BIULETYN INFORMACYJNY INSTYTUTU TECHNIKI CIEPLNEJ
POLITECHNIKI WARSZAWSKIEJ

Nr 27 1970

Mgr inż. Jerzy Suski

Instytut Techniki Cieplnej
Centralne Laboratorium Chłodnictwa

PEWNE METODY STATYSTYCZNE W ZAGADNIENIACH NIE USTALONEGO PRZEWODZENIA CIEPŁA

1. Wprowadzenie

Pewne metody statystyczne, znane powszechnie pod nazwą metod Monte Carlo, są od niedawna coraz częściej wykorzystywane do rozwiązywania równań różniczkowych i ich przekształceń różnicowych, spotykanych w przewodnictwie cieplnym.

Podstawy teoretyczne tych metod oraz sposoby posługiwania się nimi można znaleźć w [7] i [3].

Rozwiązania konkretnych przypadków oraz wady i zalety niektórych metod podane są między innymi w publikacjach [1] i [6].

Metody Monte Carlo są zaliczane do metod statystycznych ze względu na statystyczny wynik rozwiązania; temperatura T w interesującym punkcie jest średnią z temperatur w punktach, kończących drogi cząstek:

$$T = (1/N) \sum_{j=1}^{N} T_j ,$$

gdzie N - ilość cząstek.

Niżej opisano krótko metody statystyczne, które były realizowane przez innych autorów, a następnie rozwinięto szerzej propozycje nowych metod.

2. Niektóre, znane metody Monte Carlo

Jedną z pierwszych, stosowanych metod Monte Carlo jest metoda oparta na tym samym równaniu, co metoda różnicowa w przód (2,część II), które dla jednowymiarowego przewodzenia ciepła ma postać

$$T(x,t) = T(x,t-\Delta t) + (a\Delta t/\Delta x^2)\cdot\left[T(x-\Delta x,t-\Delta t) + T(x+\Delta x,t-\Delta t) - 2T(x,t-\Delta t)\right], \qquad (1)$$

gdzie a - współczynnik dyfuzyjności.

Zastosowanie tej metody do rozwiązywania pewnych przypadków przewodzenia ciepła jest podane w publikacjach [1] i [11] oraz w pracy [8].

Podstawy teoretyczne metody opartej na rozwiązaniu cząstkowego równania różniczkowego drugiego rzędu metodą rozdzielenia zmiennych [10] opisane są krótko w (2, część I). Zastosowanie i bliższe wyjaśnienia dotyczące posługiwania się tą metodą można znaleźć w pracy A.Haji - Sheika i E.M.Sparrowa [1]. Krok przestrzenny r równy jest najkrótszej odległości pomiędzy chwilowym położeniem cząstki a brzegiem. Nowe położenie cząstki - to punkt na okręgu o promieniu równym krokowi przestrzennemu o kącie nachylenia do osi odciętych φ określonym przy pomocy liczby losowej ze wzoru

$$F = \varphi/2\pi .$$

Krok czasowy Δt dla przewodzenia dwuwymiarowego określa się również przy pomocy liczby losowej ze wzoru

$$H = -2\sum_{\kappa=1}^{\infty}\exp(-\mu_n^2\, a\Delta t/r^2)(\mu_n J_1/\mu_n),$$

gdzie: r - krok przestrzenny,

μ - pierwiastek funkcji Bessela,

$J_1(\mu)$ - funkcja Bessela 1. rzędu.

E.F.Emery i W.W.Carson (6) dokonali skutecznej modyfikacji metod Monte Carlo eliminując potrzebę stosowania generatora liczb losowych.

W metodzie nazwanej Exodus zamiast poszukiwania kierunku ruchu cząstki przy pomocy generatora liczb losowych, określa się na podstawie prawdopodobieństw wynikających z równania różnicowego, ilość wychodzących w odpowiednich kierunkach cząstek.

3. Metoda Monte Carlo oparta na równaniu Cranka-Nicolsona

Równanie Cranka-Nicolsona (2, część II) dla jednowymiarowego przewodzenia ciepła ma postać

$$T(x,t) = T(x,t-\Delta t)+(a\Delta t/2\Delta x^2)\cdot\left[T(x-\Delta x,t-\Delta t)+T(x+\Delta x,t-\Delta t)+\right.$$
$$\left.-2T(x,t-\Delta t)+T(x-\Delta x,t)+T(x+\Delta x,t)-2T(x,t)\right] . \qquad (2)$$

Rozwiązanie numeryczne tego równania oraz jego zalety w porównaniu do rozwiązania numerycznego metodą różnicową w przód są podane w (2, część II), [4].

Jeśli przyjąć $\Delta t = \Delta x^2/a$, to równanie (2) uprości się do

$$T(x,t) = (1/4)\cdot\left[T(x-\Delta x,t-\Delta t) +\right.$$
$$\left.+T(x+\Delta x,t-\Delta t)+T(x-\Delta x,t)+T(x+\Delta x,t)\right] . \qquad (3)$$

Równanie to może służyć do rozwiązania zagadnienia metodą statystyczną. Realizacja ruchów cząstek będzie przedstawiała się następująco:

Cząstka startująca z punktu x w chwili t z prawdopodobieństwem zawartym w przedziale (0 do 0,25) wykonuje krok przestrzenny w kierunku $x-\Delta x$ i krok czasowy Δt, z prawdopodobieństwem (0,25-0,5), przesuwa się do $x+\Delta x$ i również wykonuje krok czasowy Δt, z prawdopodobieństwem (0,5-0,75) przesuwa się do $x-\Delta x$, ale bez wykonania kroku czasowego oraz z prawdopodobieństwem (0,75-1) przesuwa się do $x+\Delta x$, nie wykonując kroku czasowego.

Nowością w tej metodzie, w porównaniu do metody statystycznej opartej na równaniu jawnym, jest wprowadzenie, obok kroków przestrzennych powiązanych z krokami czasowymi, kroków przestrzennych bez wykonywania kroków czasowych.

Spodziewaną zaletą metody statystycznej, opartej na równaniu Cranka-Nicolsona, w porównaniu do metody opartej na równaniu jawnym jest zwiększenie szybkości obliczeń z uwagi na stabilność rozwiązania.

Ponadto, rozwiązanie statystyczne równania Cranka-Nicolsona wynika bezpośrednio z równania (3) otrzymanego przez podstawienie z równania (2). Dla numerycznego rozwiązania równania (2) stosowano metodę nadrelaksacji oraz specjalną procedurę używaną do rozwiązywania układu o trójdiagonalnej macierzy.

4. Metoda Monte Carlo oparta na równaniu kierunków naprzemiennych

Równania kierunków naprzemiennych (2, część II) stosuje się do rozwiązywania zagadnień dwuwymiarowego przewodzenia ciepła.

Przy prostokątnym układzie współrzędnych mają one postać:

$$T(x,t+\Delta t/2) = T(x,y,t)+(a\Delta t/2\Delta n^2)\cdot\big[T(x-\Delta n,y,t+\Delta t/2)+ +T(x+\Delta n,y,t+\Delta t/2)+T(x,y-\Delta n,t)+ +T(x,y+\Delta n,t)-2T(x,y,t+\Delta t/2)-2T(x,y,t)\big] \tag{4a}$$

oraz

$$T(x,y,t+\Delta t) = T(x,y,t+\Delta t/2)+(a\Delta t/2\Delta n^2)\cdot\big[T(x-\Delta x,y,t+\Delta t/2)+ +T(x+\Delta n,y,t+\Delta t/2)+T(x,y-\Delta n,t+\Delta t)+T(x,y+\Delta n,t+\Delta t)+ -2T(x,y,t+\Delta t/2)-2T(x,y,t+\Delta t)\big]\ , \tag{4b}$$

gdzie $\Delta n = \Delta x = \Delta y$.

Po podstawieniu $\Delta t = \Delta n^2/a$ będzie

$$T(x,y,t+\Delta t) = (1/4)\cdot\big[T(x-\Delta n,y,t+\Delta t/2)+T(x+\Delta n,y,t+\Delta t/2)+ +T(x,y-\Delta n,t)+T(x,y+\Delta n,t)\big] \tag{5a}$$

oraz

$$T(x,y,t+\Delta t) = (1/4)\cdot\big[T(x-\Delta n,y,t+\Delta t/2)+T(x+\Delta n,y,t+\Delta t/2)+ +T(x,y-\Delta n,t+\Delta t)+T(x,y+\Delta n,t+\Delta t)\big]\ . \tag{5b}$$

Znajdywanie kierunków przesunięć cząstek odbywa się podobnie jak w metodzie statystycznej opartej na równaniu Cranka-Nicolsona, z tą tylko różnicą (i to jest nowe w tej metodzie), że równania (5a) i (5b) należy stosować na zmianę.

Spodziewaną zaletą metody w porównaniu do metod opartych na równaniu jawnym i Cranka-Nicolsona jest dalsze zwiększenie szybkości obliczeń.

Rozwiązanie statystyczne równań kierunków naprzemiennych w przeciwieństwie do rozwiązania numerycznego, jest bezpośrednie.

5. Metoda Monte Carlo oparta na równaniu Douglasa-Rachforda

Stosując poprzednie oznaczenia, można napisać równanie bilansu cieplnego, po przekształceniu będące analogiczne do tego, które rozwinęli i podali sposób jego numerycznego rozwiązania dla zagadnień dwu i trójwymiarowych Douglas i Rachford (5). Przyjmując $\Delta t = \Delta n^2/4a$, dla przewodzenia dwuwymiarowego, równanie to przyjmie postać

$$T(x,y,t) = (1/2)T(x,y,t-\Delta t)+(1/8)\cdot[T(x-\Delta n,y,t)+T(x+\Delta n,y,t)+ +T(x,y-\Delta n,t)+T(x,y+\Delta n,t)] \quad (6)$$

Zgodnie z tym równaniem, cząstka z prawdopodobieństwem (1/2) wykonuje krok czasowy, bez przesunięcia przestrzennego i z tym samym prawdopodobieństwem wykonuje krok przestrzenny w jednym z czterech kierunków, bez przesunięcia w czasie.

Oprócz wprowadzonego do metod statystycznych chwilowego zatrzymania cząstki w czasie, występuje tu chwilowe zatrzymanie cząstki w przestrzeni.

Rozwiązanie równania uwikłanego, z którego otrzymano równanie (6) jest absolutnie stabilne. Dowód stabilności przytoczono w (9).

6. Ruchy cząstek ze zmiennymi krokami

W opisanych wyżej sposobach poruszania się cząstek wynikających z równań różnicowych, kroki przestrzenne i czasowe miały stałe wielkości.

Z równania różnicowego jawnego lub uwikłanego napisanego we współrzędnych walcowych albo kulistych można określić wartości prawdopodobieństw wykonania zmiennych kroków czasowych i przestrzennych, których zmienność jest określona algebraicznie.

7. Ruchy cząstek ze zmiennymi przypadkowo krokami w przestrzeni i uzależnionymi od nich algebraicznie krokami w czasie

Wielkości kroków czasowych i przestrzennych cząstek poruszających się zgodnie z prawdopodobieństwami określonymi z równań różnicowych, w opisanych poprzednio sposobach błądzenia, były albo stałe albo zmienne algebraicznie.

W pracy [1], krótko streszczonej w punkcie 2. podano sposób błądzenia cząstek, w którym wielkości kroków przestrzennego i czasowego zmieniają się przypadkowo.

Skoro wielkości kroków nie wpływają na stabilność rozwiązania równania (6), to wydaje się celowe, zastosowanie tego równania do realizacji ruchów cząstek, w których wielkości kroków przestrzennych są określane w sposób podany w punkcie 2., a wielkości kroków czasowych obliczane ze związku

$$\Delta t = \Delta n^2/4a .$$

Gdyby każdy krok przestrzenny cząstki odbywał się z prawdopodobieństwem 1, to cząstka po k krokach pokonałaby drogę $S' = k\Delta n'_{śr}$. Jeśli prawdopodobieństwo wykonania kroku przestrzennego oznaczyć przez P, to droga będzie krótsza, równa $S_p = Pk\Delta n'_{śr}$. Średnia długość kroku przestrzennego

$$\Delta n_{śrp} = Pk\Delta n'_{śr}/k .$$

Średnia długość kroku czasowego

$$\Delta t_{śrp} = (S_p/k)^2/4a\,. \qquad (7)$$

Nierówność stwierdzająca koniec błądzenia na skutek wyczerpania czasu

$$t_p = k\Delta t_{śrp} = S_p^2/4ak \geqslant t_c\,, \qquad (8)$$

gdzie t_c – czas przewodzenia ciepła.

Aby skorzystać z maksymalnie długiego kroku przestrzennego wprowadzono oznaczenie $S = S_p/P$.

Równanie (7) przyjmie wtedy postać

$$\Delta t_{śrp}/P^2 = (S/k)^2/4a. \qquad (9)$$

Równanie (9) oznacza, że jeśli cząstka pokonywałaby drogę S zamiast S_p, to średni krok czasowy byłby dłuższy

$$\Delta t_{śr} = \Delta t_{śrp}/P^2\,, \qquad (10)$$

a nierówność stwierdzająca koniec błądzenia

$$t = k\Delta t_{śr} = S^2/4ak \geqslant t_c\,. \qquad (11)$$

Ten sposób błądzenia jest szybszy od opisanego w (1), gdyż wystarcza generowanie liczby losowej dla określenia kąta i znajdywanie sumarycznej drogi dla określenia czasu.

Przy realizacji opisanego wyżej błądzenia pozostaje zaletą możliwość zastosowania tego sposobu do rozwiązywania zagadnień dla ciał o skomplikowanym kształcie, bez popełniania błędu przybliżenia kształtu siatką kwadratów lub prostokątów.

Wadą, jak we wszystkich sposobach błądzeń opartych na równaniach różnicowych, jest mniejsza dokładność, wynikająca z przyjęcia skończonej wielkości kroków.

8. Rozszerzenie zastosowania metody Exodus na nie ustalone przewodzenie ciepła

Wydaje się, że dogodne będzie zastosowanie równania (6) do realizacji metody Exodus w siatce znanych kroków przestrzennych i czasowych.

Jeśli ruch cząstek będzie się odbywał po siatce kwadratów, to zgodnie z równaniem (6) z np. 10^6 cząstek startujących z punktu (x,y), $5 \cdot 10^5$ cząstek pozostanie w tym punkcie, a po $1{,}25 \cdot 10^5$ cząstek przejdzie do punktów $(x-\Delta n,y)$, $(x+\Delta n,y)$, $(x,y-\Delta n)$ i $(x,y+\Delta n)$. Dalsze rozdzielanie cząstek będzie się odbywało w tych samych proporcjach. Cząstki wykonujące ruchy w przestrzeni, zgodnie z równaniem, nie wykonują kroków w czasie. Cząstki pozostające w (x,y) wykonują $5 \cdot 10^5 \Delta t$ kroków w czasie. Aby uniknąć konieczności liczenia, ile która cząstka wykonała kroków w czasie, postanowiono spośród cząstek pozostających w punkcie startowym eliminować $5 \cdot 10^5 \Delta t/t_c$ cząstek, resztę traktować tak, jak gdyby nie wykonała kroków czasowych.

Metoda ta jest znacznie szybsza i dokładniejsza, ze względu na wyeliminowanie błędu wynikającego z wariancji temperatur od metody opartej na równaniu różnicowym, związanej z generowaniem liczb losowych.

Dla ustalonej konwekcji udowodnili to Emery i Carson [6].

Wadą pozostają błędy wynikające ze skończonej wielkości kroków oraz zastąpienia brzegu rzeczywistego linią łamaną, dla ciał o kształcie bardziej skomplikowanym niż prostokąt, walec czy kula.

Bibliografia

1. Haji-Sheikh A., Sparrow E.M.: The Solution of Heat Conduction Problems by Probability Methods. ASME Paper No: 66-WA/HT-1.
2. Beckenbach E.F. (redaktor): Nowoczesna matematyka dla inżynierów. PWN, Warszawa, Część I - 1962, II - 1968.
3. Buslenko N.P. i inni: Metoda Monte Carlo, PWN, Warszawa 1967.

4. Crank J., Nicolson P.: A Practical Method for Numerical Evaluation of Solution of Partial Differential Equations of the Heat Conduction Typ., Proc., Cambridge Philos.Soc. 43,50-67.
5. Douglas J.Jr., Rachford H.H.: On the Numerical Solution of Heat Conduction Problems in Two and Three Space. Transactions of the ASME 82 (1956).
6. Emery A.F., Carson W.W.: A Modification to the Monte Carlo Method - The Exodus Method. ASME paper No: 66-WA/HT-61.
7. Hammersley J.M., Handscomb D.C.: Monte Carlo Methods. London: Mathuen and Co.LTD. New York: John Wiley and Sons INC.1964.
8. Rozewicz J.: Zastosowanie metody Monte Carlo do zagadnień przewodzenia ciepła. Politechnika Śląska. Zeszyt Naukowy nr 180. Gliwice 1967.
9. Saul'ev V.K.: Integrirowanie urawnienij paraboličeskogo tipa metodom setok.Fizmatgiz. Moskwa 1960.
10. Staniszewski B. (redaktor): Wymiana ciepła. Zadania i przykłady. PWN. Warszawa 1965.
11. Staniszewski B., Suski J.: The Solution of Unsteady Heat Conduction Problems in Composite Walls via the Monta Carlo Method. Referat na posiedzenie 2 Komisji Międzynarodowego Instytutu Chłodnictwa w dn. 9-11.09.1969 w Liège w Belgii.

Некоторые статистические методы проблемов нестационарной теплопроводности

К р а т к о е   с о д е р ж а н и е

Целью настоящей статьи является представление новых концепций в отношении метод Монте Карло и их ожидаемых достоинств и недостатков.
Для введения этой проблемы приведена короткая опись трех известных метод Монте Карло.

Some Statistical Methods for Unsteady Heat Conduction Problems

S u m m a r y

The presentation of new concepts of the Monte Carlo Methods and their hopeful advantages and disadvantages is the object of this paper.

Described shortly three known Monte Carlo Methods for introduction in the problem.

Rękopis dostarczono w marcu 1970 r.