

Krzysztof Karaśkiewicz

Instytut Techniki Ciepłej

## MODELOWANIE PRZEPŁYWÓW BURZLIWYCH W MASZYNACH HYDRAULICZNYCH. MODEL NAPRĘŻEŃ REYNOLDSA

W pracy omówiono modelowanie naprężeń Reynoldsa w przepływach burzliwych, jakie występują w maszynach hydraulicznych. Przedstawiono analizę równań naprężeń w postaci różniczkowej i algebraicznej.

### OZNACZENIA

- $C_{ij}$  – transport konwekcyjny naprężeń Reynoldsa,  $C_{ij} = D\tau_{ij}/Dt$
- $C_k$  – transport konwekcyjny energii turbulentnej,  $C_k = Dk/Dt$
- $D_k$  – dyfuzja energii turbulentnej,  $D_k = \frac{1}{2} D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( v \frac{\partial k}{\partial x_k} - \overline{\left( k + \frac{p'}{\rho} \right) v'_k} \right)$
- $k$  – kinetyczna energia turbulentna
- $p$  – ciśnienie absolutne, statyczne
- $P_k$  – produkcja energii turbulentnej
- $V_i, v'_i$  – prędkość uśredniona i jej fluktuacja (zapis tensorowy w kierunku  $x_i$ )
- $\tau_{ij}$  – kinematyczne naprężenia Reynoldsa,  $\tau_{ij} = \overline{-v'_i v'_j}$
- $\varepsilon$  – szybkość dysypacji energii turbulentnej,  $\varepsilon = v \left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} \right)^2$
- Re – liczba Reynoldsa charakteryzująca przepływ wirowy przy tarczy o promieniu  $r_t$ ;  $Re = \frac{\omega r_t^2}{v}$

## WSTĘP

Przepływy burzliwe w maszynach hydraulicznych należą do szczególnie trudnych w modelowaniu. Składa się na to wiele czynników takich jak skomplikowana geometria przestrzeni przepływowych, duża prędkość powierzchni wirników, występowanie ruchów wtórnych płynu; trójwymiarowy charakter warstw przyściennych, anizotropia turbulencji.

Powszechnie spotykany model w wielu programach komercyjnych jest model  $k-\varepsilon$ . Nie opisuje on w sposób właściwy przekoszonych warstw przyściennych i obszarów o wyraźnej anizotropii, ale zapewnia stosunkowo dobrą zbieżność, co uzasadnia jego popularność. Model oparty na pełnych równaniach bilansu naprężeń Reynoldsa pozwala na bardziej poprawny fizycznie opis zjawisk przepływowych, ale sprawia więcej problemów numerycznych. Temu modelowi zostanie poświęcona dalsza część artykułu.

Większość obszarów przepływowych we współczesnych maszynach hydraulicznych z szybkoobrotowymi wirnikami charakteryzuje się w pełni rozwiniętą turbulencją. W najbliższym sąsiedztwie ścianek, w obszarze przejściowym i podwarstwy laminarnej, naprężenia laminarne zaczynają przeważać nad turbulentnymi. Ten obszar jest zwykle modelowany za pomocą funkcji przyściennych, co pozwala uniknąć dodatkowych komplikacji modelu i znacznie zmniejszyć liczbę węzłów siatki, z czym wiąże się mniejsze obciążenie pamięci komputera i krótszy czas wykonywanych obliczeń.

Warto w tym miejscu podkreślić, że opis turbulencji za pomocą równań pędu, uśrednionych po czasie z występującymi w nich naprężeniami Reynoldsa, nie pozwala na uchwycenie wszystkich cech przepływu burzliwego. Z fenomenologicznego punktu widzenia przepływ taki jest kształtowany przez wiry o różnych skalach. Czas życia wirów jest proporcjonalny do ich rozmiaru, zatem wiry o dużych skalach będą mieć największy wpływ na strukturę turbulencji. Wpływ takich czynników, jak zakrzywienie przepływu czy ruch obrotowy powierzchni wirnika na parametry przepływu jest realizowany przez oddziaływanie dużych wirów [1], podczas gdy formacje drobnoskalowe są w małym stopniu wrażliwe na wymienione czynniki.

W niektórych pracach [2, 3, 4, 5, 6] mocno podkreśla się ograniczenia uśrednionych równań pędu, np. opisywanie wyłącznie lokalnych własności przepływu, czy brak informacji o opóźnieniu, jakie zachodzi między wejściem energii o niskich częstotliwościach (duże wiry) i reakcją w postaci dyssypacji tej energii (wiry drobnoskalowe). Ograniczenia te są uważane za główną przyczynę dużych niedokładności [4] obliczeń niektórych skomplikowanych typów przepływu. Można spotkać opinie, iż przełom w dziedzinie modelowania takich przepływów może nastąpić raczej przez sięgnięcie do metod symulacyjnych, np. LES (*Large Eddy Simulation*).

Jednakże, jak na razie, możliwości metody LES są wciąż jeszcze ograniczone. Mało jest przykładów wykorzystania jej do rozwiązania problemów wystę-

pujących w technice. Ponadto metoda ta wymaga bardzo dużych mocy obliczeniowych komputerów.

Z drugiej strony metoda uśredniania osiągnęła dostateczną dojrzałość do zastosowań w różnych obszarach techniki. Jest ona stale rozwijana i na przykładzie pracy [7] widać, że przez bardziej subtelny aproksymację i właściwy dobór stałych można znacznie poprawić jej dokładność.

Celem artykułu jest omówienie modelu turbulентnego opartego na bilansowych równaniach naprężeń Reynoldsa i pokazanie jego możliwości na przykładzie wybranych aplikacji.

Należy podkreślić, że przedstawiony poniżej opis modelu dotyczy układu nieruchomego, związanego z obudową maszyny hydraulicznej. W przypadku opisu przepływu w układzie wirnika pojawiłyby się dodatkowe wyrazy, których obecność byłaby skutkiem wirowania układu.

## 1. OPIS MODELU NAPRĘŻEŃ REYNOLDSA

Równanie bilansu naprężeń Reynoldsa w układzie nieruchomym ma ogólną postać:

$$C_{ij} - P_{ij} - \Phi_{ij} - D_{ij} + \varepsilon_{ij} = 0 \quad (1.1)$$

gdzie:

$$C_{ij} = \frac{d}{dt} \overline{v'_i v'_j} \quad - \text{konwekcja naprężeń Reynoldsa,}$$

$$P_{ij} = - \left( \overline{v'_k v'_j} \frac{\partial V_i}{\partial X_k} + \overline{v'_k v'_i} \frac{\partial V_j}{\partial X_k} \right) \quad - \text{praca naprężeń Reynoldsa,}$$

$$\Phi_{ij} = \frac{p'}{\rho} \overline{\left( \frac{\partial v'_i}{\partial x_j} + \frac{\partial v'_j}{\partial x_i} \right)} \quad - \text{korelacja ciśnienie-deformacja prędkości,}$$

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \nu \overline{\frac{\partial v'_i v'_j}{\partial x_k}} - \overline{v'_i v'_j v'_k} - \frac{p'}{\rho} \overline{(\delta_{jk} v'_i + \delta_{ik} v'_j)} \right) \quad - \text{dyfuzja naprężeń Reynoldsa,}$$

$$\varepsilon_{ij} = 2\nu \overline{\frac{\partial v'_i}{\partial x_k} \frac{\partial v'_j}{\partial x_k}} \quad - \text{dysypacja naprężeń Reynoldsa.}$$

Do zamknięcia tego równania, aproksymacji wymagają wyrazy  $\Phi_{ij}$ ,  $D_{ij}$ ,  $\varepsilon_{ij}$ , zawierają bowiem one nieznanne korelacje gradientów prędkości pulsacyjnych oraz potrójną korelację prędkości pulsacyjnej (wyraz  $D_{ij}$ ).

Wyraz  $\varepsilon_{ij}$  jest modelowany na podstawie założenia, że drobnoskalowe wiry odpowiedzialne za dyssypację zachowują strukturę izotropową. Badania (np. [7, 8]) wskazują, że dla w pełni rozwiniętej turbulencji jedynie w przypadku pół prędkości o silnej deformacji (duże zmiany prędkości na długości porównywalnej ze średnią skalą turbulencji) założenie to nie jest spełnione.

W większości przepływów spotykanych w maszynach hydraulicznych tak duże zmiany nie występują. Badania przepływów na powierzchniach zakrzywionych [1] pokazują, że zakrzywienie toru ruchu płynu nie wpływa na zmianę drobnoskalowej struktury wirów. Dla przepływu w obszarze z rozwiniętą w pełni turbulencją można więc przyjąć założenie o lokalnej izotropii i zastosować powszechnie stosowany [9, 10, 8, 11, 12, 13], prosty model Kołmogorowa:

$$\varepsilon_{ij} = \frac{2}{3} \delta_{jk} \varepsilon \quad (1.2)$$

W wyrazie dyfuzyjnym dominującą rolę odgrywa potrójna korelacja  $\overline{v'_i v'_j v'_k}$ . Może być ona wyznaczana z osobnego równania bilansu (np. jak w [14]). W praktyce obliczeniowej powszechne jest aproksymowanie tego wyrazu w sposób zaproponowany w pracach [15, 16] i wynikający z uproszczenia pełnego równania bilansu dla  $\overline{v'_i v'_j v'_k}$ , m.in. przez odrzucenie, jako pomijalnie małych, wyrazów zawierających deformację średniej prędkości:

$$-\overline{v'_i v'_j v'_k} = c_s \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{v'_i v'_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{v'_j v'_k} + \overline{v'_j v'_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{v'_k v'_i} + \overline{v'_k v'_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{v'_i v'_j} \right) \quad (1.3)$$

Dla przepływów z w pełni rozwiniętą turbulencją, dyfuzja molekularna jest pomijalnie mała.

Biorąc pod uwagę, że część ciśnieniowa w wyrazie dyfuzyjnym jest również możliwa do zaniedbania [14, 16], wyraz ten sprowadza się do zależności:

$$D_{ij} = \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ c_s \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{v'_i v'_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{v'_j v'_k} + \overline{v'_j v'_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{v'_k v'_i} + \overline{v'_k v'_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{v'_i v'_j} \right) \right] \quad (1.4)$$

Wyraz  $\Phi_{ij}$  można oszacować korzystając z równania Poissona dla pulsacji ciśnienia  $p'$ . Wykorzystując twierdzenie Greena otrzymuje się jawną zależność na  $p'$ . Na jej podstawie określa się  $\overline{(p'/\rho)(\partial v'_i/\partial x_j + \partial v'_j/\partial x_i)}$ . Wyraz ten (patrz np. [16, 17, 18]) składa się z dwóch części: pierwszej zależnej tylko od pulsacji prędkości i drugiej zależnej dodatkowo od deformacji prędkości średniej.

Część pierwsza jest aproksymowana powszechnie w sposób zaproponowany przez J. Rotte [17]

$$\Phi_{ij1} = -C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{v'_i v'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) \quad (1.5)$$

Odzwierciedla ona fakt, że w przepływach jednorodnych, anizotropowych z praktycznie zerową deformacją prędkości średniej będzie następowało przechodzenie do stanu izotropii, a więc wyrównywania się udziałów energii turbulენტnej w poszczególnych kierunkach i zanik naprężeń tnących z prędkością proporcjonalną do poziomu anizotropii i ze skalą czasową  $k/\varepsilon$ .

Część druga jest aproksymowana w sposób opisany przez D. Naota i innych [18, 19]. Aproksymacja ta opiera się na hipotezie, że fluktuacje ciśnienia związane z deformacją prędkości średniej będą wymuszać zmiany tensora produkcji naprężeń turbulენტnych  $P_{ij}$  w kierunku izotropii (założona jest lokalna izotropia przepływu [20, 28, 29])

$$\Phi_{ij2} = -C_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) \quad (1.6)$$

Stosowana jest również rozszerzona postać tej aproksymacji:

$$\Phi_{ij2} = -C_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) - C_3 \left( P_{ij}^T - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) - C_4 k \left( \frac{\partial V_i}{\partial x_j} + \frac{\partial V_j}{\partial x_i} \right) \quad (1.7)$$

gdzie:  $C_3 = 6 \cdot C_2 - 4,4$ ,  $C_4 = 2(4 \cdot C_2 - 3)$  ([8, 30]).

Ponieważ pierwszy wyraz w rozszerzonej aproksymacji jest dominujący [8], postać prostsza (1.6) może być wystarczająco dokładna. Aproksymacja (1.7) jest gorzej uzasadniona teoretycznie i może dawać gorsze wyniki (patrz [20]) przy większej komplikacji zapisu.

Należy podkreślić, że liniowa postać związków (1.6), (1.7) jest pewnym uproszczeniem. Badania wykazują [21, 22], że szybkość procesu przechodzenia do izotropii słabnie w miarę zmniejszania się anizotropii przepływu.

Jeżeli znane są energia turbulენტna  $k$  i szybkość jej dyssypacji  $\varepsilon$ , zależności (1.1), (1.4), (1.5), (1.6) wyznaczają zamknięty układ równań różniczkowych cząstkowych opisujących tensor naprężeń turbulენტnych:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \overline{v'_i v'_j} - P_{ij} - \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ c_s \frac{k}{\varepsilon} \left( \overline{v'_i v'_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{v'_j v'_k} + \overline{v'_j v'_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{v'_k v'_i} + \overline{v'_k v'_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \overline{v'_i v'_j} \right) \right] + \\ + C_1 \frac{\varepsilon}{k} \left( \overline{v'_i v'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) + C_2 \left( P_{ij} - \frac{2}{3} \delta_{ij} P_k \right) + \frac{2}{3} \delta_{jk} \varepsilon = 0 \end{aligned} \quad (1.8)$$

Istotne uproszczenie równań (1.8) do postaci algebraicznej [23] jest możliwe jeżeli zmiany  $\overline{v'_i v'_j}/k$  są łagodne, tj.  $\overline{v'_i v'_j}$  zmienia się liniowo z energią turbulენტną  $k$ . W wielu przypadkach przepływów warunek ten może być uznany w przybliżeniu za spełniony.

Między wyrazami opisującymi transport konwekcyjny  $C_{ij}$  i  $C_k$  w równaniach bilansu naprężeń Reynoldsa  $\overline{v'_i v'_j}$  (1.1) i energii turbulენტnej  $k$  zachodzi prosta zależność:

$$C_{ij} = \frac{\overline{v'_i v'_j}}{k} C_k + \frac{d}{dt} \left( \frac{\overline{v'_i v'_j}}{k} \right) \quad (1.9)$$

Podobnie między wyrazami opisującymi transport dyfuzyjny  $D_{ij}$ ,  $D_k$

$$D_{ij} = \frac{\overline{v'_i v'_j}}{k} D_k + \frac{\partial}{\partial x_k} \left[ c_s \frac{k^2}{\varepsilon} \left( \frac{\overline{v'_j v'_i}}{v'_i v'_i} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\overline{v'_j v'_k}}{k} \right) + \frac{\overline{v'_j v'_i}}{v'_j v'_i} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\overline{v'_i v'_k}}{k} \right) + \frac{\overline{v'_k v'_i}}{v'_k v'_i} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\overline{v'_i v'_j}}{k} \right) \right) \right] +$$

$$+ c_s \frac{k}{\varepsilon} \frac{\partial k}{\partial x_l} \left[ \frac{\overline{v'_i v'_l}}{v'_i v'_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\overline{v'_j v'_k}}{k} \right) + \frac{\overline{v'_j v'_l}}{v'_j v'_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\overline{v'_i v'_k}}{k} \right) + \frac{\overline{v'_k v'_l}}{v'_k v'_l} \frac{\partial}{\partial x_l} \left( \frac{\overline{v'_i v'_j}}{k} \right) \right] \quad (1.10)$$

W modelu W. Rodi'ego [23] te podkreślone wyrazy są pomijane, jednakże w pracy [24] zaproponowana została prosta ich aproksymacja tak, że:

$$C_{ij} = \frac{\overline{v'_i v'_j}}{k} C_k + \alpha \frac{\varepsilon}{k} \left( \frac{\overline{v'_i v'_j}}{v'_i v'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) C_k \quad (1.11)$$

$$D_{ij} = \frac{\overline{v'_i v'_j}}{k} D_k + \alpha \frac{\varepsilon}{k} \left( \frac{\overline{v'_i v'_j}}{v'_i v'_j} - \frac{2}{3} \delta_{ij} k \right) D_k \quad (1.12)$$

W ten sposób został wzmocniony wpływ naprężeń tnących na transport konwekcyjny i dyfuzyjny. Aproksymacja ta została oparta na hipotezie o większym udziale w procesach transportu wirów dużych, o dłuższym czasie życia. Akceptując to podejście otrzymuje się układ równań algebraicznych:

$$\frac{\overline{v'_i v'_j}}{k} = \frac{2}{3} \delta_{ij} + \frac{(1 - C_2) \left( \frac{P_{ij}}{\varepsilon} - \frac{2}{3} \delta_{ij} \frac{P_k}{\varepsilon} \right)}{(1 + \alpha) \left( \frac{P_k}{\varepsilon} - 1 \right) + C_1 (\alpha - \beta) \frac{D_k}{\varepsilon}} \quad (1.13)$$

Równania (1.13) zawierają cztery stałe  $C_1$ ,  $C_2$ ,  $\alpha$ ,  $\beta$ . Nie istnieją uniwersalne ich wartości stosowane dla wszystkich klas przepływów, co wynika chociażby ze wspomnianego wcześniej nieliniowego zachowywania się korelacji  $\Phi_{ij1}$ ,  $\Phi_{ij2}$ . Wartości stałej  $C_1$  u różnych autorów wahają się w granicach od 1,5 do 4,0, a stałej  $C_2$  od 0 do 0,75 (patrz np. [28, 20, 8, 25]). Czynnione są próby zastąpienia tych stałych funkcjami tensora anizotropii i liczby Reynoldsa (np. [21, 26]). Jak dotąd nie udało się tą drogą osiągnąć większej dokładności modelu przy wyraźnej jego komplikacji [21]. W pracy [21] stałe te zostały określone dla typu przepływów na powierzchniach zakrzywionych i ich wartości wynoszą:  $C_1 = 3,0$ ,  $C_2 = 0,3$ .

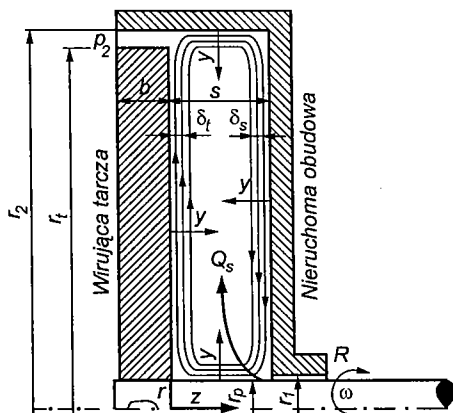
Wyraźnie gorsze wyniki rozkładów  $\Phi_{ij}$  w przypadku przepływów zakrzywionych otrzymywane były (np. [27]) przy stosowaniu dość powszechnie spoty-

kanych wartości  $C_1 = 1,8$  i  $C_2 = 0,6$ , otrzymanych w wyniku analizy przepływu płaskiego i traktowanych jako uniwersalne.

Stałe  $\alpha$ ,  $\beta$  zostały przyjęte w pracy [24] jako równe sobie  $\alpha = \beta$ . Brak jest szerszych danych empirycznych pozwalających ustalić ich wartości dla różnych typów przepływu.

## 2. PRZYKŁADY APLIKACJI

Jednym z przykładów zastosowania powyższego modelu jest symulacja przepływu w przestrzeni między wirującą tarczą i nieruchomą obudową. Przestrzenie takie występują w pompach, sprężarkach, turbinach wodnych, sprężałach i przekładniach hydrokinetycznych, turbinach parowych ale też w młynach do mas celulozowo-papierniczych. Przykładowa przestrzeń została pokazana na rys. 1.

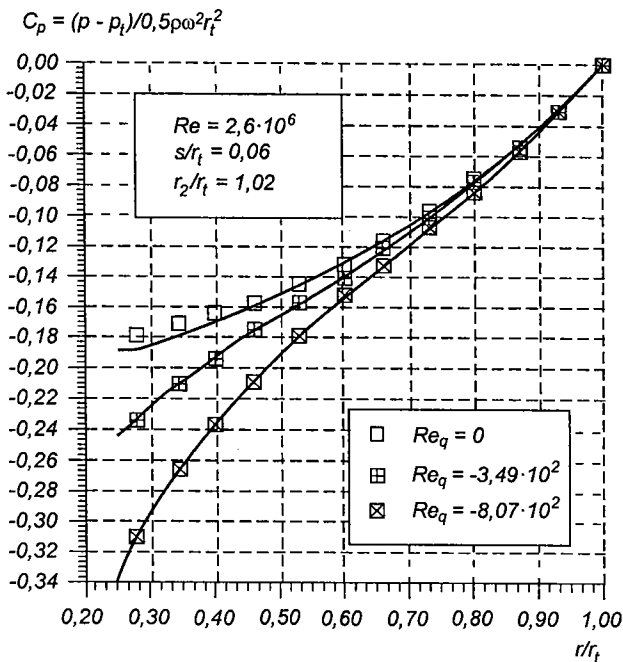


Rys. 1. Przestrzeń między wirującą tarczą i nieruchomą obudową

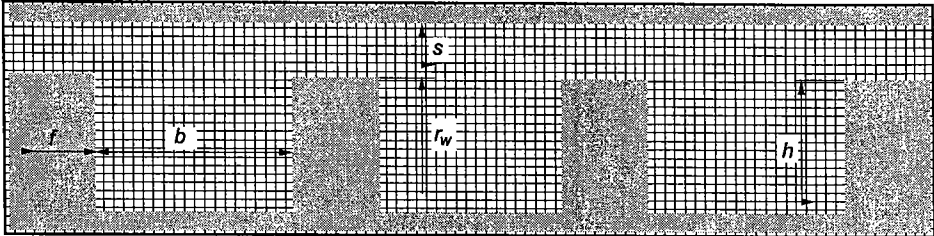
Na rysunku 2 porównane są, dla takiej geometrii, obliczenia (linia ciągła) z danymi doświadczalnymi. Na osi rzędnych podany jest bezwymiarowy współczynnik ciśnienia, a na osi odciętych promień względny wirującej tarczy. Wyniki dotyczą przypadku dla względnej odległości między tarczą i obudową  $s/r_t = 0,06$  i dla trzech różnych wartości promieniowego przepływu dośrodkowego  $Q_s$ .

Szszsze omówienie wyników symulacji przepływu w tej przestrzeni znajduje się m.in. w pracy [31].

Na rysunku 3 pokazano przestrzeń przepływową spotykanego w maszynach hydraulicznych uszczelnienia rowkowanego.



Rys. 2. Rozkład promieniowy ciśnienia dla różnych liczb  $Re_q = Q_s / \pi r_t v$

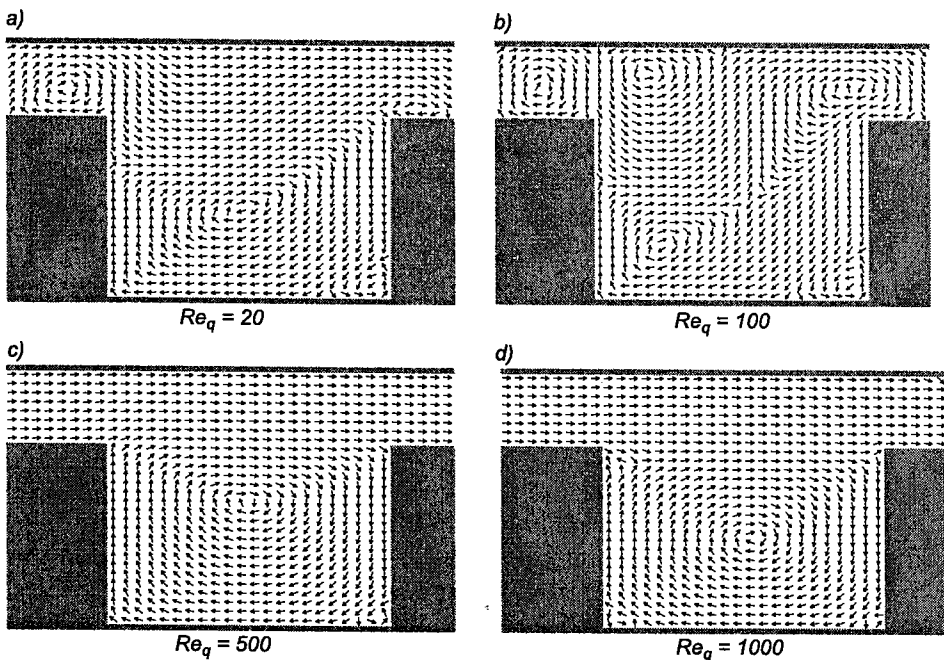


Rys. 3. Szczelina rowkowa z siatką współrzędnych (skala nie jest zachowana)

Obliczana szczelina składała się z trzech rowków naciętych na wirującym wałku o promieniu  $r_w = 50$  mm. Szerokość szczeliny wynosiła  $s = 0,08$  mm, a całkowita długość szczeliny 10 mm. Wysokość  $h$  i szerokość nacięcia  $b$  były zmieniane. Na rys. 4 przedstawiono wyniki symulacji w jednej (wlotowej) części szczeliny.

Przepływ był obliczany dla różnych wartości przecieku  $Q_s$  przez szczelinę (gdzie  $Re_q = Q_s / \pi r_t v$ ). Zagadnienie to było przedmiotem badań prowadzonych w Instytucie Techniki Ciepłej Politechniki Warszawskiej. Szersze jego omówienie znajduje się m.in. w pracach [32, 33].





Rys. 4. Przepływ w pojedynczym rowku uszczelnienia

### 3. PODSUMOWANIE

Spotykane w maszynach hydraulicznych przepływy charakteryzują się najczęściej w pełni rozwiniętą turbulencją. Ze względu na stopień jej złożoności występujące w uśrednionych równaniach pędu naprężenia Reynoldsa powinny być modelowane w sposób pozwalający na poprawny opis fizyki zjawisk. Prowadzone w Instytucie Techniki Ciepłej Politechniki Warszawskiej prace nad wykorzystaniem modelu opartego na bilansowych równaniach naprężeń Reynoldsa pokazują, że można w sposób udany symulować przepływy burzliwe w różnych częściach maszyn hydraulicznych. Należy dodać, że omawiany model jest trudniejszy w obliczeniach numerycznych niż model  $k-\epsilon$ . Główną tego przyczyną jest obecność dominującego wyrazu źródłowego w równaniach bilansowych. Dalszym celem prac podejmowanych w ITC PW jest zagadnienie symulacji przepływów w obszarach przejściowych, które kształtują się dla małych promieni lub mniejszych prędkości obrotowych.

## BIBLIOGRAFIA

- [1] Barlow R.S., Johnston J.P.: Structure of a Turbulent Boundary Layer on a Concave Surface – Journal of Fluid Mechanics. Vol. 191, 1988, p. 137.
- [2] Van Den Berg B.: Three-Dimensional Turbulent Boundary Layers. Springer-Verlag, 1982, p. 10.
- [3] Driver D.M., Hebbar S.K.: Three-Dimensional Shear-Driven Boundary-Layer Flow with Streamwise Adverse Pressure Gradient. AIAA Journal, 1989.
- [4] Launder B.E.: Stress Transport Closures – Into the Third Generation – Turbulent Shear Flows 1. Selected pap. 1-st Int. Symp. Pennsylvania, Pa, 1977 also Berlin 1979, p. 259–266.
- [5] Launder B.E., Morse A.: Numerical Prediction of Axisymmetric Free Shear Flows with a Reynolds Stress Closure – Turbulent Shear Flows 1. Selected pap. 1-st Int. Symp.
- [6] Marvin J.G.: Progress and Challenges in Modeling Turbulent Aerodynamic Flows. In Engineering Turbulence Modelling and Experiments, Elsevier, 1990, p. 3.
- [7] Jones W.P., Musonge P.: Closure of the Reynolds Stress and Scalar Flux Equations – The Physics of Fluids. Vol. 31, no. 12, 1988, p. 3589.
- [8] Launder B.E., Reece G.J., Rodi W.: Progress in the Development of a Reynolds-Stress Turbulence Closure. Journal of Fluid Mechanics, vol. 68, part 3, 1975, p. 537.
- [9] Gessner F.B., Emery A.F.: A Reynolds stress model for turbulent corner flows. Transactions of the ASME. Journal of Fluids Engineering, no. 1, 1976, p. 261.
- [10] Gibson M.M.: An algebraic stress and heat-flux model for turbulent shear flow with streamline curvature. International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 21, 1978, p. 1609.
- [11] Leshziner M.A., Rodi W.: Calculation of annular and twin parallel jets using various discretization schemes and turbulence – Model variations – Transactions of the ASME. Journal of Fluids Engineering, vol. 103, 1981, p. 352.
- [12] Martinuzzi R., Pollard A.: Comparative study of turbulence models in predicting turbulent pipe flow – Part I: Algebraic stress and  $k$ - $\epsilon$  models. AIAA Journal, vol. 27, no. 1, 1989, p. 29.
- [13] Pourahmadi F., Humphrey J.A.C.: Prediction of curved channel flow with an extended  $k$ - $\epsilon$  model of turbulence. AIAA Journal, vol. 21, no. 10, 1983, p. 1365.
- [14] Dawydow B.I.: К Статистической Динамике Несжимаемой Турбулентной Жидкости. Доклады Академии Наук СССР, Гидромеханика, vol. 127, no. 4, 1961, p. 768.
- [15] Daly B.J., Harlow F.H.: Transport equations in turbulence. The Physics of Fluids, vol. 13, no. 11, 1970, p. 2634.
- [16] Hanjalic K., Launder B.E.: Fully developed asymmetric flow in a plane channel. Journal of Fluid Mechanics, vol. 51, part 2, 1972, p. 301.
- [17] Rotta J.: Statistische Theorie Nichthomogener Turbulenz. Zeitschrift für Physik, vol. 129, 1951, p. 547.
- [18] Naot D., Shavit A., Wolfshtein M.: Two-point correlation model and the redistribution of Reynolds stresses. The Physics of Fluids, vol. 16, no. 6, 1973, p. 738.
- [19] Naot D., Shavit A., Wolfshtein M.: Numerical calculation of Reynolds stresses in a square duct with secondary flow. Wärme – und Stoffübertragung, vol. 7, 1974, p. 151.
- [20] Launder B.E.: On the effects of a gravitational field on the turbulent transport of heat and momentum. Journal of Fluid Mechanics, vol. 67, part 3, 1975, p. 569.

- [21] Gibson M.M., Younis B.A.: Calculation of boundary layers with sudden transverse strain. Transactions of the ASME, Journal of Fluids Engineering, vol. 108, 1986, p. 470.
- [22] Leslie D.C.: Analysis of a strongly sheared nearly homogeneous turbulent shear flow. Journal of Fluid Mechanics, vol. 98, part 2, 1980, p. 435.
- [23] Rodi W.: A new algebraic relation for calculating the Reynolds stresses. ZAMM 56, 1976, p. 219.
- [24] Launder B.E.: A generalized algebraic stress transport hypothesis. AIAA Journal, vol. 20, no. 3, 1982, p. 436.
- [25] So R.M.C.: A turbulence velocity scale for curved shear flows. Journal of Fluid Mechanics, vol. 70, part 1, 1975, p. 37.
- [26] Lumley J.L., Khajeh-Nouri P.: Computational modelling of turbulent transport. Advances in Geophysics, vol. A15, 1974, p. 169.
- [27] Hong S.K., Murthy S.N.B.: Pressure-strain correlation in curved wall boundary layers. AIAA Journal, vol. 24, no. 6, 1986, p. 971.
- [28] Gibson M.M., Launder B.E.: On the calculation of horizontal turbulent, free shear flows under gravitational influence. Transactions of the ASME – Journal of Heat Transfer, no. 2, 1976, p. 81.
- [29] Gibson M.M., Launder B.E.: Ground effect on pressure fluctuations in the atmospheric boundary layer. Journal of Fluid Mechanics, vol. 86, part 3, 1978, p. 491.
- [30] Launder B.E., Samaraweera S.A.: Application of a second-moment turbulence closure to heat and mass transport in thin shear flows. International Journal of Heat and Mass Transfer, vol. 21, 1978, p. 1609.
- [31] Karaśkiewicz K.: Turbulent flow along enclosed rotating disk. VDI Berichte 1186, 1995, p. 79.
- [32] Karaśkiewicz K., Jędral W.: Przepływ turbulentny w uszczelnieniu rowkowanym. XII Krajowa Konferencja Mechaniki Płynów. Jawor, 1996, materiały konferencyjne, t. II, s. 211–218.
- [33] Karaśkiewicz K.: Poprawa sprawności pomp poprzez zmniejszenie straty objętościowej – uszczelnienie rowkowane. III Konferencja Problemy Badawcze Energetyki Ciepłej, Warszawa 1997.