynamiki reaktora jądrowego.

## 2. ZASADY RÓŻNICZKOWANIA W PRZESTRZENI BANACHA

Przed przystąpieniem do właściwej analizy zostaną przytoczone podstawowe definicje i twierdzenia dotyczące rachunku różniczkowego w przestrzeni Banacha (dowody twierdzeń można znaleźć np. w [1]).

### Definicja 2.1

Niech  $F$  oznacza operator określony na zbiorze  $D(F) \subset X$ , o wartościach z przestrzeni  $Y$  ( $X, Y$  - przestrzenie Banacha). Jeżeli istnieje taki operator liniowy i ograniczony  $A \in (X \rightarrow Y)$ , że

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{F(x_0+h) - F(x_0) - A(h)}{\|h\|} = 0, \quad (2.1)$$

gdzie  $x_0$  jest wewnętrznym punktem zbioru  $D(F)$ , wówczas operator  $F$  jest różniczkowalny w punkcie  $x_0$ , a operator  $A$  nosi nazwę różniczki operatora  $F$  (w dalszym ciągu różniczka będzie oznaczana symbolem  $(dF)_{x_0}$ ).

### Twierdzenie 2.1

Jeżeli operatory  $F_1$  i  $F_2$  mają wspólną dziedzinę  $D \subset X$  (a wartości ich należą do przestrzeni  $Y$ ) oraz są różniczkowalne w punkcie  $x_0$ , wówczas operator  $F = \alpha_1 F_1 + \alpha_2 F_2$  ( $\alpha_1, \alpha_2$  - dowolne liczby) jest również różniczkowalny w punkcie  $x_0$  oraz

$$(dF)_{x_0} = \alpha_1 (dF_1)_{x_0} + \alpha_2 (dF_2)_{x_0}. \quad (2.2)$$

### T w i e r d z e n i e 2.2

Jeżeli operator  $F$  o dziedzinie  $D(F) \subset X$  ma wartości zawarte w przestrzeni  $Y$ , natomiast operator  $G$  posiada dziedzinę  $D(G) \subset Y$  a wartości zawarte w przestrzeni  $Z$  ( $X, Y, Z$  - przestrzenie Banacha), przy czym  $F(x) \in D(G)$  dla każdego  $x \in D(F)$ , oraz operator  $F$  jest różniczkowalny w punkcie  $x_0$  a operator  $G$  - w punkcie  $y_0 = F(x_0)$ , wówczas operator  $H = G \cdot F$  jest również różniczkowalny w punkcie  $x_0$  i

$$(dH)_{x_0} = (dG)_{y_0} (dF)_{x_0}, \quad (2.3)$$

co oznacza, że różniczka  $(dH)_{x_0}$  jest superpozycją różniczki  $(dF)_{x_0}$  oraz  $(dG)_{F(x_0)}$ .

### T w i e r d z e n i e 2.3

Jeżeli operator  $F$  jest określony i różniczkowalny na zbiorze  $D(F) \subset X$  oraz wszystkie punkty o postaci  $x = x_0 + \theta h$  (gdzie  $\theta \in \langle 0, 1 \rangle$ ) należą do zbioru  $D(F)$ , wówczas spełniona jest nierówność

$$\|F(x_0 + h) - F(x_0)\| \leq c \|h\|, \quad (2.4)$$

gdzie

$$c = \sup_{\theta \in \langle 0, 1 \rangle} \|(dF)_{x_0 + \theta h}\|. \quad (2.5)$$

### D e f i n i c j a 2.2

Niech będzie dany operator  $F$  taki, że  $F(x) \in Y$  dla  $x \in D(F) \subset X$ . Operator ten jest z założenia różniczkowalny w pewnym otoczeniu  $P$  punktu  $x_0 \in D(F)$ , a więc dla każdego  $x \in P$  istnieje operator  $(dF)_x$ . Jak łatwo zauważyć, dla każdego ustalonego  $h_1$  wyrażenie

$$F_1(x, h_1) = (dF)_x(h_1) \quad (2.6)$$

definiuje operator określony na zbiorze  $P$ , o wartościach z przestrzeni  $Y$ . Jeżeli z kolei operator  $F_1$  jest różniczkowalny (przy ustalonym  $h_1$ ) w punkcie  $x_0$ , wówczas wyrażenie

$$(d^2F)_{x_0}(h_1, h_2) = (dF_1(x, h_1))_{x_0}(h_2) \quad (2.7)$$

nosi nazwę różniczki rzędu drugiego operatora  $F$  w punkcie  $x_0$ .

Uogólniając ostatnią definicję, można w sposób indukcyjny wprowadzić pojęcie różniczki dowolnego rzędu: jeżeli w otoczeniu punktu  $x_0$  istnieje różniczka  $(d^m F)_x$ , wówczas różniczkę  $m+1$ -rzędu można określić wzorem

$$(d^{m+1}F)_{x_0}(h_1, \dots, h_m, h_{m+1}) = (dF_m(x, h_1, \dots, h_m))_{x_0}(h_{m+1}), \quad (2.8)$$

gdzie

$$F_m(x, h_1, \dots, h_m) = (d^m F)_x(h_1, \dots, h_m).$$

Własności różniczki  $m$ -tego rzędu można ująć w postaci następujących twierdzeń:

**T w i e r d z e n i e 2.4**

Różniczka  $(d^m F)_{x_0}$  jest operatorem  $m$ -liniowym ograniczonym zmiennych  $h_1, \dots, h_m$ .

**T w i e r d z e n i e 2.5**

Jeżeli różniczka  $(d^m F)_x$  istnieje w pewnym otoczeniu punktu  $x_0$  i jest ciągła względem  $x$  w tym punkcie, wówczas  $(d^m F)_{x_0}$  jest operatorem symetrycznym zmiennych  $h_1, \dots, h_m$

$$(d^m F)_{x_0}(h_{i_1}, \dots, h_{i_m}) = (d^m F)_{x_0}(h_1, \dots, h_m) \quad (2.9)$$

dla dowolnych permutacji  $(i_1, \dots, i_m)$  ciągu  $(1, \dots, m)$ .

Dla operatorów  $m$ -krotnie różniczkowalnych (tzn. takich, dla których w każdym punkcie  $x \in D(F)$  istnieje różniczka  $(d^m F)_x$ ) można, podobnie jak w przypadku funkcji, wprowadzić wzór Taylora:

**T w i e r d z e n i e 2.6**

Niech będzie dany  $m$ -krotnie różniczkowalny operator  $F$   $(F(x) \in Y$  dla  $x \in D(F) \subset X)$ . Jeżeli różniczka  $(d^m F)_x$  jest ciągła w punkcie  $x_0 \in D(F)$  a kula  $K(x_0, r) \stackrel{\text{d.f.}}{=} \{x : \|x - x_0\| < r\}$  zawarta jest w zbiorze  $D(F)$ , wówczas dla każdego elementu  $h \in X$  takiego, że  $\|h\| < r$ , zachodzi wzór

$$F(x_0+h) = F(x_0) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n!} (d^n F)_{x_0} h^n + E_m(h), \quad (2.10)$$

przy czym

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{\|h\|^m} E_m(h) = 0, \quad (2.11)$$

gdzie

$$(d^n F)_{x_0} h^n \stackrel{df}{=} (d^n F)_{x_0} (\underbrace{h, \dots, h}_{n\text{-razy}}). \quad (2.12)$$

Jeżeli ponadto istnieje różniczka  $(m+1)$ -rzędu, wówczas resztę  $E_m(h)$  można przedstawić w pewnej określonej formie, zgodnie z następującym twierdzeniem:

**T w i e r d z e n i e 2.7**

Jeżeli określony poprzednio operator posiada różniczkę  $(d^{m+1}F)_x$  ciągłą w każdym punkcie zbioru  $D(F)$  oraz  $K(x_0, r) \subset D(F)$ , to dla każdego  $h \in X$  takiego, że  $\|h\| < r$ , zachodzi wzór

$$F(x_0+h) = F(x_0) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n!} (d^n F)_{x_0} h^n + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^m}{m!} (d^{m+1}F)_{(x_0+\theta h)} h^{m+1} d\theta. \quad (2.13)$$

Dla operatorów posiadających różniczki dowolnego rzędu można wprowadzić pojęcie szeregu Taylora oraz sformułować pewne praktyczne kryteria rozwijalności.

**T w i e r d z e n i e 2.8**

Jeżeli operator  $F$  posiada różniczki dowolnego rzędu w zbiorze  $D(F)$  oraz  $K(x_0, r) \subset D(F)$ , wówczas dla każdego  $h \in K(0, r)$ , jeśli tylko spełniony jest warunek

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|E_m(h)\| = 0, \quad (2.14)$$

prawdziwa jest równość

$$F(x_0+h) = F(x_0) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} (d^n F)_{x_0} h^n. \quad (2.15)$$

D o w ó d

Jeżeli  $S_m(h)$  oznacza  $m$ -t) sumę cząstkową szeregu po prawej stronie równości (2.15), tzn.

$$S_m(h) = F(x_0) + \sum_{n=1}^m \frac{1}{n!} (d^n F)_{x_0} h^n,$$

wówczas

$$F(x_0+h) - S_m(h) = E_m(h).$$

Ponieważ z założenia wynika, że

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \|F(x_0+h) - S_m(h)\| = 0,$$

więc ostatecznie

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m(h) = F(x_0+h),$$

czego właśnie należało dowieść.

T w i e r d z e n i e 2.9

Jeżeli różniczki  $(d^m F)_x$  są wspólnie ograniczone w kuli  $K(x_0, r)$ , tzn.  $\sup_{\|x-x_0\| < r} \|(d^m F)_x\| \leq M$  dla  $m = 1, 2, \dots$ , wówczas operator  $F$  jest rozwijalny w szereg Taylora wokół punktu  $x_0$ .

Dowód wyniku bezpośrednio z nierówności

$$\|E_m(h)\| = \left\| \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} (d^n F)_{x_0} h^n \right\| \leq M \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{1}{n!} \|h\|^n = M s_m,$$

gdzie  $s_m$  -  $m$ -ta reszta rozwinięcia  $e^{\|h\|}$ .

Z oszacowania

$$\|F(x_0+h)\| \leq \|F(x_0)\| + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n!} \|(d^n F)_{x_0}\| \|h\|^n$$

wynika ponadto, że szereg Taylora jest zbieżny bezwzględnie.

T w i e r d z e n i e 2.10

Jeżeli dziedzina  $D(F) \subset X$  operatora  $F$  zawiera kulę  $K(x_0, r)$ , natomiast operator  $F$  posiada w tej kuli różniczki dowolnego rzędu oraz

$$M_n = \frac{1}{n!} \sup_{x \in K(x_0, r)} \|(d^n F)_x\| < \infty \quad \text{dla } n=1, 2, \dots,$$

wówczas dla każdego  $h \in X$  takiego, że  $\|h\| < \min(r, R)$ , gdzie

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{M_n},$$

ma miejsce rozwinięcie (2.15), przy czym szereg jest zbieżny bezwzględnie.

Dowód jest analogiczny do dowodu kryterium Cauchy dla szeregów potęgowych.

Na zakończenie ogólnych rozważań dotyczących rachunku różniczkowego w przestrzeni Banacha można podać dwa wybrane przykłady różniczkowania:

a) operator liniowy:

$$\begin{aligned} F(x) &= Ax, \\ (dF)_x(h_1) &= Ah_1, \\ (d^2 F)_x(h_1, h_2) &= 0; \end{aligned}$$

b) operator dwuliniowy:

$$\begin{aligned} F(x) &= G_2(x, x) = G_2 x^2, \\ (dF)_x(h_1) &= G_2(h_1, x) + G_2(x, h_1), \\ (d^2 F)_x(h_1, h_2) &= G_2(h_1, h_2) + G_2(h_2, h_1), \\ (d^3 F)_x(h_1, h_2, h_3) &= 0. \end{aligned}$$

W przypadku dowolnego operatora  $m$ -liniowego  $F(x) = G_m x^m$  postępowanie jest analogiczne, przy czym dla każdego  $m=1, 2, \dots$  prawdziwe jest równość

$$(d^{m+1} F)_x(h_1, \dots, h_{m+1}) = 0.$$



### 3. ANALIZA WŁAŚNOŚCI ROZWIĄZAŃ RÓWNAŃ OPERATOROWEGO

Niech będzie dane równanie (1.1), gdzie  $z$  jest elementem przestrzeni Banacha  $X$ , natomiast  $F$  - operatorem określonym na tej przestrzeni o wartościach również do niej należących, przy czym  $F(0) = 0$ .

Niech ponadto operator  $F$  będzie  $m$ -razy ( $m \geq 3$ ) różniczkowalny w zbiorze  $D$  zawierającym kulę  $\bar{K}(0, r)$ . Uwzględniając rozwinięcie

$$F(x) = (dF)_0 x + \sum_{p=2}^{m-1} \frac{1}{p!} (d^p F)_0 x^p + \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{m-1}}{(m-1)!} (d^m F)_{\theta x}(x) d\theta, \quad (3.1)$$

prawdziwe dla dowolnego  $x \in \bar{K}(0, r)$  i zakładając, że  $\lambda$  jest wartością regularną operatora liniowego  $(dF)_0$  ( $\lambda \notin \text{sp}[(dF)_0]$ ), można równanie (1.1) przepisać w postaci

$$x = z_1 + A \sum_{p=2}^{m-1} \frac{1}{p!} (d^p F)_0 x^p + A \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{m-1}}{(m-1)!} (d^m F)_{\theta x}(x) d\theta, \quad (3.2)$$

gdzie:

$$A = [\lambda I - (dF)_0]^{-1}, \quad (3.3)$$

$$z_1 = Az. \quad (3.4)$$

Analiza własności rozwiązań równania (3.2) zostanie przeprowadzona na podstawie wymienionego poprzednio twierdzenia Banacha o punkcie niezmienniczym operatora. Niech mianowicie dany będzie operator  $\Phi_z(x)$ , określony wzorem

$$\Phi_z(x) = z_1 + A \sum_{p=2}^{m-1} \frac{1}{p!} (d^p F)_0 x^p + A \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{m-1}}{(m-1)!} (d^m F)_{\theta x}(x) d\theta. \quad (3.5)$$

Jak łatwo zauważyć, operator ten spełnia w kuli  $\bar{K}(0, r)$  następujące oszacowanie

$$\|\Phi_z(x)\| \leq \|z_1\| + \sum_{p=2}^{m-1} \frac{1}{p!} \|A\| \cdot \|(d^p F)_0\| \cdot \|x\|^p + \frac{1}{m!} \|A\|_{\|x\| \leq r} \sup_{\|x\| \leq r} \|(d^m F)_x\| \cdot \|x\|^m. \quad (3.6)$$

Wprowadzając oznaczenie

$$a_p = \begin{cases} \frac{1}{p!} \|A\| \cdot \|(d^p F)_0\| & \text{dla } p=2,3,\dots,m-2, \\ \frac{1}{p!} \|A\| \sup_{\|x\| \leq r} \|(d^p F)_x\| & \text{dla } p=m-1,m, \end{cases} \quad (3.7)$$

można nierówność (2.21) przepisać w postaci

$$\|\Phi_z(x)\| \leq \|z_1\| + \sum_{p=2}^m a_p \|x\|^p. \quad (3.8)$$

Jeżeli funkcja  $f(y)$  jest, dla  $y \in \langle 0, r \rangle$ , określona wzorem

$$f(y) = \sum_{p=2}^m a_p y^p - y + \|z_1\|, \quad (3.9)$$

wówczas (jak wykazano w [2]) istnieją takie liczby dodatnie  $\alpha$  i  $\beta$ , że dla każdego  $z_1 \in \bar{K}(0, \alpha) \subset X$  równanie

$$f(y) = 0 \quad (3.10)$$

posiada w przedziale  $\langle 0, \beta \rangle$  dokładnie jedno rozwiązanie  $y^*$  spełniające nierówność

$$y^* = \varphi(\|z_1\|) \leq \beta = \varphi(\alpha), \quad (3.11)$$

gdzie  $\varphi$  jest funkcją ciągłą i niemalejącą w przedziale  $\langle 0, \alpha \rangle$  oraz spełniającą warunek  $\varphi(0) = 0$ .

Jeśli teraz  $r \geq \beta$ , wówczas  $y^* \leq r$  dla każdego  $z_1 \in \bar{K}(0, \alpha)$ . Gdy natomiast  $r < \beta$ , wówczas jeśli  $\|z_1\| \leq$

$-\sum_{p=2}^m a_p r^p + r = \alpha_1$  ( $\alpha_1 > 0$ ), to również  $y^*(z_1) \leq r$ . Jeżeli więc  $\|z_1\| \leq \min(\alpha_1, \alpha)$ , to dla każdego  $x \in \bar{K}(0, y^*)$  spełniona jest nierówność

$$\|\Phi_z(x)\| \leq \|z_1\| + \sum_{p=2}^m a_p \|x\|^p \leq \|z_1\| + \sum_{p=2}^m a_p (y^*)^p = y^*, \quad (3.12)$$

która z kolei dowodzi, że operator  $\Phi_z$  przekształca kulę  $\bar{K}(0, y^*)$  w siebie.

Aby dowieść, że operator  $\Phi_z$  jest zwięzający w kuli  $\bar{K}(0, y^*)$ , wystarczy przeanalizować następujące oszacowanie

$$\begin{aligned}
 \|\Phi_z(x_2) - \Phi_z(x_1)\| &= \left\| A \sum_{p=2}^{m-2} \frac{1}{p!} \left[ (d^p F)_0 x_2^p - (d^p F)_0 x_1^p \right] + \right. \\
 &+ A \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{m-2}}{(m-2)!} \left[ (d^{m-1} F)_{\theta x_2} (x_2) - (d^{m-1} F)_{\theta x_1} (x_1) \right] d\theta \left\| \leq \\
 &\leq \|A\| \sum_{p=2}^{m-2} \frac{1}{p!} \left\| (d^p F)_0 x_2^p - (d^p F)_0 x_1^p \right\| + \\
 &+ \|A\| \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{m-2}}{(m-2)!} \left\| (d^{m-1} F)_{\theta x_2} (x_2) - (d^{m-1} F)_{\theta x_1} (x_1) \right\| d\theta \leq \\
 &\leq \|x_2 - x_1\| \left\| A \sum_{p=2}^{m-2} \frac{1}{(p-1)!} \left\| (d^p F)_0 \right\| (y^*)^{p-1} + \right. \\
 &+ \left. \|A\| \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{m-2}}{(m-2)!} \left\| (d^{m-1} F)_{\theta x_2} (x_2) - (d^{m-1} F)_{\theta x_1} (x_1) \right\| d\theta, \quad (3.13)
 \end{aligned}$$

przy czym dla  $m=3$  pierwszy składnik (suma) ostatniego wyrażenia jest tożsamościowo równy zero. Drugi składnik można oszacować wykorzystując nierówność

$$\begin{aligned}
 \left\| (d^{m-1} F)_{\theta x_2} (x_2) - (d^{m-1} F)_{\theta x_1} (x_1) \right\| &= \left\| (d^{m-1} F)_{\theta x_2} (x_2) - (d^{m-1} F)_{\theta x_1} (x_2) + \right. \\
 &+ \left. (d^{m-1} F)_{\theta x_1} (x_2) - (d^{m-1} F)_{\theta x_1} (x_1) \right\| \leq \left\| (d^{m-1} F)_{\theta x_2} (x_2) - (d^{m-1} F)_{\theta x_1} (x_2) \right\| + \\
 &+ \left\| (d^{m-1} F)_{\theta x_1} (x_2) - (d^{m-1} F)_{\theta x_1} (x_1) \right\|. \quad (3.14)
 \end{aligned}$$

Z faktu, że różniczka  $p$ -tego rzędu jest w każdym ustalonym punkcie operatorem  $p$ -liniowym, wynika bezpośrednio nierówność

$$\left\| (d^{m-1} F)_{\theta x_1} (x_2) - (d^{m-1} F)_{\theta x_1} (x_1) \right\| \leq \left\| (d^{m-1} F)_{\theta x_1} \right\| \|x_2 - x_1\| m (y^*)^{m-1}. \quad (3.15)$$

Uwzględniając natomiast równość

$$\begin{aligned} (d^{m-1}F)_{\theta x_2}(x_2) &= (d^{m-1}F)_{\theta x_2} \underbrace{(x_2, \dots, x_2)}_{(m-1)\text{-razy}} = (d^{m-1}F)_{\theta x_1}(x_2, \dots, x_2) + \\ &+ \int_0^1 (d^m F)_{\theta x_1 + \zeta(\theta x_2 - \theta x_1)}(\theta(x_2 - x_1), x_2, \dots, x_2) d\zeta, \end{aligned} \quad (3.16)$$

otrzymuje się oszacowanie następujące

$$\begin{aligned} \left\| (d^{m-1}F)_{\theta x_2}(x_2) - (d^{m-1}F)_{\theta x_1}(x_2) \right\| &< \int_0^1 \left\| (d^m F)_{\theta x_1 + \zeta(\theta x_2 - \theta x_1)}(\theta(x_2 - x_1), x_2, \dots, \right. \\ &\left. \dots, x_2) \right\| d\zeta \leq \sup_{\|x\| \leq y^*} \left\| (d^m F)_x \right\| \|x_2 - x_1\| \|x_2\|^{m-1}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Podstawiając (3.15) i (3.17) do (3.14), a następnie do (3.13), oraz uwzględniając podstawienie (3.7) otrzymuje się (w oparciu o lemat 2.1 z [2]) nierówność

$$\left\| \Phi_z(x_2) - \Phi_z(x_1) \right\| \leq \|x_2 - x_1\| \sum_{p=2}^m p a_p (y^*)^{p-1} < \|x_2 - x_1\|, \quad (3.18)$$

z której wynika, że operator  $\Phi_z$  jest zwężający w kuli  $\bar{K}(0, y^*)$ .

Jeżeli operator  $F$  jest rozwijalny w szereg Taylora wokół punktu  $x = 0$ , tzn., gdy można go przedstawić w postaci

$$F(x) = (dF)_0 x + \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} (d^p F)_0 x^p \quad (3.19)$$

dla  $x \in \bar{K}(0, r)$ , wówczas zagadnienie sprowadza się do rozważanego w [2]. Ostatecznie więc wyniki dotychczasowych rozważań można ująć w formę następującego twierdzenia:

### T w i e r d z e n i e 3.1

Dane jest równanie o postaci (1.1), gdzie  $z$  - element przestrzeni Banacha  $X$ ,  $F$  - operator określony na przestrzeni  $X$  o wartościach z tej samej przestrzeni, przy czym  $F(0) = 0$ ,  $\lambda$  - parametr liczbowy. Jeżeli spełnione są następujące warunki:

1) operator  $F$  jest  $m$ -krotnie ( $3 \leq m \leq \infty$ ) różniczkowalny w zbiorze  $D \subset X$ , przy czym różniczka  $(d^m F)_x$  jest ciągła w zbiorze  $D$ ;

2) kula domknięta  $\bar{K}(0, r)$  należy do zbioru  $D$  ( $r > 0$ );

3)  $\lambda \notin \text{sp}(dF)_0$ ;

wówczas istnieje taka liczba  $\Delta > 0$  oraz taka funkcja  $\varphi$ , ciągła i niemalejąca w przedziale  $\langle 0, \Delta \rangle$  oraz spełniająca warunek  $\varphi(0) = 0$ , że dla każdego  $z \in \bar{K}(0, \Delta)$  równanie (1.1) posiada w kuli  $\bar{K}(0, \varphi(\Delta))$  dokładnie jedno rozwiązanie  $x^*$ , którego norma spełnia oszacowanie

$$\|x^*\| \leq \varphi(\|z\|), \quad (3.20)$$

przy czym zarówno stałą  $\Delta$ , jak i wartości funkcji  $\varphi$  można każdorazowo obliczyć numerycznie. Rozwiązanie  $x^*$  jest granicą ciągu kolejnych przybliżeń

$$x_{n+1} = Az + A \sum_{p=2}^{m-1} \frac{1}{p!} (d^p F)_0 x_n^p + A \int_0^1 \frac{(1-\theta)^{m-1}}{(m-1)!} (d^m F)_{\theta x_n} (x_n) d\theta, \quad (3.21)$$

gdzie:

operator  $A$  określony jest wzorem (3.3),

$x_0$  jest dowolnym elementem kuli  $\bar{K}(0, \varphi(\|z\|))$ .

W przypadku, gdy operator  $F$  jest rozwijalny w szereg Taylora w kuli  $\bar{K}(0, r)$ , wówczas wzór (3.21) przybiera postać

$$x_{n+1} = Az + A \sum_{p=2}^{\infty} \frac{1}{p!} (d^p F)_0 x_n^p. \quad (3.22)$$

Wartości funkcji  $y = \varphi(\xi)$ , o której mowa w twierdzeniu 3.1, można wyznaczyć znajdując dla każdego ustalonego  $\xi$  najmniejsze nieujemne rozwiązanie równania

$$y - \sum_{p=2}^m a_p y^p = \|A\| \xi, \quad (3.23)$$

gdzie współczynniki  $a_p$  określone są wzorem (3.7).

W przypadku, gdy  $r > \varphi(\Delta) = \beta$ , wówczas współczynniki  $a_p$  dla  $p = m - 1, m$  można nieco zmodyfikować

$$a_p = \frac{1}{p!} \|A\| \sup_{\|x\| \leq \beta} \|(d^p F)_x\| \quad (p=m-1, m). \quad (3.24)$$

Jednym z założeń twierdzenia 3.1 jest co najmniej 3-krotna różniczkowalność operatora  $F$  w kuli  $\bar{K}(0, r)$ . W przypadku, gdy stopień różniczkowalności wynosi jeden lub dwa, oszacowania o postaci (3.20) otrzymać nie można, ale możliwe jest podanie warunków istnienia i jednoznaczności rozwiązania.

Niech w szczególności  $m = 1$ . Ponieważ dla dowolnych  $x_1, x_2 \in \bar{K}(0, r)$  spełniona jest równość

$$F(x_2) = F(x_1) + \int_0^1 (dF)_{x_1 + \theta(x_2 - x_1)}(x_2 - x_1) d\theta, \quad (3.25)$$

z której wynika z kolei nierówność

$$\|F(x_2) - F(x_1)\| \leq \sup_{\|x\| \leq r} \|(dF)_x\| \|x_2 - x_1\| \quad (3.26)$$

oznaczająca, że operator  $F$  spełnia w kuli  $\bar{K}(0, r)$  warunek Lipschitza ze stałą

$$L = \sup_{\|x\| \leq r} \|(dF)_x\|, \quad (3.27)$$

więc operator ten jest szczególnym przypadkiem rozpatzonego na wstępie.

Jeżeli  $m = 2$ , wówczas oczywiście rozważania powyższe pozostają w mocy, ale możliwe jest ponadto podanie innych warunków istnienia i jednoznaczności, które z reguły nie pokrywają się z otrzymanymi poprzednio. Uwzględniając bowiem równość

$$F(x_2) = F(x_1) + (dF)_{x_1}(x_2 - x_1) + \int_0^1 (1-\theta)(d^2F)_{x_1 + \theta(x_2 - x_1)}(x_2 - x_1) d\theta, \quad (3.28)$$

słuszną dla dowolnych  $x_1, x_2 \in \bar{K}(0, r)$ , jak również warunek  $F(0) = 0$ , można równanie (1.1) zapisać w postaci

$$[\lambda I - (dF)_0]x = z + F_1(x), \quad (3.29)$$

gdzie operator  $F_1$  określony jest wzorem

$$F_1(x) = \int_0^1 (1-\theta)(d^2F)_{\theta x}(x) d\theta. \quad (3.30)$$

Operator ten spełnia w kuli  $\bar{K}(0,r)$  warunek Lipschitza ze stałą

$$L_1 = r \sup_{\|x\| \leq r} \|(d^2F)_x\|. \quad (3.31)$$

Jeżeli więc  $\lambda \notin \text{sp}[(dF)_0]$ , wówczas równanie (3.29) przybiera ostatecznie postać

$$x = A F_1(x) + z_1, \quad (3.32)$$

gdzie  $A$  i  $Z_1$  określone są wzorami (3.3) i (3.4), a operator

$$F_0 = A F_1 \quad (3.33)$$

spełnia w kuli  $\bar{K}(0,r)$  warunek Lipschitza ze stałą

$$L_0 = \|A\| L_1. \quad (3.34)$$

#### 4. ANALIZA STABILNOŚCI PUNKTOWEGO MODELU REAKTORA Z NIELINIOWYM SPRZĘŻENIEM TEMPERATUROWYM

Równania kinetyki punktowego modelu reaktora z uwzględnieniem wielostrefowego sprzężenia temperaturowego można zapisać w postaci:

$$\dot{n} = \frac{\rho - \beta}{\Lambda} n + \sum_{i=1}^N \lambda_i C_i, \quad (4.1)$$

$$\dot{C}_i = \frac{\beta_i}{\Lambda} n - \lambda_i C_i \quad (i=1, \dots, N), \quad (4.2)$$

$$\dot{T}_k = \sum_{j=1}^K q_{kj} T_j + b_k n \quad (k=1, \dots, K), \quad (4.3)$$

$$\rho = \rho_0 + \rho_z(t) + \rho_f(n, T_1, \dots, T_K), \quad (4.4)$$

gdzie

$\rho_z(t)$  - reaktywność zewnętrzna.

Model opisany równaniami (4.1) ÷ (4.4) jest uogólnieniem postaci rozpatrywanej w [3], która dotyczyła przypadku liniowego sprzężenia zwrotnego.

Jeżeli  $n_0, C_{i0}, T_{k0}$  oznaczają wartości zmiennych stanu w położeniu równowagi (punkt pracy reaktora), to oczywiście

$$\rho_0 = -\rho_f(n_0, T_{10}, \dots, T_{K0}). \quad (4.5)$$

Stosując podstawienia:

$$x(t) = n(t) - n_0, \quad (4.6)$$

$$x_i(t) = C_i(t) - C_{i0}, \quad (4.7)$$

$$y_k(t) = T_k(t) - T_{k0}, \quad (4.8)$$

oraz uwzględniając związki:

$$\frac{\beta_i}{\Lambda} n_0 - \lambda_i C_{i0} = 0, \quad (4.9)$$

$$\sum_{j=1}^K q_{kj} T_{j0} + b_k n_0 = 0, \quad (4.10)$$

można równania (4.1) ÷ (4.4) sprowadzić do postaci:

$$\dot{x} = \frac{\rho}{\Lambda} (x+n_0) - \frac{\beta}{\Lambda} x + \sum_{l=1}^N \lambda_l x_l, \quad (4.11)$$

$$\dot{x}_i = \frac{\beta_i}{\Lambda} x - \lambda_i x_i, \quad (4.12)$$



$$\dot{y}_k = \sum_{j=1}^K q_{kj} y_j + b_k x, \quad (4.13)$$

$$\varrho = \varrho_z(t) + \bar{\varrho}_f(x, y_1, \dots, y_K), \quad (4.14)$$

gdzie

$$\begin{aligned} \bar{\varrho}_f(x, y_1, \dots, y_K) &= \varrho_f(n_0 + x, T_{10} + y_1, \dots, T_{K0} + y_K) - \\ &- \varrho_f(n_0, T_{10}, \dots, T_{K0}). \end{aligned} \quad (4.15)$$

Rozwiązując równania (4.12) ze względu na  $x_i$  z warunkami  $x_i(0) = x_{i0}$  i podstawiając do (4.11), otrzymuje się

$$\dot{x} = \frac{\varrho}{\beta} (x + n_0) + \sum_{l=1}^N \lambda_l e^{-\lambda_l t} x_{l0} - \frac{\beta}{\lambda} x + \sum_{l=1}^N \frac{\beta_l \lambda_l}{\lambda} \int_0^t e^{-\lambda_l(t-\tau)} x(\tau) d\tau. \quad (4.16)$$

Traktując z kolei (4.13) jako układ równań ze względu na  $y_k(t)$ , można jego rozwiązanie z warunkami  $y_k(0) = y_{k0}$  zapisać w postaci wektorowej

$$y(t) = e^{Qt} y_0 + \int_0^t e^{Q(t-\tau)} b x(\tau) d\tau, \quad (4.17)$$

gdzie:

$$\left. \begin{aligned} y &= \{y_k\}, \\ Q &= \{q_{kj}\}, \\ b &= \{b_k\}, \end{aligned} \right\} \text{ dla } k, j = 1, \dots, K,$$

przy czym  $y_0 = \{y_{k0}\}$ ,  
lub też rozpisać na składowe

$$y_k(t) = f_k(t) + \int_0^t h_k(t-\tau) x(\tau) d\tau \quad \text{dla } k=1, \dots, K. \quad (4.18)$$

Wprowadzając teraz funkcję

$$\begin{aligned} & \bar{\rho}_F(t, x(t), \int_0^t h_1(t-\tau)x(\tau) d\tau, \dots, \int_0^t h_K(t-\tau)x(\tau) d\tau) = \\ & = \bar{\rho}_F(x(t), f_1(t) + \int_0^t h_1(t-\tau)x(\tau) d\tau, \dots, f_K(t) + \int_0^t h_K(t-\tau)x(\tau) d\tau) - \\ & - \bar{\rho}_F(0, f_1(t), \dots, f_K(t)), \end{aligned} \quad (4.19)$$

można reaktywność  $\rho$  wyrazić wzorem

$$\begin{aligned} \rho = & \rho_Z(t) + \rho^*(t) + \bar{\rho}_F(t, x(t), \int_0^t h_1(t-\tau) x(\tau) d\tau, \dots, \\ & \dots, \int_0^t h_K(t-\tau) x(\tau) d\tau), \end{aligned} \quad (4.20)$$

gdzie

$$\rho^*(t) = \bar{\rho}_F(0, f_1(t), \dots, f_K(t)), \quad (4.21)$$

przy czym

$$\bar{\rho}_F(t, 0, \dots, 0) = 0 \quad (4.22)$$

dla każdego  $t \geq 0$ .

Dalsze rozważania zostaną przeprowadzone przy założeniu, że części rzeczywiste wartości własnych macierzy  $Q(t)$  są ujemne. Oznacza to, że  $\lim_{t \rightarrow \infty} f_k(t) = 0$  oraz  $\int_0^\infty |h_k(t)| dt < \infty$  dla  $k = 1, \dots, K$ .

Niech funkcja  $\bar{\rho}_F(t, u_0, u_1, \dots, u_K)$  będzie  $m$ -krotnie różniczkowalna ( $m \geq 3$ ) ze względu na  $u_0, u_1, \dots, u_K$  w całej  $(K+1)$ -wymiarowej przestrzeni euklidesowej. Z poprzednich założeń wynika, że jej pochodne cząstkowe są funkcjami ograniczonymi ze względu na  $t$  dla  $t \in (0, \infty)$ . Niech ponadto

$$a_k(t) = a_k(f(t)) \stackrel{\text{df}}{=} \left. \frac{\partial \bar{\rho}_F(t, u)}{\partial u_k} \right|_{u=0} \quad \text{dla } k=0, 1, \dots, K, \quad (4.23)$$

gdzie

$$u = \{u_0, u_1, \dots, u_K\}, \quad f(t) = \{f_1(t), \dots, f_K(t)\}.$$

Każdą z funkcji  $a_k$  można oczywiście zapisać w postaci

$$a_k(t) = -\alpha_k + \bar{a}_k(t), \quad (4.24)$$

gdzie

$$\bar{a}_k(0) = 0.$$

Uwzględniając wprowadzone definicje i podstawiając (4.20) do równania (4.16), można je przekształcić do postaci

$$\begin{aligned} \dot{x} = & \frac{\rho_z(t) + \rho^*(t)}{\Lambda} n_0 + \sum_{i=1}^N \lambda_i e^{-\lambda_i t} x_{i0} - \frac{\beta}{\Lambda} x(t) + \\ & + \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i \lambda_i}{\Lambda} \int_0^t e^{-\lambda_i(t-\tau)} x(\tau) d\tau - \frac{n_0}{\Lambda} \left[ \alpha_0 + \int_0^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau \right] + \\ & + \frac{\rho_z(t) + \rho^*(t)}{\Lambda} x(t) + \frac{n_0}{\Lambda} \left[ \bar{a}_0(f(t)) x(t) + \sum_{k=1}^K \bar{a}_k(f(t)) \int_0^t h_k(t-\tau) x(\tau) d\tau \right] + \\ & + g(t, x(t), \int_0^t h_1(t-\tau) x(\tau) d\tau, \dots, \int_0^t h_K(t-\tau) x(\tau) d\tau), \end{aligned} \quad (4.25)$$

gdzie:

$$h(t) = \sum_{k=1}^K \alpha_k h_k(t), \quad (4.26)$$

$$\begin{aligned} g(t, u_0, u_1, \dots, u_K) = & \frac{n_0}{\Lambda} \bar{\rho}_f(t, u_0, u_1, \dots, u_K) - \sum_{k=0}^K a_k(t) u_k + \\ & + \frac{1}{\Lambda} u_0 \bar{\rho}_f(t, u_0, u_1, \dots, u_K), \end{aligned} \quad (4.27)$$

przy czym

$$g(t, 0, 0, \dots, 0) = 0, \quad (4.28)$$

oraz

$$\frac{\partial g(t, u)}{\partial u_k} \Big|_{u=0} = 0 \quad (4.29)$$

dla dowolnego  $t \geq 0$  i  $k = 0, 1, \dots, K$ .

Dalsza analiza równania (4.24) zostanie przeprowadzona w oparciu o definicje następujących przestrzeni Banacha [2]:

1) przestrzeń  $C$ , złożona z funkcji ciągłych i ograniczonych dla  $t \geq 0$  z normą

$$\|x\|_C = \sup_{t \geq 0} |x(t)|,$$

2) przestrzeń ilorazowa  $K$ , której elementami są klasy elementów przestrzeni  $C$  różniące się o funkcję zbieżną od zera. Norma w przestrzeni  $K$  jest określona wzorem

$$\|x\|_K = \lim_{T \rightarrow \infty} \sup_{t > 0} |x(t)|.$$

Ponieważ funkcja  $g(t, u_0, u_1, \dots, u_K)$  jest z założenia różniczkowalna  $m$ -razy ze względu na  $u_0, u_1, \dots, u_K$ , a wszystkie jej pochodne są funkcjami ciągłymi i ograniczonymi ze względu na  $t$ , więc można bez trudu wykazać, że operator  $F$  zdefiniowany wzorem

$$[F(x)](t) = g(t, x(t), \int_0^t h_1(t-\tau) x(\tau) d\tau, \dots, \int_0^t h_K(t-\tau) x(\tau) d\tau) \quad (4.30)$$

przekształca przestrzeń  $C$  w siebie oraz jest w niej  $m$ -krotnie różniczkowalny. Zachodzi przy tym równość

$$\left[ (d^p F)_\xi x^p \right](t) = \sum_{\sigma_0^p \sigma_1^p \dots \sigma_K^p} \frac{\partial^p g(t, u)}{\partial u_0^{\sigma_0} \partial u_1^{\sigma_1} \dots \partial u_K^{\sigma_K}} \Bigg|_{\substack{u_0 = \xi(t) \\ u_k = \int_0^t h_k(t-\tau) \xi(\tau) d\tau \\ (k=1, \dots, K)}} \quad (4.31)$$

$$x(t) \prod_{k=1}^K \int_0^t h_k(t-\tau) x(\tau) d\tau$$

dla  $p = 1, \dots, m$ . Z równości (4.28) i (4.29) wynika ponadto, że  $F(0) = 0$  i  $(dF)_0 \equiv 0$ .

Wprowadzając oznaczenia

$$z = z(t) = \frac{\rho_z(t) + \rho^*(t)}{\Lambda} n_0 + \sum_{i=1}^N \lambda_i e^{-\lambda_i t} x_{i0}, \quad (4.32)$$

$$Bx(t) = \frac{\rho_z(t) + \rho^*(t) + n_0 \bar{a}_0(t)}{\Lambda} x(t) + \sum_{k=1}^K \frac{n_0 \bar{a}_k(t)}{\Lambda} \int_0^t h_k(t-\tau) x(\tau) d\tau, \quad (4.33)$$

łatwo można zauważyć, że jeśli  $\rho_z(t)$  jest funkcją ciągłą i ograniczoną dla  $t \in (0, \infty)$ , wówczas  $z \in C$  a  $B$  jest operatorem liniowym i ograniczonym, przekształcającym przestrzeń  $C$  w siebie ( $B \in (C \rightarrow C)$ ). Norma operatora  $B$  spełnia oszacowanie

$$\|B\|_C \leq \frac{1}{\Lambda} \sup_{t > 0} [|\rho_z(t) + \rho^*(t)| + n_0 |\bar{a}_0(t)| + n_0 |\bar{a}_k(t)| \int_0^\infty |h_k(t)| dt], \quad (4.34)$$

przy czym z ciągłej zależności funkcji  $\bar{a}_k$  ( $k=0,1,\dots,K$ ) od  $y_{ok}$  ( $k=1,\dots,K$ ) wynika, że jeśli tylko wartości  $|y_{ok}|$  oraz  $\sup_{t > 0} |\rho_z(t)|$  są dostatecznie małe, wówczas normę  $\|B\|_C$  można uczynić dowolnie małą.

Ponieważ, jak wykazano w [4], jeśli tylko

$$\operatorname{ing}_{\omega \in (-\infty, \infty)} \left| \frac{\omega^2}{\Lambda} \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i}{\lambda_i^2 + \omega^2} + \frac{n_0}{\Lambda} [\alpha_0 + \operatorname{Re} H(j\omega)] \right| > 0, \quad (4.35)$$

gdzie  $H(s)$  - transformata Laplace'a funkcji  $h(t)$ , wówczas rozwiązanie równania

$$\begin{aligned} \dot{x} + \frac{\beta}{\Lambda} x - \sum_{i=1}^N \frac{\beta_i \lambda_i}{\Lambda} \int_0^t e^{-\lambda_i(t-\tau)} x(\tau) d\tau + \\ + \frac{n_0}{\Lambda} \left[ \alpha_0 + \int_0^t h(t-\tau) x(\tau) d\tau \right] = w(t) \end{aligned} \quad (4.36)$$

z warunkiem  $x(0) = x_0$  można przedstawić w postaci

$$x(t) = k(t)x_0 + \int_0^t k(t-\tau) w(\tau) d\tau, \quad (4.37)$$

gdzie  $\lim_{t \rightarrow \infty} k(t) = 0$  oraz  $\int_0^t |k(t)| dt < \infty$ , więc równanie (4.25) można przekształcić w następujące równanie operatorowe (określone w przestrzeni  $C$ )

$$x = z_1 + A_1 B x + A_1 F(x), \quad (4.38)$$

gdzie:

$$[A_1 w](t) = \int_0^t k(t-\tau) w(\tau) d\tau, \quad (4.39)$$

$$z_1(t) = [A_1 z](t) + k(t)x_0, \quad (4.40)$$

przy czym  $\|A_1\|$  ( $C \rightarrow C$ ) oraz

$$\|A_1\|_C = \int_0^\infty |k(t)| dt. \quad (4.41)$$

Jeżeli ponadto  $\|A_1 B\|_C < 1$  oraz

$$A_2 = (I - A_1 B)^{-1}, \quad (4.42)$$

wówczas  $A_2 \in (C \rightarrow C)$  i

$$\|A_2\|_C \leq \sum_{n=0}^{\infty} \|A_1 B\|_C^n, \quad (4.43)$$

a równanie (4.38) można przepisać w postaci

$$x = z_2 + AF(x), \quad (4.44)$$

gdzie:

$$z_2 = A_2 z_1, \quad (4.45)$$

$$A = A_2 A_1. \quad (4.46)$$

Ponieważ norma  $\|z_2\|_C$  zależy w sposób ciągły od wartości  $|x_0|$ ,  $|x_{0i}|$ ,  $|y_{0k}|$  i  $\sup_{t>0} |\varrho_z(t)|$ , a jeżeli  $x_0 = x_{0i} = y_{0k} = \sup_{t>0} |\varrho_z(t)| = 0$  dla  $i = 1, \dots, N$ ,  $k = 1, \dots, K$ , to  $\|z_2\|_C = 0$ , więc uwzględniając twierdzenie 3.1, otrzymuje się dowód twierdzenia następującego:

#### T w i e r d z e n i e 4.1

Jeżeli:

1) części rzeczywiste wartości własnych macierzy  $Q(t) = \{q_{kj}(t)\}$  są ujemne,

2)  $\inf_{\omega \in (-\infty, \infty)} [\alpha_0 + \operatorname{Re} H(j\omega)] > 0$ ,

3) funkcja  $\varrho_f(t, u_0, u_1, \dots, u_K)$  jest co najmniej trzykrotnie różniczkowalna ze względu na  $u_0, u_1, \dots, u_K$ , a jej pochodne są funkcjami ciągłymi i ograniczonymi ze względu na  $t$  dla  $t \in \langle 0, \infty \rangle$ ,

4)  $\varrho_z(t)$  jest funkcją ciągłą i ograniczoną dla  $t \in \langle 0, \infty \rangle$ , wówczas istnieje taka liczba  $\mu > 0$  i taka funkcja  $\varphi(\xi)$ , ciągła i niemalejąca dla  $\xi \in \langle 0, \mu \rangle$  oraz spełniająca warunek  $\varphi(0) = 0$ , że jeśli

$$\xi = \sup_{t \geq 0} |k(t)| \cdot |x_0| + \int_0^{\infty} |k(t)| dt \left\{ \frac{n_0}{\lambda} \left[ \sup_{t \geq 0} |\rho_z(t)| + \sup_{t \geq 0} |\rho^*(t)| \right] + \sum_{i=1}^N \lambda_i |x_{i0}| \right\} \leq \mu \quad (4.47)$$

wówczas

$$\sup_{t \geq 0} |x(t)| \leq \varphi(\xi). \quad (4.48)$$

Z równań (4.12) i (4.17) wynika ponadto, że wówczas:

$$\sup_{t \geq 0} |x_1(t)| \leq |x_{i0}| + \frac{\beta_i}{\lambda \lambda_i} \sup_{t \geq 0} |x(t)|, \quad (4.49)$$

$$\sup_{t \geq 0} \|y(t)\|_2 \leq \sup_{t \geq 0} \|e^{Qt}\|_2 \|y_0\|_2 + \|b\|_2 \cdot \int_0^{\infty} \|e^{Qt}\|_2 dt \sup_{t \geq 0} |x(t)|, \quad (4.50)$$

gdzie

symbol  $\| \cdot \|_2$  oznacza normę euklidesową.

Ponieważ jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 4.1, wówczas  $F$  można traktować jako operator  $m$ -krotnie różniczkowalny w przestrzeni  $K$ , natomiast  $B$  i  $A_1$  - jako operatory liniowe i ograniczone przekształcające przestrzeń  $K$  w siebie, przy czym jeżeli ponadto  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_z(t) = 0$ , wówczas również  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = 0$  ( $\|z\|_K = 0$ ) oraz  $\|B\|_K = 0$  (ponieważ  $\lim_{t \rightarrow \infty} \bar{a}_k(t) = 0$  dla  $k = 0, 1, \dots, K$ ), więc wynika stąd bezpośrednio dowód twierdzenia następującego:

#### T w i e r d z e n i e 4.2

Jeżeli spełnione są założenia 4.1 oraz  $\lim_{t \rightarrow \infty} \rho_z(t) = 0$ , wówczas dla dowolnych wartości początkowych  $x_0, x_{i0}, y_{k0}$  spełniających (4.47) również  $x(t), x_1(t)$  oraz  $y_k(t)$  są zbieżne w nieskończoności do zera.

Otrzymane dotychczas wyniki można wykorzystać do sformułowania dla rozważanego modelu reaktora warunków stabilności w sensie Lapunowa. Uwzględniając bowiem fakt, że jeśli  $\rho_z(t) \equiv 0$ , wówczas równania (4.11) ÷ (4.14) tworzą układ autonomiczny, otrzymuje się:

### Т в и е р д з е н и е 4.3

Jeżeli spełnione są założenia 1) - 3) twierdzenia 4.1, wówczas rozwiązanie stacjonarne układu (4.1) ÷ (4.4) (punkt pracy reaktora) jest stabilne asymptotycznie.

Jeżeli natomiast  $\rho_z(t) \neq 0$ , wówczas uwzględniając definicję stabilności przy wymuszeniu [3], otrzymuje się

### Т в и е р д з е н и е 4.4

Jeżeli spełnione są założenia twierdzenia 4.3, wówczas rozwiązanie stacjonarne układu (4.1) ÷ (4.4) jest stabilne asymptotycznie przy wymuszeniu  $\rho_z(t)$ .

## BIBLIOGRAFIA

- [1] K o ł o d z i e j W.: Wybrane rozdziały analizy matematycznej. PWN. Warszawa 1970.
- [2] P o d o w s k i M.: A new method of studying a certain class of systems of integral equations describing the dynamics of physical processes. Arch. Mech. 5, 1974.
- [3] P o d o w s k i M.: Analiza pewnego równania operatorowego i jej zastosowanie do badania stabilności reaktorów jądrowych. Biuletyn ITC nr 37, 1972.
- [4] P o d o w s k i M.: An analysis of a certain type of integro-differential equation describing the dynamics of nonlinear systems. Bull.Acad.Polon.Sci., Ser.Sci.Tech., 21, nr 7-8, 1973.

## АНАЛИЗ ОПЕРАТОРНОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ДИФФЕРЕНЦИ РУЕНЫМ В ПРОСТРАНСТВЕ БАНАХА И ЕГО ПРИМЕНЕНИЕ К ИССЛЕДОВАНИЯМ МОДЕЛИ ДИНАМИКИ РЕАКТОРА

### К р а т к о е с о д е р ж а н и е

Проводится анализ операторного уравнения вида

$$\lambda = z + F(x),$$

где  $z$  - элемент пространства Банаха  $X$ , а  $F[x] \in X$  для  $x \in D \subset X$ . Для случая, когда  $F$  имеет производную порядка  $m$  ( $m \geq 3$ ), формулируются условия существования и единственности решения рассматриваемого уравнения, а также дается



