BIULETYN INFORMACYJNY INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Nr 32 1971

mgr inż. Andrzej Masłowski
Instytut Techniki Cieplnej

O OPTYMALNEJ ESTYMACJI PEWNEJ KLASY PRZESTRZENNO-CZASOWYCH PROCESÓW FIZYCZNYCH

1. Wstęp

1.1. Zarys problemu estymacji funkcji stanu procesu fizycznego

1.1.0. Na przestrzeni ostatnich lat wzrosło zainteresowanie problemami analizy niestacjonarnych przestrzenno-czasowych procesów fizycznych. To zainteresowanie spowodowane zostało rozwojem nowych kierunków technicznych zastosowań nauk podstawowych, jak np. inżynieria jądrowa czy też inżynieria kosmiczna. Ale także w uważanych dzisiaj za tradycyjne dyscyplinach, takich jak inżynieria cieplna czy chemiczna, wyniknęła konieczność rozwiązywania zadań, w których musi być uwzględniona przestrzenno-czasowa natura zjawiska fizycznego. Do klasy takich zadań można wliczyć zagadnienia związane z optymalną identyfikacją, estymacją czy sterowaniem niektórych procesów fizycznych.

1.1.1. Wyczerpujący przegląd teorii optymalnego sterowania i estymacji przestrzenno-czasowych procesów fizycznych, opisywanych modelem deterministycznym dynamiki procesu, jest zawarty w procesach monograficznych [1] i [2]. Charakterystyczną cechą omawianych tam teorii jest przeniesienie w dziedzinę zjawisk przestrzenno-czasowych koncepcji, które są użyteczne przy badaniu zjawisk zmiennych tylko w czasie. Cechę tę można zauważyć również w innych pracach [3]. Równolegle z rozwojem metod badania zjawisk zdeterminowanych opracowane były metody analizy stochastycznych procesów przestrzenno-czasowych [3], w których funkcja stanu procesu jest funkcją przypadkową, co może być powodowane zarówno statystycznym charakterem danego zjawiska fizycznego, jak i wpływem otoczenia, które w sposób przypadkowy w nie ingeruje. Wiele prac poświęcono problemowi filtracji i estymacji funkcji stanu tych procesów [4] ÷ [7]. Jak wynika z tych prac, istotnym założeniem, na ogół przyjmowanym przy analizie procesów stochastycznych, jest ograniczenie rozpatrywanych modeli tych zjawisk do grupy modeli o niezbyt skomplikowanych charakterystykach statystycznych (np. "purely random with Gaussian probability density"). Niekiedy taki prosty opis zjawisk przypadkowych jest nie do przyjęcia. Z drugiej strony, wyznaczenie niezbędnych charakterystyk statystycznych niektórych bardziej złożonych procesów przypadkowych jest niemożliwe z praktycznego, bądź teoretycznego punktu widzenia.

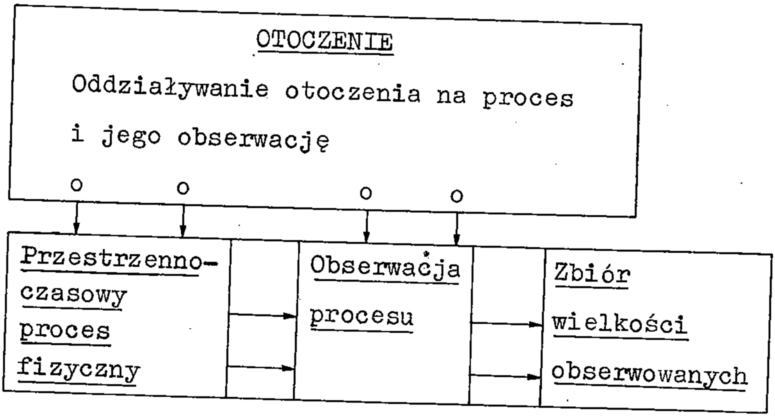
1.1.2. W niniejszym artykule przedstawiono nowe sformułowanie ogólnego problemu estymacji funkcji stanu pewnej klasy przestrzenno-czasowych procesów fizycznych, co do których można przyjąć założenie o ich determinizmie, a co za tym idzie ich dynamikę opisać modelem deterministycznym. Cechą charakterystyczną takiego postawienia problemu jest to, że nie wymaga się wstępnych założeń odnośnie statystyki charakteryzującej dane zjawisko albo wpływ jego otoczenia. Oczywiście przyjęcie założenia o determinizmie procesu nie zawsze jest słuszne. Taka aproksymacja rzeczywistości wymaga zawsze szczegółowego rozważania przy analizie określonych zjawisk fizycznych.

1.2. Ogólny opis rozpatrywanej klasy procesów fizycznych

1.2.0. Używane w niniejszej pracy nazwy takie jak zjawisko (proces) fizyczny, otoczenie (oddziaływanie otoczenia) czy funkcja stanu procesu fizycznego są intuicyjnie zrozumiałe. Pod nazwą parametr procesu rozumiana będzie pewna wielkość zmienna w czasie i przestrzeni, charakterystyczna dla danego zjawiska fizycznego, a nie definiowana jako funkcja stanu. Powyższe nazwy mają znaczenie "ogólno-dyscyplinarne" i dopiero przy rozpatrywaniu określonych zjawisk będą miały nadawaną interpretację fizyczną.

1.2.1. Ponieważ rozpatrywaną klasą procesów fizycznych będą zjawiska makroskopowe, to można przyjąć założenie, że są one deterministyczne (patrz p.1.1.2) i że spełniają klasyczne przyczynowo-skutkowe prawa fizyki. O oddziaływaniach otoczenia danego procesu fizycznego zakładamy, że są one także deterministyczne.

1.2.2. Większość zjawisk fizycznych, których analiza prowadzi do problemu estymacji ich funkcji stanu, można przedstawić na schemacie:



Jak widać dla rozpatrywanej klasy zjawisk charakterystyczne są dwa momenty. Pierwsze to oddziaływanie otoczenia na dany proces oraz na jego obserwację. Drugi to sposób uzyskiwania informacji o funkcji stanu procesu w wyniku obserwacji procesu, charakteryzowany zbiorem wielkości obserwowanych.

1.2.3. Rozpatrywaną klasę zjawisk przestrzenno-czasowych można podzielić, w zależności od właściwości obszaru przestrzennego, na dwie podstawowe grupy:

A. Procesy o niezmiennej w czasie granicy obszaru przestrzennego.

B. Procesy o zmiennej w czasie granicy obszaru przestrzennego.

Dla zjawisk grupy A ich stan w pewnym określonym czasie może być zdeterminowany zbiorem funkcji stanu definiowanych w danym obszarze przestrzennym. Dla zjawiska grupy B, przy określeniu ich stanu, należy dodatkowo zdefiniować zmiany obszaru przestrzennego w czasie.

Dalej ograniczymy się do rozważania zjawisk fizycznych należących do grupy A.

1.3. Notacja i terminologia stosowana przy matematycznym opisie modelu dynamiki i obserwacji procesu

1.3.0. W dalszym ciągu pracy rozważane będą deterministyczne modele przestrzenno-czasowych procesów fizycznych zachodzących w niezmiennym w czasie obszarze przestrzennym Ω, podzbiorze przestrzeni euklidesowej E_M. Brzegiem obszaru Ω niech będzie $\partial\Omega$, domknięciem niech będzie $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Wektorem współrzędnych przestrzennych niech będzie $X = \mathrm{col}\,[X_1, X_2, \dots X_M]$. Czasem w dowolnej chwili będzie $t \in [t_0, T]$, gdzie $[t_0, T]$ - przedział czasu obserwacji procesu, należący do osi czasu Λ.

1.3.1. Stan takiego procesu, w pewnym ustalonym czasie $t \in [t_0, T]$, może być ogólnie określony zbiorem funkcji rzeczywistych $\{u_i(t,X),\ i = 1,2, \dots N\}$ definiowanych dla wszystkich $X \in \Omega$. Zbiór wszystkich możliwych funkcji u_i zależnych od X, takich, że u_i mogą być wzięte dla dowolnego t, będzie stanowił składową przestrzeni funkcji stanu procesu $\Gamma_i(\Omega)$, a iloczyn $\Gamma(\Omega) = \Gamma_1 \times \Gamma_2 \times \dots \times \Gamma_N$ będzie stanowił przestrzeń funkcji stanu [1].

1.3.2. W rozpatrywanej klasie procesów funkcja stanu procesu $u_i(t,X)$ nie jest obserwowana bezpośrednio. Obserwowane będą pewne wielkości z_j zależne w pewien sposób od u_i.

Zbiór $\{z_j,\ j = 1,2, \dots L\}$ tych wszystkich funkcji będzie zbiorem wielkości obserwowanych i może być przedstawiony jako wynik ciągłej transformacji $\mathcal{H}$ zbioru funkcji stanu $u_i(t,X)$. Ogólnie, przekształcenie $\mathcal{H}$ może być dwojakiego rodzaju [1]:

A. Wynik transformacji zależy od zmiennych przestrzennych - czyli transformuje zbiór funkcji u_i w zbiór zależnych od zmiennych przestrzennych funkcji $z_j(t,X)$. Zatem $\mathcal{H}$ określa ciągłe przekształcenie z przestrzeni funkcji stanu w przestrzeń wielkości obserwowanych $V(\bar{\Omega}\times[t_o,T])$.

B. Wynik transformacji nie zależy od zmiennych przestrzennych - czyli transformuje zbiór funkcji stanu u_i w zbiór niezależnych od zmiennej przestrzennej funkcji $z_j(t)$. Zatem $\mathcal{H}$ określa ciągłe przekształcenie z przestrzeni funkcji stanu w skończenie wymiarową przestrzeń wielkości obserwowanych $V([t_o,T])$, która jest przestrzenią euklidesową.

Rozpatrywaną w niniejszej pracy klasę procesów fizycznych charakteryzować będzie ciągła transformacja $\mathcal{H}$ typu B.

1.3.3. Cechą charakterystyczną rozpatrywanej klasy zjawisk jest niepełna informacja odnośnie dynamiki procesu, oddziaływania otoczenia i sposobu obserwacji procesu (patrz rozdz.2).

Tę niepełną informację będą określać zbiory deterministycznych funkcji:

(A) Przy opisie dynamiki procesu $\left\{f^{\Gamma}_{i_{\bar{\Omega}}}(t,X),\ i=1,2\ldots K_1\right\}$, określony w całym $\bar{\Omega}$ lub jego podzbiorach i $[t_o,T]$, zbiór funkcji błędu opisu dynamiki procesu.

Będziemy wyróżniać następujące podzbiory funkcji błędu opisu dynamiki procesu:

1. $\left\{f^{\Gamma}_{i_{\Omega}}(t,X),\quad i = 1,2,\ldots K'_1\right\}$ określony na całym $\Omega\times[t_o,T]$ zbiór funkcji błędu lokalnego opisu dynamiki procesu.

2. $\left\{f^{\Gamma}_{i_{\partial\Omega}}(t,X),\quad i = 1,2,\ldots K''_1\right\}$ określony na całym $\partial\Omega[t_o,T]$ zbiór funkcji błędu opisu dynamiki procesu na granicy obszaru przestrzennego

3. $\left\{f^{\Gamma}_{i_{\bar{\Omega}}}(t_o,X),\quad i = 1,2,\ldots K'''_1\right\}$ określony na całym Ω i dla $t = t_o$ zbiór funkcji błędu opisu dynamiki procesu w chwili początkowej.

Zbiór wszystkich możliwych funkcji zależnych od X, takich, że funkcja błędu opisu dynamiki $f^{\Gamma}_{i_{\bar{\Omega}}}$, $i = 1,2,\ldots K_1$

może być wzięta dla dowolnego $t\in[t_o,T]$ będzie zbiorem $\mathcal{J}^r\bar{\Omega} = \mathcal{J}^r(\Omega)\cup\mathcal{J}^r(\partial\Omega)$.

(B) Przy opisie sposobu obserwacji procesu $\{f^v_{i_{\bar{\Omega}}}(t,X),\ i = 1,2,\ldots K_2\}$ określony na całym obszarze $\bar{\Omega}$ lub jego podzbiorach i całym $[t_o,T]$ <u>zbiór funkcji błędu opisu obserwacji procesu</u>.

Zbiór wszystkich możliwych funkcji zależnych od X, takich, że funkcje błędu opisu obserwacji procesu mogą być wzięte dla dowolnego $t\in[t_o,T]$ będzie zbiorem $\mathcal{J}^v(\bar{\Omega})$.

<u>1.3.4.</u> Funkcje błędu opisu dynamiki i obserwacji, dla których istnieje rozwiązanie zadania estymacji funkcji stanu procesu będą funkcjami dopuszczalnymi.

Zbiór wszystkich dopuszczalnych funkcji błędu opisu dynamiki procesu, określony dla wszystkich $X\in\bar{\Omega}$ i $t\in[t_o,T]$ będzie zbiorem $\mathcal{J}^r_d(\bar{\Omega}\times[t_o,T])$.

<u>1.3.5.</u> Dla uproszczenia zapisu, funkcje stanu procesu, funkcje błędu opisu dynamiki i funkcje błędu opisu obserwacji procesu oznaczone będą jako funkcje wektorowe odpowiednio $U(t,X)$, $F^r_\Omega(t,X)$, $F^r_\Omega(t_o,X)$, $F^r_{\partial\Omega}(t,X)$, $F^v_{\bar{\Omega}}(t,X)$.

W miarę pojawiania się w dalszej części artykułu nowych notacji i terminologii, będą one definiowane w danym miejscu.

2. OGÓLNY OPIS MODELU DYNAMIKI I OBSERWACJI ROZPATRYWANEJ KLASY PROCESÓW FIZYCZNYCH

2.1. <u>Podstawowe własności modelu dynamiki i obserwacji przestrzenno-czasowego procesu fizycznego</u>

<u>2.1.0.</u> Pod pojęciem modelu dynamiki i obserwacji procesu fizycznego rozumiany jest matematyczny opis zjawiska, podawany na podstawie pewnych praw fizycznych.

<u>2.1.1.</u> Podstawowe własności jakie powinien posiadać model dynamiki i obserwacji przestrzenno-czasowego zjawiska fizycz-

nego można streścić następująco [1]: dla danej przestrzeni funkcji stanu $\Gamma(\Omega)$, danego zbioru dopuszczalnych funkcji błędu opisu dynamiki $\mathcal{J}_d^{\Gamma}(\Omega \times [t_o,T])$ oraz podzbioru $[t_o,T] \in \Lambda$, dla każdej dopuszczalnej funkcji błędu opisu dynamiki $F_{\bar{\Omega}}^{\Gamma}(t,X) \in \mathcal{J}_d^{\Gamma}(\bar{\Omega} \times [t_o,T])$ istnieje ciągła transformacja $\phi_{F_{\bar{\Omega}}^{\Gamma}}$ z $[t_o,T] \times \Gamma(\Omega) \times [t_o,T] \longrightarrow \Gamma(\Omega)$ o własnościach (w chwili początkowej $\mathcal{J}[U_o(X),\ F_{\bar{\Omega}}^{\Gamma}(t_o,X)] = U(t_o,X)$, gdzie $\mathcal{J}$ pewien operator, który może być zależny od X i t - patrz p.2.2.3 tego rozdziału):

(A) $\phi_{F_{\bar{\Omega}}^{\Gamma}}\left(t_2;\ \phi_{F_{\bar{\Omega}}^{\Gamma}}(t_1;\ U(t_o,X),t_o),t_1\right) = \phi_{F_{\bar{\Omega}}^{\Gamma}}(t_2;\ U(t_oX),t_o)$

dla wszystkich $t_o < t_1 < t_2$ w przedziale $[t_o,T]$ oraz dla wszystkich $U(t_o,X) \in \Gamma(\Omega)$.

(B) $\phi_{F_{\bar{\Omega}}^{\Gamma}}(t';\ U(t_o,X),t_o) \longrightarrow U(t_o,X)$, jeżeli $t' \longrightarrow t_o$, $U(t_o,X) \in \Gamma(\Omega)$, dla $t' > t_o$

(C) oraz dla danego zbioru dopuszczalnych funkcji błędu obserwacji $\mathcal{J}_d^{v}(\bar{\Omega} \times [t_o,T])$ i dla każdej dopuszczalnej funkcji błędu obserwacji procesu $F_{\bar{\Omega}}^{v}(t,X) \in \mathcal{J}_d^{v}(\bar{\Omega} \times [t_o,T])$ przekształcenie $\mathcal{H}$ jest ciągłe i jednoznaczne.

Własność (A) stanowi założenie o istnieniu ciągłej transformacji, która jednoznacznie określa stan procesu w czasie t_2, jeżeli dany jest stan procesu w czasie t_o.

Własność (B) stanowi założenie o istnieniu ciągłej transformacji, która jednoznacznie określa stan procesu w chwili początkowej t_o, gdy dany jest stan procesu w chwili $t' > t_o$.

2.2. Modele dynamiki rozpatrywanej klasy przestrzenno-czasowych procesów fizycznych

2.2.0. Dynamikę rozpatrywanej klasy procesów o niezmiennym w czasie obszarze przestrzennym można opisać układem równań różniczkowych cząstkowych o postaci ogólnej.

$$\frac{\partial}{\partial t} U(t,X) = \mathcal{H}\left[U(t,X),\ F_{\Omega}^{\Gamma}(t,X)\right] \tag{1}$$

określonych dla $t > t_o$ oraz $X \in \Omega$, gdzie $\mathcal{H}$ jest przestrzennym operatorem różniczkowym, którego parametry mogą zależeć od X i t.

Powyższe równanie opisuje lokalne zachowanie się procesu w punkcie $X \in \Omega$. Aby wyznaczyć rozwiązania równania (1) dla danego procesu fizycznego, należy sformułować warunki brzegowe o postaci ogólnej

$$\mathcal{G}\left[U(t,X), F^{r}_{\partial\Omega}(t,X)\right] = 0 \tag{2}$$

dla $X \in \partial\Omega$, gdzie $\mathcal{G}$ jest przestrzennym operatorem różniczkowym, którego parametry mogą zależeć od X i t.

Założono zatem, że stan procesu w danej chwili czasu t i w danym punkcie X jest określony funkcją stanu procesu $U(t,X)$ stanowiącą ogólne rozwiązanie równań (1) i (2). Ponadto założono, że w chwili t stan procesu odpowiadający określonemu warunkowi początkowemu $U(t_o,X) = \mathcal{J}\left[U_o(X), F^{r}_{\bar{\Omega}}(t_o,X)\right]$ (porównaj p.2.2.3) oraz określonej funkcji błędu opisu dynamiki procesu $F^{r}_{\bar{\Omega}}$ dany jest przez szczególne rozwiązanie równań (1) i (2), które ma własność taką, że $U_{F^{r}_{\bar{\Omega}}}\left(t',X;\ U(t_o,X),t_o\right) \to U(t_o,X)$ dla $t' \to t_o$.

2.2.1. Jeśli równania (1) i (2) mają reprezentować proces fizyczny, to muszą być spełnione wymagania tzw. poprawnego określenia modelu procesu fizycznego [1]:

A. Istnieje jednoznaczne rozwiązanie (1) i (2).

B. Rozwiązanie to powinno zależeć w sposób ciągły od warunku początkowego.

Wymagania te będą spełnione, jeżeli dla każdego $t \in [t_o,T]$, dla każdego $F^{r}_{\bar{\Omega}} \in \mathcal{J}^{r}_{d}$ istnieje wzajemnie jednoznaczna ciągła transformacja o właściwościach określonych w punkcie 2.1.2 tego rozdziału.

Podanie bardziej precyzyjnych warunków matematycznych poprawnego określenia modelu dynamiki omówiono w pracy [1].

2.2.2. Niekiedy formułuje się równania opisujące model dynamiki procesu w innej postaci niż (1), tak aby zawierały już w sobie warunki brzegowe (2). Takie sformułowanie prowadzi do równań całkowych, określających zachowanie się procesu w punkcie $X' \in \bar{\Omega}$, w zależności od stanu procesu w innych punktach $X \in \bar{\Omega}$.

W wielu wypadkach wyznaczanie opisu modelu dynamiki procesu przestrzenno-czasowego prowadzi do skomplikowanych równań różniczkowo-całkowych, opisujących zachowanie się procesu w punkcie $X' \in \bar{\Omega}$ i w czasie $t' \in [t_o, T]$, w zależności od stanu procesu zarówno w tym punkcie $X \in \Omega$ jak i w innych punktach $X \in \bar{\Omega}$.

W niniejszej pracy ograniczono się do opisu modelu przez równania typu (1) i (2) lub równoważne im równania całkowe.

2.2.3. Na skutek niepełnej informacji o procesie, co z założenia jest dopuszczalne, może nie być dokładnie znana funkcja $U(t_o,X)$, określająca warunek początkowy dla równań (1) i (2).

W dalszym ciągu pracy zakłada się, że rozpatrywaną klasę procesów przestrzenno-czasowych można opisać równaniami (1) i (2) z warunkami początkowymi

$$U(t_o,X) = \mathcal{J}\left[U_o(X),\ F_{\Omega}^{r}(t_o,X)\right] \tag{3}$$

gdzie: $U_o(X)$ oznacza wstępnie oszacowaną wartość funkcji stanu dla $t = t_o$,

$\mathcal{J}$ jest pewnym operatorem, który może być zależny od X i t,

$U(t_o,X)$ jest rzeczywistą funkcją stanu procesu w chwili $t = t_o$.

2.2.4. Gdy jest możliwe wyznaczenie dokładnego modelu dynamiki procesu, wtedy występujące w równaniach (1), (2), (3) funkcje błędu opisu dynamiki procesu $F_{\bar{\Omega}}^{r} \equiv 0$ dla wszystkich $X \in \bar{\Omega}$ oraz $t \in [t_o, T]$.

2.3. Model obserwacji rozpatrywanej klasy procesów fizycznych

2.3.0. Model obserwacji rozpatrywanej klasy procesów można zapisać w postaci ogólnej (porównaj p.1.3.2 rozdz.1)

$$Z(t) = \mathcal{H}\left[U(t,X),\ F_{\bar{\Omega}}^{v}(t,X)\right] \tag{4}$$

gdzie: $\mathcal{H}$ jest operatorem, którego parametry mogą zależeć od X i t,

$Z(t)$ jest funkcją wektorową, obserwowaną w przedziale czasu $[t_o, T]$.

Aby ten model obserwacji rozważanej klasy przestrzenno-czasowych procesów fizycznych spełniał tzw. warunki poprawnego określenia modelu obserwacji procesu fizycznego, operator $\mathcal{H}$ powinien być ciągły i jednoznaczny (patrz p.2.1.2).

2.3.1. Gdy możliwe jest wyznaczenie dokładnego modelu obserwacji procesu, wtedy występujące w (4) funkcje błędu opisu obserwacji $F_{\Omega}^{v} \equiv 0$ dla wszystkich $X \in \bar{\Omega}$ oraz $t \in [t_o, T]$.

3. SFORMUŁOWANIE OGÓLNEGO PROBLEMU OPTYMALNEJ ESTYMACJI FUNKCJI STANU ROZPATRYWANEJ KLASY PROCESÓW FIZYCZNYCH

3.1. Ustalenie pojęcia estymacji funkcji stanu procesu fizycznego

3.1.0. Do analizy określonego przestrzenno-czasowego procesu fizycznego niezbędna jest znajomość zachowania się jego funkcji stanu w przestrzeni i w czasie. Temu celowi służy zbudowanie modelu dynamiki danego procesu, tj. określenie matematycznego modelu zjawiska. Jednakże do efektywnej analizy matematycznej konieczna jest znajomość wszystkich wielkości wchodzących do równań opisujących dynamikę danego procesu. Ponieważ omówione w rozdz.2 modele rozpatrywanej klasy zjawisk z założenia budowane są z dokładnością do nieznanych funkcji błędu opisu dynamiki i obserwacji procesu, uzyskanie efektywnego rozwiązania podanych równań nie jest możliwe. Natomiast jest możliwe pewne oszacowanie funkcji stanu danego procesu, określane tu terminem estymacji.

3.1.1. Pod pojęciem estymacji funkcji stanu przestrzenno-czasowego procesu fizycznego rozumiane tu jest oszacowanie wielkości zdefiniowanych jako funkcje stanu procesu fizycznego, gdy posiadamy niepełną informację odnośnie procesu oddziaływania otoczenia na ten proces i sposobu obserwacji procesu. Oszacowania dokonujemy opierając się na przyjętym arbitralnie modelu dynamiki i obserwacji procesu oraz danym zbiorze pewnych wielkości obserwowanych.

Estymata funkcji procesu jest wyznaczana optymalnie w pewnym sensie, tj. według założonego kryterium jakości estymacji.

3.1.2. W wyniku pewnej procedury estymacji funkcji stanu procesu otrzymujemy zbiór estymat funkcji stanu procesu $\{\hat{u}_i(t,X),\ i = 1,2,\dots N\}$. Zbiór wszystkich $\hat{u}_i(t,X)$ definiowanych dla $X \in \bar{\Omega}$ oraz wszystkich $t \in [t_0,T]$ będzie stanowił składową przestrzeni estymat funkcji stanu $\hat{\Gamma}_i(\bar{\Omega} \times [t_0,T])$, a iloczyn $\hat{\Gamma}(\bar{\Omega} \times [t_0,T]) = \hat{\Gamma}_1 \times \hat{\Gamma}_2 \times \dots \times \hat{\Gamma}_N$ będzie stanowił przestrzeń estymat funkcji stanu procesu. Przestrzeń estymat optymalnych $\hat{\Gamma}_{opt} \subseteq \hat{\Gamma}$.

Dla uproszczenia zapisu estymaty funkcji stanu oznaczane będą jako funkcje wektorowe $\hat{U}(t,X)$.

3.2. Sformułowanie ogólnego problemu estymacji funkcji stanu procesu fizycznego

3.2.0. Założono, że model dynamiki i obserwacji procesu przestrzenno-czasowego można opisać układem równań:

$$\frac{\partial}{\partial t}U(t,X) = \mathcal{H}\left[U(t,X),\ F^{r}_{\Omega}(t,X)\right] \qquad X \in \Omega,$$

$$\mathcal{G}\left[U(t,X),\ F(t,X)\right] = 0 \qquad X \in \partial\Omega,$$

$$U(t_0,X) = \mathcal{J}\left[U_0(X),\ F^{r}_{\bar{\Omega}}(t_0,X)\right] \qquad X \in \bar{\Omega},$$

$$Z(t) = \mathcal{R}\left[U(t,X),\ F^{v}_{\bar{\Omega}}(t,X)\right] \qquad X \in \bar{\Omega}\ \ t \in [t_0,T],$$

omówionym w poprzednich punktach artykułu.

3.2.1. Zdefiniowano pewien funkcjonał stanowiący ogólny wskaźnik jakości estymacji funkcji stanu procesu fizycznego będący zarazem miarą zgodności modelu matematycznego z procesem rzeczywistym

$$\beta = \int_{t_0}^{T}\int_{\bar\Omega} \mathcal{P}_{t_{\bar\Omega}} (F_\Omega^r , F_{\partial\Omega}^r, F_{\bar\Omega}^v) d\bar\Omega dt + \int_{\Omega} \mathcal{P}_{t_{0\Omega}} (F_{\bar\Omega}^r (t_0,X)) d\Omega + \int_{t_0}^{T} \mathcal{P}_Z(Z, \mathcal{H}[\hat U, F_{\bar\Omega}^v]) \, dt , \tag{6}$$

gdzie $\mathcal{P}_{t_{\bar\Omega}}$, $\mathcal{P}_{t_{0\Omega}}$, $\mathcal{P}_Z$ są skalarnymi funkcjami swoich argumentów a $\hat U(t,X)$, $F_\Omega^r (t,X)$, $F_{\partial\Omega}^r(t,X)$, $F_{\bar\Omega}^r (t_0,X)$, $Z(t)$, $F_{\bar\Omega}^v (t,X)$ spełniają układ równań (5).

Funkcje $\mathcal{P}_{t_\Omega}$, $\mathcal{P}_{t_{0\Omega}}$, $\mathcal{P}_Z$ muszą posiadać własność aby dla $F_\Omega^r \to 0$ i $F_{\bar\Omega}^v \to 0$ zapewniały dążenie $\beta \to 0$.

Ten warunek nazwać można <u>warunkiem przyjęcia poprawnego wskaźnika jakości estymacji</u>.

<u>3.2.2</u>. Ogólny problem optymalnej estymacji funkcji stanu przestrzenno-czasowego procesu fizycznego można sformułować jak następuje:
<u>należy wyznaczyć estymatę $\hat U(t,X)$ funkcji stanu $U(t,X)$ procesu opisanego układem równań (5) oraz takie funkcje błędu opisu dynamiki i obserwacji procesu F_Ω^r, $F_{\partial\Omega}^r$, $F_{\bar\Omega}^r (t_0,X)$, $F_{\bar\Omega}^v$, dla których ogólny wskaźnik jakości estymacji (6) osiąga swoje minimum, gdy dane są funkcje $Z(t)$ wielkości obserwowanych.</u>

Tak wyznaczona estymata funkcji stanu procesu jest estymatą optymalną w sensie wskaźnika (6).

Zadanie optymalnej estymacji można również postawić dla przypadku, gdy na estymaty funkcji stanu oraz funkcje błędu opisu dynamiki i obserwacji nałożone będą dodatkowe ograniczenia (mogą być to również ograniczenia nierównościowe), wynikające z analizy danego procesu a zapewniające poprawność (z fizycznego punktu widzenia) postawienia zadania estymacji. W tym przypadku funkcje minimalizujące wskaźnik (6) spełniają układ równań (5) i układ ograniczeń dodatkowych (porównaj p.3.4.1 tego rozdziału), np. typu $\mathcal{B}[\hat U, F_{\bar\Omega}^r , F_{\bar\Omega}^v] \geq 0$ gdzie $\mathcal{B}$ jest operatorem, który może zależeć od X i t.

<u>3.2.3</u>. Warto zauważyć, że chociaż głównym celem postawionego powyżej zadania estymacji jest znalezienie estymaty opty-

malnej funkcji stanu procesu, to w trakcie rozwiązania otrzymujemy również optymalne w sensie wskaźnika (6) funkcje błędu opisu dynamiki i obserwacji danego procesu fizycznego.

3.2.4. W literaturze [8], [9], [10] dotyczącej problemu estymacji funkcji stanu procesu fizycznego klasyfikuje się postawienie zadania estymacji wg rodzaju wskaźnika jakości estymacji. Podawane są na ogół dwie koncepcje budowania tego kryterium, oparte na znanym z pewną dokładnością modelu dynamiki i obserwacji procesu:

A. Koncepcja minimalizacji błędu "dopasowania" ("fitting" error) funkcji stanu do znanej wielkości mierzonej w przedziale czasu estymacji.

B. Koncepcja minimalizacji błędu "równań" ("equations" error) na podstawie znanej wielkości mierzonej w przedziale czasu estymacji.

Ponieważ wskaźniki jakości estymacji, sformułowane na podstawie zarówno koncepcji A jak i B, są szczególnymi przypadkami zdefiniowanego w p.3.2.1 wskaźnika (6), można więc mówić o pewnym "dualizmie" podanego w p.3.2.2 sformułowania ogólnego problemu estymacji funkcji stanu procesu.

3.2.5. Dla tak sformułowanego problemu optymalnej estymacji istotne jest właściwe i ostrożne dobranie zarówno kryterium jak i modelu dynamiki i obserwacji procesu fizycznego, mimo, jak by się wydawało, dużego "marginesu bezpieczeństwa" narzucanego przez takie postawienie zadania. Jest bowiem rzeczą oczywistą, że im dokładniej wyznaczymy model dynamiki i obserwacji oraz im precyzyjniejsze kryterium estymacji przyjmiemy, tym wynik oszacowania funkcji stanu będzie lepszy.

3.3. Możliwość estymacji funkcji stanu rozpatrywanej klasy przestrzenno-czasowych procesów fizycznych

3.3.0. Możliwość estymacji funkcji stanu rozpatrywanej klasy procesów fizycznych związana jest z pewnymi właściwościami zarówno przyjętego modelu dynamiki i obserwacji, jak i samego procesu.

Właściwości te można określić jako zdolność oszacowania funkcji stanu procesu.

3.3.1. Pod tym pojęciem można rozumieć możliwość wyznaczenia estymaty $\hat{U}(t,X)$ funkcji stanu $U(t,X)$ procesu (dla danego czasu t ze skończonego przedziału czasu estymacji $[t_o,T]$ oraz zmiennej przestrzennej X z obszaru Ω, przy przyjętych modelach dynamiki i obserwacji i zdefiniowanych w nich funkcjach błędu opisu dynamiki i obserwacji) na podstawie znajomości pewnego zbioru funkcji obserwowanych $Z(t)$. Jeśli dla każdego $t \in [t_o,T]$ i dla każdego stanu procesu fizycznego możliwe jest wyznaczenie $\hat{U}(t,X)$, to taki proces fizyczny można uznać za całkowicie oszacowalny.

3.3.2. W zasadzie nie można podać innych ogólnych warunków matematycznych poza podanymi już w p.2.1.2 oraz omówionymi w p.4.1 warunkami istnienia rozwiązania zadania estymacji, określających tę właściwość przyjętych modeli dynamiki, obserwacji i samego procesu fizycznego. Podanie bardziej precyzyjnych warunków może być możliwe przy rozważaniu poszczególnych procesów lub pewnych klas tych procesów.

Analiza możliwości oszacowania funkcji stanu procesu może prowadzić także do określenia zbiorów dopuszczalnych funkcji błędu opisu dynamiki i obserwacji procesu fizycznego, tj. takich przy których istnieje jednoznaczne rozwiązanie zadania estymacji (przy uwzględnieniu warunków matematycznych otrzymanych z analizy poprawnego określenia modelu dynamiki i obserwacji - porównaj p.2.2.1.

3.4. Sformułowanie ogólnego problemu estymacji jako ogólnego zadania optymalizacji dynamicznej

3.4.0. Postawiony w p.3.2.2 z tego rozdziału ogólny problem optymalnej estymacji funkcji stanu przestrzenno-czasowego procesu fizycznego jest podobny (w sensie sformułowania matematycznego) do znanego z teorii sterowania [1], [2], zagadnienia optymalnego sterowania przestrzenno-czasowym procesem fizycznym. To spostrzeżenie prowadzi do ważnego wniosku, że do rozwiązania ogólnego zadania estymacji może być użyty formalny aparat matematyczny, stosowany w teorii optymalizacji dynamicznej, np. [1], [2], [11] [14], [17], [18].

3.4.1. Aby móc przedstawić podany ogólny problem optymalizacji dynamicznej, zastosowany zostanie następujący formalny schemat postępowania, nie pretendujący w tym miejscu do pełnej ścisłości matematycznej.

Wprowadzając nową funkcję wektorową

$$W = \mathrm{col}\left[\hat{U},\ F^{r}_{\Omega},\ F^{r}_{\partial\Omega},\ F^{r}_{\bar{\Omega}}(t_0,X),\ F^{v}_{\bar{\Omega}}\right] \tag{7}$$

przekształcając układ równań (5) i oznaczając:

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,X) - \mathcal{H}\left[U(t,X),\ F^{r}_{\Omega}(t,X)\right] \\ \mathcal{G}\left[\hat{U}(t,X),\ F^{r}_{\partial\Omega}(t,X)\right] \\ \hat{U}(t_0,X) - \mathcal{I}\left[U_0(X),\ F^{r}_{\bar{\Omega}}(t_0,X)\right] \end{bmatrix} \triangleq \varphi[W] \tag{8}$$

otrzymuje się nową postać układu (5), mianowicie

$$\varphi[W] = 0\ , \tag{9}$$

gdzie φ jest pewnym operatorem działającym na W.

Dla przypadku, gdy na estymaty funkcji stanu czy też funkcje błędu opisu dynamiki obserwacji procesu nałożone są dodatkowe ograniczenia, to gdy są one równościowe operator φ może zawierać je w sobie, gdy są nierównościowe można zdefiniować nowy operator, np.

$$\varphi_1[W] \geqslant 0\ , \tag{10}$$

Również funkcjonał (6) można zapisać w postaci zwartej $\beta[W]$.

Załóżmy następnie, że β jest funkcjonałem określonym na elementach W przestrzeni B, $W \in B$, a φ i φ_1 są operatorami określonymi też na elementach W tej przestrzeni B, przyjmującymi swoje wartości w przestrzeni B_1, $\varphi[W] \in B_1$ i $\varphi_1[W] \in B_1$, gdzie B i B_1 dowolne przestrzenie liniowe [15], [16].

3.4.2. Zadanie na znalezienie minimum funkcjonału $\beta[W]$ przy ograniczeniach $\varphi[W] = 0$ i $\varphi_1[W] \geqslant 0$, gdzie 0 jest teraz zerowym elementem przestrzeni B_1, można sformułować następująco (porównaj [2]):

Należy znaleźć dopuszczalny punkt $W^0 \in B$ spełniający warunki $\varphi[W] = 0$ i $\varphi_1[W] \geqslant 0$, takie, aby dla wszystkich możliwych $W \in B$, także spełniających warunki $\varphi[W] = 0$ i $\varphi_1[W] \geqslant 0$, była spełniona zależność

$$\beta[W^0] \leqslant \beta[W] \tag{11}$$

Punkt W^0 nosi nazwę absolutnego warunkowego minimum funkcjonału β.

Jeżeli warunek (11) spełniony jest tylko dla pewnego otoczenia punktu W^0, to ten punkt nosi nazwę względnego warunkowego minimum funkcjonału β.

4. METODY ROZWIĄZANIA OGÓLNEGO PROBLEMU OPTYMALNEJ ESTYMACJI PODANEGO JAKO OGÓLNE ZADANIE OPTYMALIZACJI DYNAMICZNEJ

4.1. Warunki istnienia rozwiązania zadania

4.1.0. Podanie warunków istnienia rozwiązania zadania sformułowanego w 3.3.2 rozdz.3 wymaga przyjęcia pewnych dodatkowych założeń o operatorach φ i φ_1, funkcjonale β oraz przestrzeniach B i B_1. W zależności od tych założeń stworzono cały szereg twierdzeń [1] ÷ [3], [11] ÷ [14], [17] ÷ [22] o warunkach koniecznych i dostatecznych istnienia rozwiązania wyżej postawionego ogólnego zadania optymalizacji dynamicznej.

4.1.1. We współczesnym uogólnionym rachunku wariacyjnym znane są warunki istnienia rozwiązania omawianego zadania sformułowane przez autorów trzech prac [17], [19], [20] bardzo pod względem matematycznym zaawansowanych (korzystanie z aparatu pojęciowego topologii i analizy funkcjonalnej) teorii, stanowiących daleko idące uogólnienie klasycznej metody mnożników Lagrange'a.

O ich ogólności może świadczyć fakt, że znana z teorii optymalnego sterowania zasada maksimum Pontrjagina [21], [22], [23], stanowi szczególny przypadek podanych przez tych autorów warunków koniecznych.

Prace [17], [20], oparte są przy tym na geometrycznie przejrzystej idei rozdzielania pewnych zbiorów (argumentów, bądź wartości funkcjonałów), co pozwala uzyskiwać [14] wszystkie niejednokrotnie pozornie różne warunki konieczne istnienia ekstremum w jednolity sposób, jako szczególne przypadki uogólnionego równania Eulera-Lagrange'a.

4.1.2. Z porównania [14] tych teorii wynika, że najogólniejszym warunkiem istnienia rozwiązania omawianego zadania jest warunek podany przez Neustadta i Halkina [17]. Dla wykorzystania tego warunki w praktyce, tj. do znajdowania odpowiednich aproksymacji funkcjonału minimalizowanego i ograniczeń, dysponuje się aparatem różniczek wypukłych i funkcjonałów podpierających, opracowanym przez Dubowickiego i Milutina [20]. Stosowanie omówionych warunków koniecznych wymaga w każdym zadaniu sprawdzenia czy są spełnione tzw. warunki regularności. Zapewniają one możliwość posługiwania się aproksymacjami o charakterze różniczkowym ("pierwszych pochodnych") do uzyskania warunków koniecznych. Możliwość ta jest zapewniona dzięki naturalnemu żądaniu, by w użytym przybliżeniu, w "pobliżu" punktów spełniających ograniczenia, znajdowały się punkty spełniające również ograniczenia wyjściowe.

4.2. Metody analityczne i przybliżone rozwiązania zadania

4.2.0. Jak wiadomo nie istnieje taka metoda analityczna, czy przybliżona, która pozwoliłaby uzyskać pełne rozwiązanie ogólnie postawionego w p.3.3.2 zadania. Metodami analitycznymi można efektywnie rozwiązać jedynie wąską klasę zadań optymalizacji dynamicznej. Jednakże zawsze należy przeprowadzić jak najpełniejszą analizę każdego zadania i uzyskać choćby częściowe rezultaty analityczne, gdyż ułatwiają one obliczenia przybliżone oraz ich interpretację.

4.2.1. Obszerny przegląd metod analitycznych rozwiązania omawianej klasy zadań optymalizacji dynamicznej zawarty jest w pracach [1] - [3]. Zwraca uwagę fakt, że wyniki efektywne osiągnięto prawie jedynie w przypadku, gdy operator φ jest operatorem liniowym a funkcjonał β ma postać całkowo-kwadratową [1], [2]. W pozostałych przypadkach autorzy ograniczają się przeważnie do wyprowadzenia warunków koniecznych istnienia ekstremum warunkowego funkcjonału β.

Na uwagę zasługuje omówiona przez Butkowskiego w [2] metoda momentów, pozwalająca efektywnie rozwiązać pewne przypadki "liniowe" zadań optymalizacji dynamicznej.

4.2.2. Do efektywnego rozwiązania różnych praktycznych zadań szczególnie "nieliniowych" optymalizacji dynamicznej stosuje się rozmaite schematy aproksymacji oraz specjalne procedury obliczeniowe [1]÷[3], [12], [13], [23], [24]. Możliwe przy tym są dwie drogi postępowania. Albo aproksymuje się matematyczny model dynamiki procesu przestrzenno-czasowego (z jednoczesną modyfikacją funkcjonału β [23]), zastępując go modelem skończenie wymiarowym albo rozwiązuje się w sposób przybliżony równania określające warunki istnienia rozwiązania optymalnego, otrzymane w wyniku zastosowania jednej z teorii optymalizacji dynamicznej [1], [2], [14].

Pierwsza koncepcja, aproksymacji modelu (operatora φ) pozwala sprowadzić pierwotne zadanie do grupy zadań, w których φ zastąpione zostaje "zwyczajnym" różniczkowym lub różnicowym operatorem i których rozwiązanie jest prostsze [24], [13], [2]. Jednakże nie zawsze jest oczywiste jaką formę i jaki poziom dyskretyzacji należy zastosować. Poza tym istnieje niepewność, czy rozwiązanie tego wtórnego zadania jest zbieżne do rozwiązania pierwotnego, a co za tym idzie, czy jest optymalne w sensie kryterium (funkcjonału) pierwotnego. Przeprowadzenie analizy zbieżności nie jest zadaniem łatwym (np. może być wymagana znajomość rozwiązania dokładnego, którego na ogół nie znamy).

Druga koncepcja oparta na przybliżonym rozwiązaniu równań uzyskiwanych z warunku istnienia rozwiązania optymalnego, nie jest obarczona niepewnością o "optymalność" uzyskiwanego rozwiązania, natomiast przysparza wiele trudności obliczeniowych. Do nich przede wszystkim należy zaliczyć problem dwugraniczny w przestrzeni funkcyjnej, spotykany przy rozwiązywaniu równań kanonicznych [1]. Zastosowanie różnych procedur iteracyjnych do rozwiązania tego problemu wiąże się z rozważeniem zbieżności i stabilności uzyskiwanego rozwiązania. Jest to na ogół zadanie trudne. Zastosowanie techniki różnic skończonych wiąże się także z analizą stabilności rozwiązania, gdyż wiadomo, że uzyskiwane rozwiązania są z reguły niestabilne. Należy liczyć się także z interwencją błędu zaokrągleń w rozwiązanie.

Użyteczność stosowanych procedur obliczeniowych jest na ogół związana z wymiarowością problemu (postać operatora φ), co stanowi poważne ograniczenie przy realizacji tej koncepcji. Reasumując, zastosowanie drugiej koncepcji daje wg [1] większe szanse na otrzymanie optymalnego rozwiązania omawianego zadania, o ile możliwe jest pokonanie trudności obliczeniowych, powyżej krótko omówionych.

5. ZAKOŃCZENIE

5.1. Zastosowanie zaprezentowanej koncepcji optymalnej estymacji

5.1.0. Zaprezentowany w poprzednich rozdziałach formalizm optymalnej estymacji może być zastosowany do rozwiązania zadania oszacowania niektórych przestrzenno-czasowych zjawisk zachodzących w reaktorze jądrowym, szczególnie reaktorze mocy [25].

Poniżej zostanie sformułowane zadanie optymalnej estymacji funkcji stanu pewnych procesów reaktorowych, w oparciu o ogólny model dynamiki i obserwacji tych zjawisk i proponowany dla tego zadania wskaźnik jakości estymacji.

5.1.1. Zadanie optymalnej estymacji funkcji stanu interesującej klasy procesów reaktorowych można postawić następująco: należy znaleźć taką funkcję $\hat{U}(t,X)$ oraz funkcje F^{r}_{Ω}, $F^{v}_{\bar{\Omega}}$, $F^{r}_{\bar{\Omega}}(t_0,X)$, dla których funkcjonał (proponowany wskaźnik jakości estymacji) o postaci

$$\beta[\hat{U},F^{r}_{\Omega}, F^{r}_{\bar{\Omega}}(t_0,X),F^{v}_{\bar{\Omega}}] = \int_{t_0}^{T}\int_{\Omega}(F^{r}_{\Omega})^{Tr}F^{r}_{\Omega}d\Omega dt + \int_{t_0}^{T}\int_{\bar{\Omega}}(F^{v}_{\bar{\Omega}})^{Tr}F^{v}_{\bar{\Omega}}d\bar{\Omega}dt +$$
$$+ \int_{\bar{\Omega}}\left(F^{r}_{\bar{\Omega}}(t_0,X)\right)^{Tr}F^{r}_{\bar{\Omega}}(t_0,X)d\Omega + \int_{t_0}^{T}\Big[Z(t) - \int_{\bar{\Omega}}D(X)\left[S(t)\hat{U}(t,X)+\right.$$
$$\left.+ F^{v}_{\bar{\Omega}}\right]d\bar{\Omega}\Big]^{Tr}[(\cdot)]\,dt \tag{12}$$

osiąga swoje minimum warunkowe przy spełnieniu ograniczeń równościowych (równania opisujące model dynamiki):

$$\begin{aligned} &\frac{\partial}{\partial t}\hat{U}(t,X) = \mathcal{L}(X)\hat{U}(t,X) + \xi(t,X) + F^{r}_{\Omega}(t,X) && X\in\Omega, \\ &\hat{U}(t,X) = 0 && X\in\partial\Omega, \\ &\hat{U}(t_0,X) - F^{r}_{\bar{\Omega}}(t_0,X) = 0 && X\in\bar{\Omega} \text{ i } t\in[t_0,T], \end{aligned} \tag{13}$$

oraz ograniczeń nierównościowych (warunek poprawnego postawienia zadania estymacji z fizycznego punktu widzenia):

$$\hat{U}(t,X) + U_p(X) + F^{r}_{\Omega}(t_0,X) \geqslant 0 \quad X\in\Omega \text{ i } t\in[t_0,T], \tag{14}$$

gdzie:

- X – trójwymiarowy wektor współrzędnych przestrzennych z obszaru reaktora $\bar{\Omega} = \Omega\cup\partial\Omega$, gdzie Ω jest wnętrzem a $\partial\Omega$ brzegiem tego obszaru,
- t – czas z przedziału czasu estymacji $[t_0,T]$,
- $\hat{U}(t,X)$ – n-wymiarowy wektor estymat funkcji stanu rozważanych procesów reaktorowych,
- $F^{r}_{\Omega}(t,X)$ – n-wymiarowy wektor funkcji błędu opisu dynamiki rozważanych procesów reaktorowych,
- $F^{r}_{\Omega}(t_0,X)$ – n-wymiarowy wektor funkcji błędu opisu dynamiki w chwili początkowej t_0,

$F_{\Omega}^{v}(t,X)$ – k-wymiarowy wektor funkcji błędu opisu obserwacji rozpatrywanych procesów,

$U_p(X)$ – dany n-wymiarowy wektor funkcji zależnych od X, określający poziom mocy reaktora jądrowego,

$\xi(t,X)$ – n-wymiarowy dany wektor określający znane oddziaływanie otoczenia,

$\mathcal{L}(X)$ – dany liniowy $(n \times n)$ macierzowy operator różniczkowy cząstkowy, zależny od X,

$D(X)$ – diagonalna $(k \times k)$ macierz funkcji delta Diraca,

$S(t)$ – dana $(n \times k)$ macierz funkcji zależnych od czasu, spełniająca rolę macierzy wagi,

$Z(t)$ – dany k-wymiarowy wektor wielkości obserwowanych w przedziale czasu estymacji $[t_o, T]$,

T_r – oznacza transpozycję.

5.1.2. W powyższym sformułowaniu zadanie optymalnej estymacji funkcji stanu rozważanych procesów reaktorowych równoważne jest zadaniu optymalizacji dynamicznej szukania minimum funkcjonału całkowo-kwadratowego, przy ograniczeniach równościowych typu równań różniczkowych cząstkowych i ograniczeniach nierównościowych na funkcje minimalizujące ten funkcjonał. A zatem do rozwiązania tego zadania można stosować metody matematyczne optymalizacji dynamicznej.

5.2. Podsumowanie

W artykule sformułowano ogólny problem optymalnej estymacji funkcji stanu niektórych przestrzenno-czasowych procesów fizycznych, opierając się na deterministycznym modelu dynamiki i obserwacji tych zjawisk oraz proponowanym wskaźniku jakości estymacji.

Podano ogólne własności i postaci modeli matematycznych dynamiki i obserwacji pewnej klasy procesów fizycznych, które charakteryzuje niezmienny w czasie obszar przestrzenny. Zdefiniowano ogólny problem optymalnej estymacji funkcji stanu tych procesów, proponując jako wskaźnik jakości estymacji pewien funkcjonał określony na całym obszarze przestrzenno-czasowym, stanowiący zarazem miarę zgodności modelu matematycznego z procesem rzeczywistym. Tak postawiony problem estymacji przekształcono w ogólne zadanie optymalizacji dynamicznej - szukania ekstremum warunkowego funkcjonału - omawiając pokrótce warunki istnienia jego rozwiązania (w ujęciu współczesnego uogólnionego rachunku wariacyjnego). Omówiono również pokrótce problemy analitycznego i przybliżonego rozwiązania podanego ogólnego zadania optymalizacji dynamicznej.

Na zakończenie zasugerowano możliwość zastosowania zaprezentowanej koncepcji estymacji do rozwiązania zadania optymalnego oszacowania niektórych przestrzenno-czasowych zjawisk zachodzących w reaktorze jądrowym.

Bibliografia

[1] Wang P.K.C.: "Control of Distributed Parameter Systema". Advances in Control Systema vol.I. Academic Press, 1964.

[2] Butkowski A.G.: Teorija optimalnowo uprawlienija sistemami s raspredielionnymi parametrami. Izd. Nauka, Moskwa 1965.

[3] Wang P.K.C.: "Theory of Stability and Control for Distributed Parameter Systems". (a bibliography), vol.8, No 2. Int. J. of Control.

[4] 1st IFAC Symposium on Identification in Automatic Control. Prague, Czechoslovakia, June, 1967.

[5] 2nd IFAC Symposium on Identification and Process Estimation. Prague, Czechoslovakia, June 1970.

[6] Fabl P.L.: "Infinite - Dimensional Filtering: the Kalman-Bucy Filter in Hilbert Space". Information and Control vol.11, 1967.

[7] Thau F.E.: "On Optimum Filtering for a Class of Linear Distributed Parameter Systems". JACC 1968 (także J. of Basic Eng. June 1969).

[8] Kagiwada H.H., Kalaba RE., Schumitzky A, Sridhar R.: "Invariant Imbedding and Sequential Interpolating Filters for Nonlinear Processes" J. of Basic Eng.,June 1969.

[9] Balakrishnan A.U., Peterka V.: "Indentification in automatic control systems". IV IFAC Congress, Survey Paper No. 9, Warszawa 1969.

[10] Levadi V.S.: 'Nonlinear filtering and least squares extensions and application of the quasilinearisation theory". IV IFAC Congress, Technical Session No 69 Warszawa 1969.

[11] Kulikowski R.: Sterowanie w wielkich systemach. WNT, Warszawa 1970.

[12] Lewitin J.S., Poljak B.T.: "Metody minimizacji pri naliczii ograniczenii - obzor". Żurnał wycz. mat. i mat.-fiz. No 5, 1966.

[13] "Computationol methods in Optimisation". IV IFAC Congress, Technical Session No 18, Warszawa 1969.

[14] Makowski K.: "Współczesne metody uogólnionego rachunku wariacyjnego i warunki regularności". Prace IAPAN, Zeszyt 72, 1968.

[15] Lusternik L.A., Sobolew W.I.: "Elementy analizy funkcjonalnej". Warszawa 1959.

[16] Wulich B.Z.: Wwiedienije w funkcjonalnyj analiz. Izd. Nauka, Moskwa 1967.

[17] Neustadt L.W., Halkin H.: "General necessery conditions for optimization problem". Proc. Nat. Acad. Sci,1966 No 4.

[18] Golub G.G.: "Optimalnoje uprawlenije liniejnymi i nieliniejnymi sistemami s rozpredielionnymi parametrami". Awtomatika i Telemechanika No 11, 1969.

[19] Hurwicz L.: Programming in linear spaces. Studies in linear and nonlinear programming. Stanford 1958.

[20] Dubowicki A.J., Milutin A.A.: "Zadaczi in ekstremum pri naliczi ograniczenii". Ż. wycz.mat. No 3, 1965.

[21] Athans P., Falb P.: Sterowanie optymalne. PWNT. Warszawa 1970 (tłum. z angielskiego).

[22] Pontrjagin L.S., Bałtiański L., Gamkrelidze P.W., Miszczenko E.F.:'Matematiczeskaja teorija optimalnych procesow". Fitzmatgiz, Moskwa 1961.

[23] Wismer D.A.: "An Efficient Computational Procedure for the Optimization of a Class of Distributed Parameter Systems". Journal of Basic Eng. June 1969.

[24] Wierzbicki A.: Optymalizacja dynamiczna. Mat. OPT NOT - Warszawa 1969.

[25] Praca zbiorowa: The Technology of Nuclear Reactor Safety. MIT Press, 1964.

ОБ ОПТИМАЛЬНОЙ ОЦЕНКЕ ОДНОГО КЛАССА ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННЫХ ФИЗИЧЕСКИХ ПРОЦЕССОВ

К р а т к о е   с о д е р ж а н и е

В статье сформулирована общая проблема оптимальной оценки функции состояния одного класса пространственно-временных физических процессов, на основе детерминистической модели динамики и наблюдений этих явлений, а также на предложенном указателе качества оценки.

Изложены общие свойства и формы математических моделей динамики и наблюдений одного класса физических процессов, определенных неизменным по времени прострабством.

Сформулирована общая проблема оптимальной оценки функции состояния этих процессов, предлагая в виде указателя качества оценки один функционал, определенный во всей пространственно-временной области и составляющий меру соответствия между математической моделью и действительным процессом.

Сформулированную таким образом проблему оценки было преобразовано в общую задачу динамической оптимализации - поски экстремум условного функционала - обсуждая условия существования ее решения (в понимании современного обобщенного вариационного исчисления). Кратко оговорено также проблему аналитического и приблизительного решения указанной общей задачи динамической оптимализации.

В заключении внушена возможность применения представленного формализма к решению задачи оптимальной оценки функции

состояния некоторых простраБственно-временных процессов, возникающих в энергетических ядерных реакторах.

ON OPTIMAL ESTIMATION OF SOME CLASS OF SPACE-TIME PHYSICAL PROCESSES

S u m m a r y

New formulation of the optimal state function estimation problem of some class of space-time physical processes, based on deterministic dynamics and observation model of the process as well as the propesed performance index of estimation has been presented.

Properties and forms of dynamics and observation of the mathematical model of this class of processes, characterised by fixed space domain have been given.

General optimal estimation problem with a functional form of the performance index which has been used as a measure of fit between the mathematical model and the real process has been defined. Bacause of thar formulation main estimation problem into general dynamic optimisation problem has been transformed. Also the solution existance conditions as well as properties and problem of exact and approximate solution of the given general dynamic optimisation problem have been shortly discussed.

Possability of using of the presented formalism for solving the problem of state function optimal estimation for some space-time dependent power reactor processes have been suggested.

Rękopis dostarczono w czerwcu 1971 r.